УДК 517

В. И. Лиокумович

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ТЕОРЕМОЙ МИТЯГИНА

Известно (теорема Рисса, см., например, [1, с. 566—567]), что *если A — линейное отображение, действующее непрерывно из L^{p_1} в L^{p_1} и из L^{p_2} в L^{p_2}, т. е.* $\|A\|_{p_1} \leqslant c$ *и* $\|A\|_{p_2} \leqslant c < \infty$, *то* *отображение* $A: L^p \to L^p$ *при всех* p, $1 \leqslant p_1 < p < p_2$ *непрерывно, а его норма* $\|A\|_p$ *не превосходит* c.

В работе [2] Б. С. Митягин дал ответ на вопрос о том, для каких пространств функций, кроме L^p, $1 \leqslant p_1 < p < p_2 \leqslant \infty$, этот факт верен в случае $p_1 = 1$, $p_2 = \infty$, а именно: имеет место

Теорема Митягина. *Пусть* N — B*-пространство измеримых функций на* $[0,1]$ $L^1 \supset N \supset L^\infty$, *и* L^∞ *плотно в* N; *пусть* G — *группа линейных отображений* g *(в пространствах функций) вида* $(gf)(t) = \varepsilon(t) f[T(t)]$, *где* $\varepsilon(t)$ — *измеримая функция,* $|\varepsilon(t)| = 1$ *почти всюду,* $T(t)$ — *сохраняющее меру преобразование* $[0, 1] \to [0, 1]$; *пусть операторы* $g \in G$ *непрерывны в* N *и* $\sup_{g \in G} \|g\|_N = M < \infty$.

Тогда всякий оператор A, *непрерывно действующий в* L^1 *и в* L^∞, *непрерывно действует и в* N, *и его норма*

$$\|A\|_N \leqslant M \max\{\|A\|_1, \|A\|_\infty\}.$$

Из сопоставления теорем Митягина и Рисса вытекает естественный вопрос: нельзя ли в теореме Митягина заменить L^1, L^∞ на L^{p_1} L^{p_2} соответственно, требуя от N лишь выполнения условия $L^{p_1} \subset N \subset L^{p_2}$, как это имеет место в теореме Рисса?

Отрицательному ответу на этот вопрос и посвящена данная работа.

Пусть E — двумерное пространство, заданное системой полярных координат ρ, φ, в котором заданы единичные шары S_1, S_2, S_3 определяющие соответственно G^2-инвариантные нормы* $\|\cdot\|_i$, $i = 1, 2, 3$, $\|\cdot\|_3 \leqslant \|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_2$, причем границы шаров S_j, $j = 2, 3$, — p-эллипсы вида

$$\Gamma_j : |\rho\cos\varphi|^{p_j} + |\rho\sin\varphi|^{p_j} = 1, \ p_j \geqslant 1. \qquad (1)$$

Достаточно, очевидно, показать, что при $A_0 S_j \subset S_j$, $j = 2, 3$, соотношение $A_0 S_1 \subset S_1$, справедливое в соответствии с интерполяционной теоремой Митягина для всякого линейного отображения $A_0 : E \to E$ при

$$S_2 = \{\pm\rho\cos\varphi \pm \rho\sin\varphi \leqslant 1\},$$
$$S_3 = \{|\rho\cos\varphi|, |\rho\sin\varphi| \leqslant 1\}$$

(см. [2] — замечание на с. 174), не имеет места для некоторого линейного отображения $A: E \to E$, если в качестве S_j, $j = 2, 3$ взять эллипсы (1) при (см. рисунок)

$$p_j = j, \quad j = 2, 3. \qquad (1')$$

Нам понадобится следующая геометрически очевидная

---

* Следуя Б. С. Митягину, через G^n обозначим группу перестановок координатных векторов $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ с последующим умножением на числа α_j, $i = 1, 2, \ldots, n$, $|\alpha_i| = 1$.

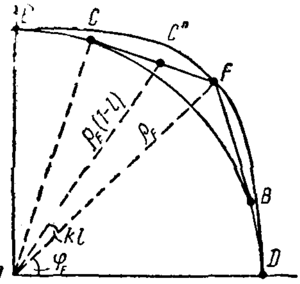
Лемма. *Пусть S_ν и S_λ — выпуклые центрально симметричные фигуры на плоскости E, на которой определена система полярных координат ρ, φ.*

Пусть $\{A_{k_j, l}\}$, $j = \nu, \lambda : \forall A \in \{A_{k_j, l}\} \Rightarrow AS_j \subset S_j$, два подмножества множества линейных операторов

$$\{A_{k, l}\} = \{A_{k, l} : A_{k, l}x = y;\ x,\ y \in E;$$

$$\rho_y = \rho_x (1 - l);\ \varphi_y = \varphi_x + kl,\ 0 < l < 1,\ 0 < k\}.$$

Тогда, если



$$\lim_{l \to 0} \frac{\sup\limits_{\{A_{k_\nu}, l\}} k}{\sup\limits_{\{A_{k_\lambda}, l\}} k} > 1, \qquad (*)$$

то

$$\exists A^0 \in \{A_{k, l}\} : A^0 S_\nu \subset S_\nu,\ \ A^0 S_\lambda \not\subset S_\lambda.$$

Далее, построим единичный круг S_1 с границей F_1 так, что часть Γ_1, лежащая в I квадранте, представляет собой кривую $\smile DE$ (рисунок)

$$\smile DB \subset \Gamma_2,\ \rho_D = 1,\ \varphi_D = 0,$$

$$\smile DE = BF \text{ — касательная к } \Gamma_2,\ \rho_F = \sqrt[6]{2},\ \varphi_F = \frac{\pi}{4},\ F \in \Gamma_3,$$

$$FC \text{ — касательная к } \Gamma_2,$$

$$\smile CE \subset \Gamma_2,\ \rho_E = 1;\quad \varphi_E = \frac{\pi}{2}$$

и симметричным образом продолжена на квадранты II—IV.

Пусть некоторый оператор $A' \in \{A_{k_\nu, l}\}$, $\nu = 3$ (обозначения — см. лемму) соответствует наибольшему значению величины k при заданном l. Тогда для шара S_3 (см. (1) и (1')) система уравнений*

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_3 : \cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi = \rho^{-3}, \qquad &(2)\\ &A'\Gamma_3 : \cos^3 (\varphi - k_\nu l) + \sin^3 (\varphi - k_\nu l) = (\rho + \rho l)^{-3} \qquad &(3) \end{aligned}\right\}$$

даст возможность получить оценку значения $k' = \sup_{\{A_{k_\nu}, l\}} k$ при $l \to 0$. Разложив все члены уравнения (3) в ряд Тейлора по l и сопоставив полученное выражение с уравнением (2) будем иметь

$$k' = \frac{1 + 0(l)}{\rho^3 \sin \varphi \cos \varphi (\sin \varphi - \cos \varphi)} \geqslant \frac{1 + 0(l)}{\rho^3 \cos \varphi (1 - \cos \varphi)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{4 + 0(l)}{\rho^3} \geqslant \frac{4 + 0(l)}{\rho_F^3}. \qquad (4)$$

* Ввиду симметрии задачи рассматриваем только I квадрант.

Применяя подобную процедуру к построенному выше S_1 (рассмотрим случай $A''F \in \Gamma_1, A'' \in \{A_{k,\,l}\}$, $l \to 0$, что, очевидно, достаточно для оценки при $l \to 0$ величины $k'' = \sup_{\{A_{k_\lambda},\,l\}} k$, $\lambda = 1$, сверху), из рассмотрения треугольника $\Delta OC''F$, $C'' = A''F$ (рисунок) получим равенство

$$\sin [\pi - (kl + \angle CFO)] = \frac{\rho_F \sin \angle CFO}{(1-l)},$$

откуда $\left(\text{поскольку } \angle OCF = \frac{\pi}{2},\ |OC| = 1\right)$ будем иметь оценку

$$k'' \leqslant k = \operatorname{tg} \angle CFO + 0\,(l) = \frac{1}{\sqrt{\rho_F^2 - 1}} + 0\,(l). \tag{5}$$

Сопоставляя соотношения (4) и (5), получим выполнение неравенства (*) для $\nu = 3$; $\lambda = 1$. В соответствии с леммой это означает, что существует линейный оператор $A \in \{A_{k,\,l}\}$ такой, что $AS_3 \subset S_3$, но $AS_1 \overline{\subset} S_1$. Поскольку оператор A — сжимающий, то для эвклидова круга S_2 также выполняется соотношение $AS_2 \subset S_2$, что и завершает построение требуемого контрпримера.

Несколько модифицируя проведенное рассуждение, можно доказать принципиальную неулучшаемость интерполяционной теоремы Митягина в следующем смысле (мы приводим двумерную формулировку):

Теорема. *Для произвольной пары гладких выпуклых центрально симметричных G^2-инвариантных плоских фигур S_1 и S_2, $K_1 \subset \subset S_1 \subset S_2 \subset K_2$, $K_1 = \{\pm \rho \cos \varphi \pm \rho \sin \varphi \leqslant 1\}$, $K_2 = \{|\rho \cos \varphi|, |\rho \sin \varphi| \leqslant 1\}$, найдется G^2-инвариантная выпуклая центрально симметричная фигура S, $S_1 \subset S \subset S_2$ и аффинное преобразование A плоскости такое, что $AS_1 \subset S_1$, $AS_2 \subset S_2$, а $AS \overline{\subset} S$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. М., Изд-во иностр. лит., 1962. 235 с.

2. Митягин Б. С. Интерполяционная теорема для модулярных пространств. — «Мат. сб.», 1965, т. 66 (108), № 4, с. 473—482.

Поступила 20 февраля 1973 г.