О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ ВЕЛИЧИНЫ НАИМЕНЬШЕГО УКЛОНЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

В. А. Фильштинский

1. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=m}^{n}$ — линейно-независимые непрерывные на интервале $[a;\ b]$ функции; $K(u;\ x)=\sum\limits_{k=m}^{n}\beta_k\varphi_k(u)\varphi_k(-x)$, $\sigma(x)$ — функции ограниченной вариации на интервале $[a;\ b]$. Скажем, что функции $K(u;\ x)$ и $\sigma(x)$ образуют пару $(\sigma;\ K)$, если

$$\int\limits_a^b |K(u;\ x)||d\sigma(x)|\leqslant 1$$

для всех $u\in[a,\ b]$.

Символом $(\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\ \alpha_r)$ обозначим множество многочленов $T(u)=\sum\limits_{k=m}^{n}c_k\varphi_k(u)$, коэффициенты которых удовлетворяют уравнениям связи:

$$\alpha_j:\sum_{k=m}^{n}\alpha_{kj}c_k=\delta_j,\ j=1,\ 2,\dots,\ r;\ \delta_j=0;\ 1.$$

Значение наименьшего уклонения

$$E_n=E_n(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_r)\overset{\text{def}}{=}\inf_{(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots\ .\ \alpha_r)}\ \max_{[a;\ b]}\left|\sum_{k=m}^{n}c_k\varphi_k(u)\right|$$

будем оценивать с помощью величины $F_n=F_n((\bar\alpha_1,\ \bar\alpha_2,\dots,\ \bar\alpha_r);\ (\sigma,\ k))$, которая, по определению, совпадает с $\inf\limits_{(\bar\alpha_1,\ \bar\alpha_2,\ \dots\ ,\ \bar\alpha_r)}\ \operatorname{vraimax}\limits_{[a,\ b]}|f(x)|$, а множество[1] $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_r)$ состоит из функций, удовлетворяющих уравнениям связи

$$\bar{\alpha}_j: \int_a^b \psi_j(x) f(x)\, d\sigma(x) = \delta_j, \; j = 1, 2, \ldots, r,$$

$$\psi_j(x) = \sum_{k=m}^{n} \alpha_{kj}\beta_k\varphi_k(-x),$$

2. **Предложение 1.** *Какова бы ни была пара* $(\sigma; K)$, *справедливо неравенство*

$$E_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \leqslant F_n((\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_r); (\sigma; K)).$$

Доказательство. Пусть функция $f_\varepsilon(x)$ такова, что $\underset{[a,b]}{\mathrm{vraimax}}|f_\varepsilon(x)| < F_n + \varepsilon, (\varepsilon > 0)$ и $f_\varepsilon(x) \in ((\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_r)(\sigma; K))$.
Положим

$$c_k = \beta_k \int_a^b f_\varepsilon(x)\varphi_k(-x)\, d\sigma(x), \qquad T_\varepsilon(u) = \sum_{k=m}^{n} c_k\varphi_k(u). \tag{1}$$

Легко проверить, что $T_\varepsilon(u) \in (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$. Кроме того,

$$|T_\varepsilon(u)| = \left|\sum_{k=m}^{n} c_k\varphi_k(u)\right| = \left|\sum_{k=m}^{n} \beta_k\varphi_k(u)\int_a^b f_\varepsilon(x)\varphi_k(-x)\, d\sigma|(x)\right| =$$

$$= \left|\int_a^b f_\varepsilon(x)\, K(u; x)\, d\sigma(x)\right| \leqslant \mathrm{vraimax}\,|f_\varepsilon(x)| \leqslant F_n + \varepsilon.$$

Поэтому

$$E_n \leqslant \max_{[a,b]}|T_\varepsilon(u)| \leqslant F_n + \varepsilon,$$

откуда и следует утверждение теоремы, так как $\varepsilon > 0$ произвольно.

Из предложения 1 непосредственно следует

Предложение 2. $E_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \leqslant \inf\limits_{(\sigma; K)} F_n$.

3. Пусть теперь $a = 0$, $b = 2\pi$, $\varphi_k(u) = e^{iku}$, $0 \leqslant |k| \leqslant n$, $\sigma(x) = \frac{1}{2\pi}x$. Ядро $K_n(u; x) = \sum_{k=-n}^{n} \beta_k e^{ik(u-x)}$ таково, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=-n}^{n}\beta_k e^{-ikt}\right| dt \leqslant 1.$$

Справедливо

---

[1] В более подробном обозначении класса функций $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_r)$ необходимо отмечать зависимость от пары $(\sigma; K)$.

Предложение 3. $E_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \leqslant L = \operatorname{vrai\,max}\limits_{[0,2\pi]} |f(x)|$, $f(x)$ — *экстремальное решение L-проблемы моментов*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \psi_j(x) f(x)\, dx = \delta_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, r;$$

$$\psi_j(x) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_{kj}\beta_k e^{-ikx}, \qquad j = 1, 2, \ldots, r. \tag{2}$$

Многочлен, для которого эта оценка справедлива, строится по формулам (1), в которых вместо функции $f_\varepsilon(x)$ берется экстремальное решение проблемы моментов (2).

Пример. а) Дана одна связь $\alpha: \sum\limits_{k=-n}^{n} \alpha_k c_k = 1$. Пусть $K(u;\ x) = \sum\limits_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ik(u-x)}$. В этом случае

$$\beta_k = 1 - \frac{|k|}{n+1}, \quad \psi(x) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{-ikx}.$$

Проблеме моментов (2) соответствует одно уравнение

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \psi(x) f(x)\, dx = 1.$$

Ясно, что в этом случае

$$L = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\psi(x)|\, dx\right)^{-1}$$

и потому

$$E_n = \inf_{\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k\alpha_k = 1} \max_{[0,2\pi]} \left|\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\theta}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left|\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{-ikx}\right| dx\right)^{-1}.$$

б) Если взять функцию скачков $\sigma(x)$, имеющую скачки $\rho_k = \frac{1}{m+1}$ в точках $\theta_k = \frac{2k\pi}{m+1}$, $k = 0, 1, \ldots, m$, $m \geqslant n$, из предложения 1 следует, что[1]

---

[1] Оценка снизу вытекает из неравенств

$$1 = \left|\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k c_k\right| = \left|\int\limits_0^{2\pi} T_n(x)\varphi(x)\, d\sigma(x)\right| \leqslant \max_{[0,2\pi]} |T_n(x)| \int\limits_0^{2\pi} |\varphi(x)|\, d\sigma(x)\,|.$$

$$\left(\frac{1}{m}\sum_{k-0}^{\overline{\overline{m}}}\left|\varphi(\theta_k)\right|\right)^{-1}\leqslant \inf_{\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k\alpha_k=1}\max_{[0,2\pi]}\left|\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left|\psi(\theta_k)\right|\right)^{-1},\qquad (=L),$$

где

$$\varphi(\theta)=\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k e^{-ik\theta},\quad \psi(\theta)=\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e^{-ik\theta}.$$

Многочлены

$$T_1(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_n(\theta-x)\operatorname{sign}\psi(x)\,dx,$$

$$T_2(\theta)=\frac{1}{m+1}\sum_{\nu=0}^{m}\operatorname{sign}\psi(\theta_\nu)\,K_n(\theta-\theta_\nu),$$

где $K_n(t)=\sum\limits_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e^{ikt}$, удовлетворяют уравнению связи $\sum\limits_{k=-n}^{n}\alpha_k c_k=1$ и условию $\max\limits_{[0,2\pi]}|T_i(\theta)|\leqslant L$, $i=1,\ 2$, в случаях а) и б) соответственно.

4. Несложно получить и асимптотическое значение величины наименьшего уклонения $E_n(\alpha_1,\ \alpha_2\ldots\alpha_r)$. Обозначим знаком $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_r)$ совокупность функций $f(x)$, удовлетворяющих уравнениям

$$\tilde{\alpha}_j:\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,\varphi_j(x)\,dx=\delta_j,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ r,$$

где

$$\varphi_j(x)=\sum_{k=-n}^{n}\alpha_{kj}e^{-ikx},\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ r;$$

(напомним, что исходные связи α_j были записаны так:

$$\sum_{k=-n}^{n}\alpha_{kj}c_k=\delta_j,\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

Лемма. Имеет место неравенство

$$E_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \geqslant \inf_{(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_r)} \underset{[0,2\pi]}{\mathrm{vraimax}} |f(x)| \qquad (=\tilde{F}_n).$$

Доказательство. Пусть $T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \in (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, а в остальном произвольный. Так как

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_n(x)\,\varphi_j(x)\,dx = \sum_{k=-n}^{n} c_k \alpha_{kj} = \delta_j,$$

то $T_n(x) \in (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_r)$. Следовательно, $\max_{[0,2\pi]} |T_n(x)| \geqslant \tilde{F}_n$. Поэтому и $E_n \geqslant \tilde{F}_n$.

Следствие. *Имеет место двойная оценка*

$$F_n \geqslant E_n \geqslant \tilde{F}_n.$$

Отсюда немедленно вытекает:

Теорема 1. *Пусть $N \geqslant n$, n — фиксировано, $f(x)$ — экстремальное решение проблемы моментов*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_j(x)\, f(x)\,dx = \delta_j, \quad j = 1, 2, \ldots, r \tag{3}$$

и

$$L = \underset{[0,2\pi]}{\mathrm{vraimax}} |f(x)|.$$

Тогда

$$\lim_{N\to\infty} \inf_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)} \max_{[0,2\pi]} \Big| \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} \Big| = L.$$

Следствие.

$$\lim_{N\to\infty} \inf_{\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k c_k = 1} \max_{[0,2\pi]} \Big| \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} \Big| = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big| \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{-ikx} \Big| dx \right)^{-1}.$$

Этот же результат можно сформулировать так. Для каждой функции $f(x) \in L^{\infty}(0,2\pi)$ с коэффициентами Фурье c_k имеем

$$\Big| \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k c_k e^{ikx} \Big| \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big| \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{-ikx} \Big| dx \right) \underset{[0,2\pi]}{\mathrm{vraimax}} |f(x)|.$$

Отметим, что при $\alpha_0 = 1$, $\alpha_{\pm 2} = \cdots \alpha_{\pm(n-1)} = 0$, $\alpha_{\pm n} = \frac{1}{2}\sec\Phi$, $0 \leqslant \Phi < \frac{\pi}{2}$ получается результат Ли и Смита [2]:

$$|a_0| + \sec\Phi\,|a_n| \leqslant \frac{1}{\pi}(\pi - 2\Phi + 2\operatorname{tg}\Phi)\,\|f\|\,L^\infty[0,2\pi].$$

Заметим, что проблема моментов (2) часто приводит к тригонометрической L-проблеме моментов, полностью изученной Н. И. Ахиезером и М. Г. Крейном [1, статья 1]. Там же дано выражение для величины L.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн. О некоторых вопросах теории моментов. Харьков, 1938.

2. E. T. Y. Lee and D. R. Smith. Note on Some Inequalities for Fourier Coefficients, J. Math. Anal. and Appl., t. 31, № 3, 1970.

Поступила 23 ноября 1971 г.