МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В БИЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

В. А. Какичев

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье используются обозначения, принятые в работе [1].

Приведем ряд предложений, относящихся к задаче Римана

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in C$$

в ее классической постановке [2, стр. 111—115], которые ниже распространяются на случай двух комплексных переменных.

1.1. Пусть $G(t) \equiv 1$, $g(t) \equiv 0$, тогда задача Римана имеет решением произвольную постоянную.

1.2. Если индекс $l(G)$ функции $G(t) \in H(C)$ равен нулю, то однородная задача Римана $(g(t) \equiv 0)$ при дополнительном условии $\Phi^-(\infty) = 1$ имеет единственное решение.

1.3. Функцию $G_0(t) \in H(C)$ с $l(G_0) = 0$ можно единственным образом представить в виде отношения $\Phi_0^+(t)/\Phi_0^-(t)$, где $\Phi_0^{\pm}(t) \in H(C)$ — предельные значения не обращающихся в нуль аналитических функций $\Phi_0^{\pm}(z)$ и $\Phi_0^-(\infty) = 1$.

1.4. Функцию $G(t) \in H(C)$ с $l(G) = \varkappa > 0$ можно представить единственным образом в виде отношения $\Phi_r^+(t)/\Phi_r^-(t) = t^{\varkappa}\Phi_0^+(t)/\Phi_0^-(t)$, где $0 \leqslant r \leqslant \varkappa$, $\Phi_r^{\pm}(t)$ — предельные значения аналитических функций $\Phi_r^{\pm}(z)$, имеющих единственный нуль порядка $r\,(\varkappa - r)$ в точке $z = 0\,(z = \infty)$ и $\lim\limits_{z\to\infty} z^{\varkappa-r}\Phi_r^-(z) = 1$, а $\Phi_0^{\pm}(t)$ определяются предложением 1.3 по функции $G_0(t) = t^{-\varkappa}G(t)$.

Ниже изучаются мультипликативные задачи для функций, аналитических в бицилиндрических областях $D^{\pm} \times \Delta^{\pm}$, удовлетворяющих на остове $C \times \Gamma$ следующим предельным условиям:

$$F^{++}(t, \omega)\,F^{--}(t, \omega) = G(t, \omega)\,F^{-+}(t, \omega)\,F^{+-}(t, \omega) \tag{1.1}$$

— задача I типа,

$$F^{++}(t,\ \omega)\,F^{+-}(t,\ \omega) = G(t,\ \omega)\,F^{-+}(t,\ \omega)\,F^{--}(t,\ \omega) \tag{1.2}$$

— задача II типа,

$$F^{++}(t,\ \omega)\,F^{-+}(t,\ \omega) = G(t,\ \omega)\,F^{+-}(t,\ \omega)\,F^{--}(t,\ \omega) \tag{1.3}$$

— задача, двойственная к задаче II типа. В таких задачах возрастает роль краевых условий вида $\Phi^{-}(\infty) = 1$. Носителями таких условий являются двумерные «диски» $D^{\pm}_{\infty}$ и $\Delta^{\pm}_{\infty}$, а сами условия аналогичны условиям Коши в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

При решении задач (1.1)—(1.3) будем использовать классы $H_1^{\pm\mp}$ и H_1^{--}-функций, аналитических в $D^{\pm}\times\Delta^{\mp}$ и $D^{-}\times\Delta^{-}$, удовлетворяющих на $C\times\Gamma$ условию Гельдера и образующихся в единицу в бесконечно удаленных точках соответствующих областей.

Все сказанное ниже лишь не существенным усложнением выкладок распространяется на случай произвольного числа $n \geqslant 2$ переменных.

2. МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ЗАДАЧИ С $G(t,\omega) = 1$

2.1°. Получим аналог предложения 1.1 для мультипликативных краевых задач I и II типа.

Пусть сначала

$$\Phi^{++}(t,\ \omega)\,\Phi^{--}(t,\ \omega) = \Phi^{+-}(t,\ \omega)\,\Phi^{-+}(t,\ \omega). \tag{2.1}$$

Перепишем (2.1) в виде

$$\Phi^{++}(t,\ \omega)/\Phi^{-+}(t,\ \omega) = \Phi^{+-}(t,\ \omega)/\Phi^{--}(t,\ \omega). \tag{2.2}$$

Фиксируя в (2.2) $t\in C$ и применяя теорему Лиувилля по переменному w, найдем, что

$$\Phi^{++}(t,\ \omega) = \alpha(t)\,\Phi^{-+}(t,\ \omega),\quad \Phi^{+-}(t,\ \omega) = \alpha(t)\,\Phi^{--}(t,\ \omega), \tag{2.3}$$

где $\alpha(t)$ — произвольная функция класса $H(C)$.

Пусть $l(\alpha(t)) = k$, тогда по предложению 1.4 существуют функции $a^{\pm}(z)\in H_1^{\pm}(C)$ такие, что $a^{-}(\infty) = 1$, $\alpha(t) = t^k a^{+}(t)/a^{-}(t)$ и, следовательно,

$$\frac{\Phi^{++}(t,\omega)}{a^{+}(t)} = t^k\,\frac{\Phi^{-+}(t,\omega)}{a^{-}(t)},\quad \frac{\Phi^{+-}(t,\omega)}{a^{+}(t)} = t^k\,\frac{\Phi^{--}(t,\omega)}{a^{-}(t)}. \tag{2.4}$$

Применяя теорему Лиувилля к (2.4) по переменному z при фиксированном $\omega\in\Gamma$, найдем, что при $k\geqslant 0$

$$\Phi^{\substack{++\\+-}}(z,\ w) = a^{+}(z)\,P_k^{\pm}(z,\ w),\quad \Phi^{\substack{-+\\--}}(z,\ w) = z^{-k}a^{-}(z)\,P_k^{\pm}(z,\ w), \tag{2.5}$$

где

$$\mathrm{P}_k^{\pm}(z,w) = \sum_{s=0}^{k} z^s b_k^{\pm}(w)$$

псевдополином с произвольными функциями $b_k^{\pm}(w)\in H^{\pm}(\Gamma)$. Если $k\leqslant 0$, то получим тривиальное решение, не представляющее интереса.

Переписав (2.1) в виде

$$\Phi^{++}(t,\ \omega)/\Phi^{+-}(t,\ \omega) = \Phi^{-+}(t,\ \omega)/\Phi^{--}(t,\ \omega),$$

рассуждая, как и выше, найдем, что

$$\Phi^{\substack{++\\-+}}(z,\ w) = b^{+}(w)\,Q_{\varkappa}^{\pm}(w,\ z),\quad \Phi^{\substack{+-\\--}}(z,\ w) = w^{-\varkappa}b^{-}(w)\,Q_{\varkappa}^{\pm}(w,\ z), \tag{2.6}$$

где $Q_{\varkappa}^{\pm}(w,\ z)$ — псевдополином степени $\varkappa$ относительно w с произвольными коэффициентами $a_\sigma^{\pm} \in H^{\pm}(C)$. Сравнивая (2.5) и (2.6), убедимся, что условию (2.1) удовлетворяют функции вида:

$$\begin{aligned}
\Phi^{++}(z, w) &= a^{+}(z)\, b^{+}(w)\, P_k^{+}(z, w)\, Q_\varkappa^{+}(w, z),\\
\Phi^{+-}(z, w) &= w^{-\varkappa} a^{+}(z)\, b^{-}(w)\, P_k^{-}(z, w)\, Q_\varkappa^{+}(w, z),\\
\Phi^{-+}(z, w) &= z^{-k} a^{-}(z)\, b^{+}(w)\, P_k^{+}(z, w)\, Q_\varkappa^{-}(w, z),\\
\Phi^{--}(z, w) &= z^{-k} w^{-\varkappa} a^{-}(z)\, b^{-}(w)\, P_k^{-}(z, w)\, Q_\varkappa^{-}(w, z).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Будем теперь искать решение мультипликативной задачи с предельным условием (2.1) и следующими краевыми условиями:

$$\text{а) } \Phi^{--}(\infty, \infty) = A \neq 0; \tag{2.8}$$

$$\text{в) } \Phi^{--}\Big|_{D_\infty^-} = Aa^{-}(z) \in H^{-}(C),\ a^{-}(\infty) = 1, \tag{2.9}$$

$$\Phi^{--}\Big|_{\Delta_\infty^-} = Ab^{-}(w) \in H^{-}(\Gamma),\ b^{-}(\infty) = 1; \tag{2.10}$$

с) функция $\Phi^{++}(z, w)$ обращается в нуль на двумерных аналитических поверхностях:

$$P_{k_m}^{+}(z, w) = z^{k_m} + \sum_{s=0}^{k_m-1} z^s b_{ms}^{+}(w) = 0,\quad b_{ms}^{+}(w) \in H^{+}(\Gamma),$$

$$Q_{\varkappa_\mu}^{+}(w, z) = w^{\varkappa_\mu} + \sum_{\sigma=0}^{\varkappa_\mu-1} w^\sigma a_{\mu\sigma}^{+}(z) = 0,\quad a_{\mu\sigma}^{+}(z) \in H^{+}(C), \tag{2.11}$$

$$m = 1, 2, \ldots, r,\ \mu = 1, 2, \ldots, \rho,$$

причем кратности этих поверхностей соответственно равны n_m и ν_μ и $k_1 n_1 + \cdots + k_r m_r = k$, $\varkappa_1 \nu_1 + \cdots + \varkappa_\rho \nu_\rho = \varkappa$;

д) функции $\Phi^{-+}(z, w)$ и $\Phi^{+-}(z, w)$ обращаются в нуль соответственно на двумерных аналитических поверхностях

$$Q_{\delta_\mu}^{-}(w, z) = 0,\quad P_{d_m}^{-}(z, w) = 0, \tag{2.12}$$
$$\mu = 1, 2, \ldots, \lambda,\ m = 1, 2, \ldots, l,$$

где $Q_{\delta_\mu}^{-}$ ($P_{d_m}^{-}$) — псевдополином степени δ_μ (d_m) относительно w (z) с коэффициентами $a_{\mu\delta_\mu}^{-}(z) \equiv 1$, $a_{\mu\sigma}^{-}(z) \in H_0^{-}(C)$, $\sigma = 0, 1, \ldots, \delta_\mu - 1$ ($b_{md_m}^{-}(w) \equiv 1$, $b_{ms}^{-}(w) \in H_0^{-}(\Gamma)$, $s = 0, 1, \ldots, d_m - 1$),
причем кратности этих поверхностей равны σ_μ и s_m и

$$\delta_1 \sigma_1 + \cdots + \delta_\lambda \sigma_\lambda = \varkappa,\quad d_1 s_1 + \cdots + d_e s_e = k;$$

е)

$$\Phi^{+-}\Big|_{D_\infty^+} = z^k a^{+}(z),\quad \Phi^{-+}\Big|_{\Delta_\infty^+} = w^\varkappa b^{+}(w), \tag{2.13}$$
$$a^{+}(z) \in H^{+}(C),\quad b^{+}(w) \in H^{+}(\Gamma).$$

Из сказанного выше следует

Теорема 2.1. *Единственное решение задачи (2.1), (2.9)—(2.13) дают формулы*

$$A\Phi^{++}(z, w) = a^{+}(z)\, b^{+}(w) \prod_{m=1}^{r} [P_{k_m}^{+}(z, w)]^{n_m} \prod_{\mu=1}^{\rho} [Q_{\varkappa_\mu}^{+}(w, z)]^{\nu_\mu},$$

$$w^\varkappa \Phi^{+-}(z, w) = a^{+}(z)\, b^{-}(w) \prod_{m=1}^{l} [P_{d_m}^{-}(z, w)]^{s_m} \prod_{\mu=1}^{\rho} [Q_{\varkappa_\mu}^{+}(w, z)]^{\nu_\mu};$$

$$z^k\Phi^{-+}(z,\ w) = a^-(z)\, b^+(w) \prod_{m=1}^{r} [P^+_{k_m}(z,\ w)]^{n_m} \prod_{\mu=1}^{\lambda} [Q^-_{\delta_\mu}(w,\ z)]^{\sigma_\mu}, \tag{2.14}$$

$$z^k w^\varkappa \Phi^{--}(z,\ w) = A a^-(z)\, b^-(w) \prod_{m=1}^{l} [P^-_{d_m}(z,\ w)]^{s_m} \prod_{\mu=1}^{\lambda} [Q^-_{\delta_\mu}(w,\ z)]^{\sigma_\mu}.$$

Следствие 2.1. *Единственное решение* $\Phi^{\pm\pm}(z,\ w) \in H_1^{\pm\pm}$ и $\Phi^{\pm\mp} \times \times (z,\ w) \in H_1^{\pm\mp}$ *задачи* (2.1), *удовлетворяющее краевым условиям (2.8)—(2.10) и условиям*

$$\Phi^{+-}\Big|_{D^+_\infty} = a^+(z) \in H^+(C),\ \ \Phi^{-+}\Big|_{\Delta^+_\infty} = b^+(w) \in H^+(\Gamma), \tag{2.15}$$

дают формулы

$$\Phi^{\pm\pm}(z,\ w) = A^{\pm 1} a^{\pm}(z)\, b^{\pm}(w),\ \Phi^{\pm\mp}(z,\ w) = a^{\pm}(z)\, b^{\mp}(w). \tag{2.16}$$

Замечание 2.1. Следствие 2.1 является естественным обобщением предложения 1.1 при $A \neq 0$. Теорема 2.1 показывает, что при $n = 2$ нет одномерного аналога. В самом деле, при $n = 1$ либо $\Phi^{\pm}(z) \equiv 0$ $\forall z \in D^{\pm}$, либо $\Phi^{\pm}(z) = A \neq 0$ $\forall z \in D^{\pm}$. При $n = 2$, помимо случая (2.16) и случая, когда $\Phi^{\pm\pm} = \Phi^{\mp\pm} = 0$, возможна ситуация, при которой решения обращаются в нуль не тождественно, а на заданных двумерных аналитических поверхностях (2.11) и (2.12).

2.2°. Займемся теперь мультипликативной задачей

$$\Phi^{++}(t,\ \omega)\, \Phi^{+-}(t,\ \omega) = \Phi^{-+}(t,\ \omega)\, \Phi^{--}(t,\ \omega) \tag{2.17}$$

Рассуждая, как и в 2.1°, будем иметь

$$\Phi^{++}/\Phi^{-+} = \Phi^{--}/\Phi^{+-} = \alpha(t) \equiv t^k a^+(t)/a^-(t)$$

или

$$a^+(t)\, \Phi^{++}(t,\ \omega) = t^k a^-(t)\, \Phi^{-+}(t,\ \omega),$$
$$\Phi^{+-}(t,\ \omega)/a^+(t) = t^{-k}\Phi^{--}(t,\ \omega)/a^-(t). \tag{2.18}$$

Из первого условия (2.18) следует, что для существования нетривиального решения должно выполняться условие $k \geqslant 0$, а из второго условия (2.18) — $k \leqslant 0$.

Таким образом, задача (2.17) имеет решение лишь при $k = 0$ и в силу теоремы Лиувилля

$$\Phi^{\pm\pm}(z,\ w) = [a^{\pm}(z)]^{\mp 1} b^{\pm}(w),\ \ \Phi^{\mp\pm}(z,\ w) = [a^{\mp}(z)]^{\mp 1}\, b^{\pm}(w),$$

где $a^{\pm}(z) \in H_1^{\pm}(C)$ и $b^{\pm}(w) \in H_1^{\pm}(\Gamma)$.

Теорема 2.2. *Задача (2.17) имеет единственное решение*

$$\Phi^{\pm\pm}(z,\ w) = A\,[a^{\pm}(z)]^{\mp 1} b^{\pm}(w),\ \ \Phi^{\mp\pm}(z,\ w) = [a^{\mp}(z)]^{\mp 1} b^{\pm}(w), \tag{2.19}$$

удовлетворяющее краевым условиям (2.8)—(2.10) и (2.15).

Замечание 2.2. В отличие от задачи (2.1) задача (2.17) может иметь нули только вида $w = w_k \in \Delta^+$ ($w = w_e \in \Delta^-$), где $b^+(w_k) = 0$ ($b^-(w_e) = 0$).

Точно так же исследуется двойственная задача II типа.

3. МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ЗАДАЧИ С НУЛЕВЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНДЕКСАМИ

3.1°. Везде в этом параграфе предполагаются выполненными следующие условия:

$$l(G_0) = \lambda(G_0) = 0,\ G_0 \neq 0 \ \text{ на } C \times \Gamma \ \text{ и } G_0 \in H, \tag{3.1}$$

в силу которых функция $\ln G_0$ однозначна на $C \times \Gamma$.

Предельное условие первой мультипликативной задачи с $G_0(t, \omega)$, удовлетворяющей условиям (3.1), запишем так:

$$F^{++}(t, \omega) F^{--}(t, \omega) = G_0(t, \omega) F^{-+}(t, \omega) F^{+-}(t, \omega). \tag{3.2}$$

Формально прологарифмировав равенство (3.2), получим условие, внешне совпадающее с задачей о скачке для бицилиндрических областей [1, 1.2°]:

$$\ln F^{++}(t, \omega) - \ln F^{+-}(t, \omega) - \ln F^{-+}(t, \omega) + \ln F^{++}(t, \omega) = \ln G_0(t, \omega). \tag{3.3}$$

Равенство (3.3) действительно будет задачей о скачке, если

$$F^{\pm\pm} \in H_1^{\pm\pm} \text{ и } F^{\pm\mp} \in H_1^{\pm\mp}.$$

Это замечание приводит нас к следующей постановке частной мультипликативной краевой задачи: найти функции $F^{\pm\pm} \in H^{\pm\pm}$ и $F^{\pm\mp} \in H^{\pm\mp}$, удовлетворяющие краевым условиям

$$F^{+-}\Big|_{D^{\pm}_{\infty}} = F^{-+}\Big|_{\Delta^{\pm}_{\infty}} = 1 \tag{3.4}$$

и предельному условию вида (3.1).

Теорема 3.1. *Частная мультипликативная краевая задача (3.2), (3.1) и (3.4) имеет единственное решение.*

Так как $\ln G_0(t, \omega)$ однозначна на $C \times \Gamma$, а искомые функции таковы, что $\ln F^{\pm\pm}(z, w)$ и $\ln F^{\pm\mp}(z, w)$ голоморфны в соответствующих областях, то условие (3.1) можно логарифмировать. Произвольно фиксируя ветвь логарифма в равенстве (3.3) и учитывая условие (3.4), найдем [1], что единственное решение задачи (3.3) дает интеграл Коши:

$$\ln F(z, w) = K(\ln G_0) \equiv \gamma_0(z, w),$$

а единственное решение частной мультипликативной краевой задачи дают формулы

$$F^{\pm\pm}(z, w) = e^{\gamma_0^{\pm\pm}(z, w)}, \quad F^{\pm\mp}(z, w) = e^{\gamma_0^{\pm\mp}(z, w)}. \tag{3.5}$$

С л е д с т в и е 3.1. *Каждая функция G_0, удовлетворяющая условиям (3.1), единственным образом представима на $C \times \Gamma$ в виде отношения*

$$G_0(t, \omega) = F_0^{++}(t, \omega) F_0^{--}(t, \omega)/F_0^{+-}(t, \omega) F_0^{-+}(t, \omega), \tag{3.6}$$

где $F_0^{\pm\pm}(t, \omega)$ и $F_0^{\pm\mp}(t, \omega)$ — предельные значения функций $F_0^{\pm\pm}(z, w) \in H_1^{\pm\pm}$ и $F_0^{\pm\mp}(z, w) \in H_1^{\pm\mp}$, удовлетворяющих условиям (3.4).

3.2°. Найдем теперь решение задачи (3.2), удовлетворяющее условиям вида (2.8 — 2.10) и (2.15). В силу следствия 3.1 каждая функция G_0, удовлетворяющая условиям (3.1), представима в виде (3.6). Исходя из этого представления, условие (3.2) запишем в виде (2.1), в котором $\Phi^{\pm\pm} = F^{\pm\pm}/F_0^{\pm\pm}$, $\Phi^{\pm\mp} = F^{\pm\mp}/F_0^{\pm\mp}$ и $F_0(z, w) = \exp \gamma_0(z, w)$.

Используя следствие 2.1, приходим к теореме.

Теорема 3.2. *Единственное решение задачи (3.2) в классах $H_1^{\pm\pm}$ и $H_1^{\pm\mp}$, удовлетворяющее краевым условиям вида (2.8) — (2.10) и (2.15), дают формулы*

$$F^{\pm\pm}(z, w) = A^{\pm 1} a^{\pm}(z) b^{\pm}(w) \exp \gamma_0^{\pm\pm}(z, w), \tag{3.7}$$
$$F^{\pm\mp}(z, w) = a^{\pm}(z) b^{\mp}(w) \exp \gamma_0^{\pm\mp}(z, w).$$

3.3°. Аналогичным образом исследуются двойственные мультипликативные краевые задачи второго типа. Сформулируем окончательный результат для задачи II типа.

Теорема 3.3. *Вторая мультипликативная краевая задача с предельным условием*

$$F^{++}(t, \omega) F^{+-}(t, \omega) = G_0(t, \omega) F^{-+}(t, \omega) F^{--}(t, \omega) \tag{3.8}$$

имеет единственное решение в классах $H_1^{\pm\pm}$ и $H_1^{\pm\mp}$, удовлетворяющее краевым условиям вида (2.8) — (2.10) и (2.15). Это решение дают формулы:

$$F^{\pm\pm}(z, w) = A[a^{\pm}(z)]^{\mp 1} b^{\pm}(w) e^{\pm\gamma_0^{\pm\pm}(z, w)}, \tag{3.9}$$
$$F^{\pm\mp}(z, w) = [a^{\pm}(z)]^{\pm 1} b^{\mp}(w) e^{\mp\gamma_0^{\pm\mp}(z, w)},$$

где $\gamma_0(z, w) = K(\ln G_0)$.

Следствие 3.2. *Всякая функция $G_0(t, \omega)$, удовлетворяющая условиям (3.1), единственным образом представима на $C \times \Gamma$ в виде отношения*

$$G_0(t, \omega) = F_0^{++}(t, \omega) F_0^{\pm\mp}(t, \omega)/F_0^{\mp\pm}(t, \omega) F_0^{--}(t, \omega), \tag{3.10}$$

где $F_0^{\pm\pm}(t, \omega)$ и $F_0^{\pm\mp}(t, \omega)$—предельные значения функций $F_0^{\pm\pm}(z, w) \in H_1^{\pm\pm}$ и $F_0^{\pm\mp}(z, w) \in H_1^{\pm\mp}$, удовлетворяющих условиям (3.4).

В этом параграфе были доказаны двумерные аналоги предложений 1.2 и 1.3.

4. МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ЗАДАЧИ С НЕНУЛЕВЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНДЕКСАМИ

4.1°. Везде ниже предполагаются выполненными условия

$$l(G) \equiv l, \ \lambda(G) \equiv \lambda, \ |l| + |\lambda| > 0, \ G \neq 0 \text{ на } C \times \Gamma \text{ и } G \in H, \tag{4.1}$$

а решения задач (1.1) — (1.3) отыскиваются в классах функций, обращающихся в нуль только на дисках $D_\infty^{\pm}$, $\Delta_\infty^{\pm}$.

Положим $G_0(t, \omega) = t^{-l}\omega^{-\lambda}G$, тогда $l(G_0) = \lambda(G_0) = 0$ и, значит, по следствию 3.1 существуют функции $\gamma_0^{\pm\pm}(z, w)$ и $\gamma_0^{\pm\mp}(z, w)$ такие, что

$$G_0 = \exp(\gamma_0^{++} - \gamma_0^{+-} - \gamma_0^{-+} + \gamma_0^{--}) = F_0^{+-} F_0^{--}/F_0^{+-} F_0^{-+}, \tag{4.2}$$

где $\gamma_0(z, w) = K(\ln G_0)$ и $\gamma_0^{--}(z, \infty) = \gamma_0^{--}(\infty, w) = \gamma_0^{+}(z, \infty) = \gamma_0^{-+} \times (\infty, w) = 0$. Подставляя значение $G = t^l\omega^\lambda G_0$ в (1.1) и (4.2), получим

$$\Psi^{++}(t, \omega) \Psi^{--}(t, \omega) = t^l\omega^\lambda \Psi^{+-}(t, \omega) \Psi^{-+}(t, \omega), \tag{4.3}$$

где

$$\Psi^{\pm\pm} = F^{\pm\pm}/F_0^{\pm\pm}, \quad \Psi^{\pm\mp} = F^{\pm\mp}/F_0^{\pm\mp}. \tag{4.4}$$

Задача (4.3) решается просто, но по-разному в зависимости от знаков целых чисел l и λ и тех краевых условий, которым должно удовлетворять искомое решение. Поэтому мы сформулируем в самом общем виде краевые условия исходной задачи и в общем же виде запишем решение задачи (1.3), а в теореме 4.1 опишем отдельно все возможные случаи.

Общий вид краевых условий таков:

$$z^{-s}w^{-\sigma}F^{--}(z, w)|_{(\infty, \infty)} = A \neq 0,$$
$$z^{-s}w^{-\sigma}F^{--}(z, w)\Big|_{D_\infty^-} = Aa^-(z) \in H^-(C), \ a^-(\infty) = 1, \tag{4.5}$$
$$z^{-s}w^{-\sigma}F^{--}(z, w)\Big|_{\Delta_\infty^-} = Ab^-(w) \in H^-(\Gamma), \ b^-(\infty) = 1,$$
$$z^{-m}w^{-\mu}F^{+-}(z, w)\Big|_{D_\infty^+} = a^+(z) \in H^+(C),$$
$$z^{-n}w^{-\nu}F^{-+}(z, w)\Big|_{\Delta_\infty^+} = b^+(w) \in H^+(\Gamma),$$

а общая форма решений имеет вид:

$$
\begin{aligned}
AF^{++}(z, w) &= z^{p}w^{q}a^{+}(z)\,b^{+}(w)\exp\gamma_0^{++}(z, w),\\
F^{+-}(z, w) &= z^{n}w^{\nu}b^{-}(w)\,a^{+}(z)\exp\gamma_0^{+-}(z, w),\\
F^{-+}(z, w) &= z^{m}w^{\mu}a^{-}(z)\,b^{+}(w)\exp\gamma_0^{-+}(z, w),\\
F^{--}(z, w) &= Az^{s}w^{\sigma}a^{-}(z)\,b^{-}(w)\exp\gamma_0^{--}(z, w).
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Теорема 4.1. *Пусть r и ρ наперед заданные целые числа, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqslant r \leqslant |l|$, $0 \leqslant \rho \leqslant |\lambda|$. Если $l \geqslant 0$ и $\lambda \geqslant 0$ ($l \leqslant 0$ и $\lambda \leqslant 0$), то задача (1.1) с краевыми условиями (4.5), в которых $s = \sigma = m = \nu = 0$ ($\mu = n = 0$) $\mu = \lambda - \rho$, $n = l - r$ ($s = l + r$, $\sigma = \lambda + \rho$, $m = r$, $\nu = \rho$) постоянная A и функции $a^{\pm}(z)$, $b^{\pm}(w)$ наперед заданы, имеет единственное решение, определяемое по формулам (4.6) при $p = q = 0$. Если же $l \leqslant 0$ и $\lambda \geqslant 0$ ($l \geqslant 0$ и $\lambda \geqslant 0$), то единственное решение задачи (1.1), (4.5) с $\sigma = n = \nu = 0$ ($s = \mu = m = 0$) и $s = l + r$, $m = r$, $\mu = \rho - \lambda$ ($\sigma = \lambda + \rho$, $\nu = \rho$, $n = r - l$) дают формулы (4.6) при $p = 0$, $q = \rho$ ($p = r$, $q = 0$).*

Замечание 4.1. Постановка краевых условий (4.5), описанных в теореме 4.1, диктуется значениями индексов $l(G)$ и $\lambda(G)$, а также фиксированием чисел r и ρ, и в этом смысле она единственно возможна. Допустимо только уточнение ограничений на заданные функции $a^{\pm}(z)$, $b^{\pm}(w)$, аналогичное условиям предложения 1.4. Так, например, при $l > 0$ и $\lambda > 0$ можно требовать, чтобы функции $a^{\pm}(z)$, $b^{\pm}(w)$ удовлетворяли условиям вида:

$$
a^{+}(z) = z^{r}\alpha^{+}(z),\quad b^{+}(w)\,w^{\rho} = \beta^{+}(w),\quad a^{-}(z) = z^{l-r}\alpha^{-}(z),\quad b^{-}(w) = w^{\lambda-\rho}\beta^{-}(w),
$$

где $\alpha^{\pm}(z) \in H^{\pm}(C)$, $\beta^{\pm}(w) \in H^{\pm}(\Gamma)$ и

$$
\lim_{z\to\infty} z^{l-r}\alpha^{-}(z) = \lim_{w\to\infty} w^{\lambda-\rho}\beta^{-}(w) = 1.
$$

4.2°. Рассмотрим один частный случай, а именно, задачу

$$
F^{++}(t, \omega) = G(t, \omega)\,F^{-+}(t, \omega), \tag{4.7}
$$

получающуюся из условия (1.1) при $F^{--} = F^{+-} \equiv 1$. Отсюда и из теоремы 3.1 при $l \geqslant 0$ и $\lambda \geqslant 0$ имеем

$$
\begin{aligned}
F^{--}(z, w) &= Aa^{-}(z)\,b^{-}(w)\exp\gamma_0^{--}(z, w) = 1,\\
F^{+-}(z, w) &= w^{\rho-\lambda}a^{+}(z)\,b^{-}(w)\exp\gamma_0^{+-}(z, w) = 1.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Из (4.8) последовательно получим

$$
1 = F^{--}(\infty, \infty) = A,\quad 1 = F^{--}\Big|_{D_\infty^-} = a^{-}(z),\quad 1 = F^{--}\Big|_{\Delta_\infty^-} = b^{-}(w).
$$

Далее, так как $b^{-}(\infty) = 1$, то из условия $1 = F^{+-}\Big|_{D_\infty^+}$ следует, что $1 = a^{+}(z)\,w^{\rho-\lambda}$ и, значит, $\rho = \lambda$, $a^{+}(z) = 1$.

Таким образом,

$$
e^{\gamma_0^{--}(z, w)} = e^{\gamma_0^{+-}(z, w)} = 1
$$

и, следовательно, $\gamma_0^{+-}(t, \omega) = \gamma_0^{--}(t, \omega) = 0$, или, что то же самое, $\ln G_0 = S_\omega(\ln G_0)$ [1].

Отсюда при выполнении необходимого и достаточного условия разрешимости $\ln G_0 = S_\omega(\ln G_0)$ решение задачи (4.7) дают формулы

$$
\begin{aligned}
F^{++}(z, w) &= z^{r}w^{\lambda}b_r^{+}(w)\exp\gamma_0^{++}(z, w),\\
F^{-+}(z, w) &= z^{r-l}b_r^{+}(w)\exp\gamma_0^{-+}(z, w),\\
& r = 0, 1, \ldots, l,
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

где $b_r^+(w) \in H^+(C)$. Полагая в формулах (4.9) $\beta_r^+(w) = w^\lambda b_r^+(w)$ и суммируя, найдем общее решение задачи (4.7)

$$F^{++}(z, w) = \sum_{r=0}^{l} z^r \beta_r^+(w)\, e^{\gamma_0^{++}(z, w)}, \quad F^{-+}(z, w) =$$

$$= w^{-\lambda} \sum_{r=0}^{l} z^{r-l} \beta_r^+(w)\, e^{\gamma_0^{-+}(z, w)}, \tag{4.10}$$

совпадающее с решением этой задачи, приведенным в работе [1].

Формулы (4.10) дают решение задачи (4.7) и при $l > 0$, $\lambda < 0$. При $l < 0$, как это следует из теоремы 3.1 и формул (4.5) и (4.6), задача (4.7) не разрешима вообще.

4.3°. Используя следствие 3.2 и обозначения (4.4), условие (1.2) приведем к виду

$$\Psi^{++}(t, \omega)\, \Psi^{+-}(t, \omega) = t^l \omega^\lambda \Psi^{-+}(t, \omega)\, \Psi^{--}(t, \omega), \tag{4.11}$$

из которого следует, что при $l < 0$, в силу теоремы Лиувилля, примененной по переменной z, задача (4.11) имеет тривиальное решение.

Когда $l \geqslant 0$, имеет место теорема, аналогичная теореме 4.1.

Теорема 4.2. *Пусть* $l \geqslant 0$, *а* r *и* ρ *удовлетворяют неравенствам* $0 \leqslant r \leqslant l$, $0 \leqslant \rho \leqslant |\lambda|$, *тогда при* $\lambda \geqslant 0$ ($\lambda \leqslant 0$) *задача (1.2) с краевыми условиями (4.5), в которых* $s = r - l$, $\sigma = \rho - \lambda$, $m = \mu = n = \nu = 0$ ($s = \sigma = 0$, $m = l - r$, $\mu = -\lambda - \rho$, $n = -r$, $\nu = \rho$), *имеет единственное решение, определяемое по формулам:*

$$F^{++}(z, w) = A \frac{b^+(w)}{a^+(z)} z^r w^\rho e^{\gamma_0^{++}(z, w)}$$

$$F^{--}(z, w) = A a^-(z)\, b^-(w)\, z^{r-l} w^{\rho-\lambda} e^{-\gamma_0^{--}(z, w)},$$

$$F^{\pm\mp}(z, w) = [a^\pm(z)]^{\pm 1} b^\pm(w)\, e^{\mp\gamma_0^{\pm\mp}(z, w)},$$

$$\Big(F^{\pm\pm}(z, w) = A\,[a^\pm(z)]^{\mp 1} b^\pm(w)\, e^{\pm\gamma_0^{\pm\pm}(z, w)},$$

$$F^{+-}(z, w) = z^{l-r} w^{-\lambda-\rho} a^+(z)\, b^-(w)\, e^{-\gamma_0^{+-}(z, w)},$$

$$F^{-+}(z, w) = z^{-r} w^\rho \frac{b^+(w)}{a^-(z)} e^{\gamma_0^{-+}(z, w)}\Big).$$

Замечание 4.2. Задача (1.3) разрешима лишь при $\lambda \geqslant 0$.

Замечание 4.3. Полагая в задачах (1.1) — (1.3) то одну из искомых функций $F^{\pm\pm}$ и $F^{\pm\mp}$, то любые две из них тождественно равными единице и рассуждая как и в 4.2°, найдем решения вырожденных мультипликативных задач, исходя из общего решения, определяемого теоремами 4.1 и 4.2.

Замечание 4.4. В данном параграфе получен результат, аналогичный предложению 1.4. Для предельных задач (1.2) и (1.3) мы имеем полную аналогию: разрешимость (1.2) только при $l \geqslant 0$ и (1.3) только при $\lambda \geqslant 0$. Задача (1.1) не имеет одномерного аналога, так как соответствующие краевые задачи разрешимы при любых l и λ.

Замечание 4.5. В работе [4] рассматривается задача, аналогичная по по форме задаче (1.1). При ее решении автор не формулирует никаких краевых условий типа условий Коши, используемых нами. При этом он утверждает, что произвол в решении таких задач, как и в случае одного переменного, описывается многочленом. Сопоставление результатов, изложенных выше и в работе [4], показывает, что подобное утверждение ошибочно.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Какичев. Краевые задачи линейного сопряжения для функций, голоморфных в бицилиндрических областях. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 5. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.
2. Ф. Д. Гахов. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
3. В. А. Какичев. Мультипликативная краевая задача для функций, голоморфных в бицилиндрических областях. Тезисы докладов второй республиканской конференции математиков Белоруссии 27—30. VI 1967, Минск.
4. С. К. Токликишвили. Об одной однородной граничной задаче для функций многих комплексных переменных. Труды Грузинск. политехнич. ин-та им. В. И. Ленина, № 2 (122), 1968.

Поступила 8 апреля 1969 г.