УДК 513.88

А. Н. КОЧУБЕЙ

О РАСШИРЕНИЯХ J-СИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

1. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство; J — инволюция в H. Замкнутый в H линейный оператор A с плотной областью определения $D(A)$ называется J-симметрическим, если $A \subset JA^*J$, и J-самосопряженным, если $A = JA^*J$. Известно [1], что всякий J-симметрический оператор допускает J-самосопряженное расширение. Все такие расширения были описаны в работе [2]. Соответствующий результат в [2] формулируется весьма сложно, и его применение, например, к дифференциальным операторам с частными производными, затруднительно*

В настоящей работе в предположении, что множество $\Pi(A)$ точек регулярного типа J-симметрического оператора A непусто, все J-самосопряженные расширения оператора A описываются в терминах абстрактных граничных условий. Кроме того, исследованы спектры J-самосопряженных расширений оператора A. Отдельно рассмотрен частный случай, когда A — J-вещественный (т. е. $AJ = JA$) симметрический оператор. Полученные результаты в идейном отношении примыкают к работам [4, 5], посвященным симметрическим операторам.

2. Введем понятие пространства граничных значений J-симметрического оператора A.

---

* Это же можно сказать о найденном в [3] описании некоторого класса J-самосопряженных расширений.

Определение. *Четверка* $(\Omega, \hat{J}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, *где* Ω — *сепарабельное гильбертово пространство,* $\hat{J}$ — *инволюция в* Ω, Γ_1 *и* Γ_2 — *линейные отображения* $D(JA^*J)$ *в* Ω, *называется пространством граничных значений оператора* A, *если 1) для любых* $f, g \in D(JA^*J)$ $(g, A^*Jf)_H - (f, A^*Jg)_H = (\Gamma_1 f, \hat{J}\Gamma_2 g)_\Omega - (\Gamma_1 g, \hat{J}\Gamma_2 f)_\Omega$; *2) для любых* $F^1, F^2 \in \Omega$ *существует такой вектор* $f \in D(JA^*J)$, *что* $\Gamma_1 f = F^1$, $\Gamma_2 f = F^2$.

Легко видеть, что включение $f \in D(A)$ эквивалентно тому, что $\Gamma_1 f = \Gamma_2 f = 0$.

Пусть S — подпространство в $\Omega \oplus \Omega$. Обозначим $S^{[*]} = \{\{h, k\} \in \Omega \oplus \Omega \mid (g, \hat{J}h)_\Omega = (f, \hat{J}k)_\Omega$ для всех $\{f, g\} \in S\}$. Подпространство S называется $\hat{J}$ — самосопряженным, если $S = S^{[*]}$.

Теорема 1. *Каково бы ни было* $\hat{J}$*-самосопряженное подпространство* $S \subset \Omega \oplus \Omega$, *сужение оператора* JA^*J *на множество векторов* $f \in D(JA^*J)$, *удовлетворяющих условию* $\{\Gamma_1 f, \Gamma_2 f\} \in S$ *представляет собой* J*-самосопряженное расширение оператора* A. *Обратно, если* $\tilde{A}$ — *самосопряженное расширение оператора* A, *то* $S = \{\{\Gamma_1 f, \Gamma_2 f\} \mid f \in D(\tilde{A})\}$ — *самосопряженное подпространство в* $\Omega \oplus \Omega$.

Доказательство сводится к несложной модификации рассуждений из [4, 5]. Условие $\{\Gamma_1 f, \Gamma_2 f\} \in S$ можно записать как уравнение $Q_S\{\Gamma_1 f, \Gamma_2 f\} = \{\Gamma_1 f, \Gamma_2 f\}$, где Q_S — ортопроектор на S в $\Omega \oplus \Omega$. В связи с этим оказывается полезным такое предложение.

Предложение 1. *Пусть* $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$ — *ортопроектор в* $\Omega \oplus \Omega$. *Для того чтобы область значений* Q *была* $\hat{J}$*-самосопряженным подпространством в* $\Omega \oplus \Omega$, *необходимо и достаточно, чтобы*: 1) $E - q_{11} = \hat{J} q_{22} \hat{J}$ (E — тождественный оператор); 2) операторы q_{12}, q_{21} являлись $\hat{J}$-самосопряженными.

Доказательство. Пусть $S = Q(\Omega \oplus \Omega)$. Подпространство S является $\hat{J}$-самосопряженным тогда и только тогда, когда

$$S \oplus \tilde{J}S = \Omega \oplus \Omega, \tag{1}$$

где $\tilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{J} \\ -\hat{J} & 0 \end{pmatrix}$ (см. [6]). Учитывая антиунитарность $\tilde{J}$ (т. е. соотношение $(\tilde{J}\{f, g\}, \tilde{J}\{f', g'\})_{\Omega \oplus \Omega} = (\{f', g'\}, \{f, g\})_{\Omega + \Omega}$), нетрудно показать, что ортопроектор на $\tilde{J}S$ равен $-\tilde{J}Q\tilde{J}$. Тогда из (1) следует, что Q является проектором на $\hat{J}$-самосопряженное подпространство в том и только том случае, когда $Q - \tilde{J}Q\tilde{J} = E$. Приравнивая соответствующие элементы операторных матриц, приходим к 1) и 2). Предложение доказано.

3. Следующая теорема дает ответ на вопрос о существовании пространства граничных значений.

Теорема 2. *Для любого J-симметрического оператора A с непустым множеством $\Pi(A)$ точек регулярного типа существует некоторое пространство граничных значений.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \Pi(A)$. Поскольку оператор $A - \lambda E$ J-симметричен и его пространство граничных значений (коль скоро оно существует) является также пространством граничных значений оператора A, достаточно рассмотреть случай $\lambda = 0$. По теореме Н. А. Жихаря [3], существует J-самосопряженное расширение $\tilde{A} \supset A$, имеющее ограниченный обратный. При этом

$$D(JA^*J) = D(A) \dot{+} \tilde{A}^{-1}N_0 \dot{+} JN_0, \tag{2}$$

где $N_0 = \{f \in H \mid A^*f = 0\}$. Пусть P_1, P_2, P_3 — проекторы на первое, второе и третье слагаемое в (2) параллельно сумме двух остальных слагаемых. Тогда при $f \in D(JA^*J)$

$$A^*Jf = JAP_1f + J\tilde{A}P_2f. \tag{3}$$

Из J-симметрии A и $\tilde{A}$ теперь следует, что

$$(g, A^*Jf)_H - (f, A^*Jg)_H = (P_3g, J\tilde{A}P_2f)_H - (P_3f, J\tilde{A}P_2g)_H \quad (f, g \in D(JA^*J)). \tag{4}$$

Пусть $\hat{J}$ — произвольная инволюция в N_0. Тогда $U = \hat{J}\tilde{J}$ — изометрия JN_0 на N_0, причем $UJ|_{N_0} = \hat{J}$. Равенство (4) можно записать в виде $(g, A^*Jf)_H - (f, A^*Jg)_H = (-UP_3f, \hat{J}\tilde{A}P_2g)_H - (-UP_3g, \hat{J}\tilde{A}P_2f)_H$. Положим $\Omega = N_0$ (со скалярным произведением, индуцированным из H, $\Gamma_1 = -UP_3$, $\Gamma_2 = \tilde{A}P_2$). Тогда $(\Omega, \hat{J}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — пространство граничных значений оператора A, так как если $F^1, F^2 \in \Omega$, то, полагая $f = \tilde{A}^{-1}F^2 - U^{-1}F^1$, получим $\Gamma_1 f = F^1$, $\Gamma_2 f = F^2$. Теорема доказана.

Пусть B — симметрический J — вещественный оператор; C — ограниченный J-самосопряженный оператор. Предположим, что существует пространство граничных значений $(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2)$ симметрического оператора B (см. [5]), такое, что для некоторой инволюции $\hat{J}$ в Ω имеет место соотношение $\Gamma_i J = \hat{J}\Gamma_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда, учитывая, что $B^*J = JB^*$ (см. [7]), нетрудно убедиться, что $(\Omega, \hat{J}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — пространство граничных значений J-симметрического оператора $A = B + C$. Это замечание в сочетании с теоремой 1 и результатами М. И. Вишика [8] дает возможность описать в терминах граничных условий все J-самосопряженные расширения в $L_2(G)$ $(G \subset R^n$ — ограниченная область) минимального оператора, построенного, по выражению Шредингера, с ограниченным измеримым комплексным потенциалом.

4. Для изучения спектров J-самосопряженных расширений нам потребуются некоторые предварительные рассмотрения.

Найденное при доказательстве теоремы 2 пространство граничных значений оператора обозначим $(\Omega^0, \hat{J}^0, \Gamma_1^0, \Gamma_2^0)$: $\Omega^0 = N_0$, $\hat{J}^0$ — произвольная инволюция в N_0, $\Gamma_1^0 = -UP_3$, $\Gamma_2^0 = \tilde{A}P_2$, где $U = \hat{J}^0 J$ — изометрия JN_0 на N_0, P_i $(i = 1, 2, 3)$ — косые проекторы на слагаемые в (2).

Пусть $(\Omega, \hat{J}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — произвольное пространство граничных значений оператора A. Определим оператор $X: \Omega^0 \oplus \Omega_0 \to \Omega \oplus \Omega$ следующим образом: если $F = \{F^1, F^2\} \in \Omega^0 \oplus \Omega^0$ выберем $f \in D(JA^*J)$ так, чтобы $\Gamma_1^0 f = F^1$, $\Gamma_2^0 f = F^2$ и положим $XF = \{\Gamma_1 f, \Gamma_2 f\}$. Очевидно, X определен корректно, линеен и биективен.

Лемма. *Оператор X ограничен и имеет ограниченный обратный.*

Доказательство. Достаточно показать, что X допускает замыкание. Пусть $y_n \in D(JA^*J)$, $\Gamma_1^0 y_n \to 0$, $\Gamma_2^0 y_n \to 0$, $\Gamma_1 y_n \to F^1$, $\Gamma_2 y_n \to$ $\to F^2$. В силу изометричности U и ограниченности $\tilde{A}^{-1}$ имеем $P_2 y_n \to 0$, $P_3 y_n \to 0$. Из (3) и определения пространства граничных значений получим для всех $z \in D(JA^*J)$ $[(z, JAP_1 y_n)_H - (P_1 y_n, A^*Jz)_H] + (z, \tilde{A}P_2 y_n)_H - (P_2 y_n + P_3 y_n, A^*Jz)_H = (\Gamma_1 y_n, \hat{J}\Gamma_2 z)_\Omega -$ $- (\Gamma_1 z, \hat{J}\Gamma_2 y_n)_\Omega$. Выражение в квадратных скобках равно нулю при всех n, а остальные слагаемые в левой части стремятся к нулю при $n \to \infty$. После перехода к пределу убеждаемся, учитывая произвольность z, что $F^1 = F^2 = 0$. Лемма доказана.

Пусть $N_\lambda = H \ominus (A - \lambda E) D(A)$ $(\lambda \in \Pi(A))$. Рассмотрим сужение A_λ оператора JA^*J на множество $D(A) \dotplus JN_\lambda$. Как показано в [9], A_λ — J-самосопряженное расширение оператора A. Пусть $(\Omega, \hat{J}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — произвольное пространство граничных значений оператора A. Обозначим $S_\lambda = \{\{\Gamma_1 f, \Gamma_2 f\} \mid f \in D(A_\lambda)\}$. Пусть A_S — J-самосопряженное расширение оператора A, $S = \{\{\Gamma_1 f, \Gamma_2 f\{ \mid f \in D(A_S)\}$.

Далее, через nul $(.\,,.)$ и nul$'$ $(.\,,.)$ обозначается соответственно степень вырождения и аппроксимативная степень вырождения пары подпространств (см. [10, гл. 4, § 4]).

Теорема 3. 1. *Для того чтобы число* $\lambda \in \Pi(A)$ *было собственным значением кратности* $\nu \leqslant \infty$ *оператора* A_S, *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathrm{nul}(S, S_\lambda) = \nu$. *2. Для того чтобы число* $\lambda \in \Pi(A)$ *принадлежало существенному спектру* Σ_e *(в смысле [10]) оператора* A_S, *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathrm{nul}'(S, S_\lambda) = \infty$.

Доказательство. 1. Достаточно заметить, что, поскольку $\lambda \in \Pi(A)$, соответствие $y \to \{\Gamma_1 y, \Gamma_2 y\}$ между собственным подпространством A_S и подпространством $S \cap S_\lambda$ взаимно-однозначно. 2. Как и в доказательстве теоремы 2, достаточно рассмотреть случай $\lambda = 0$. Пусть $0 \in \Sigma_e(A_S)$. Тогда [10, с. 294] существует последовательность $\{y_n\}_1^\infty \subset D(A_S)$, $\|y_n\| = 1$, не содержащая сходящейся подпоследовательности, и такая, что $A_S y_n \to 0$. Пусть $F_n' = \{\Gamma_1 y_n, \Gamma_2 y_n\}$, $F_n = \|F_n'\|^{-1}_{\Omega \oplus \Omega} F_n'$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Покажем, что $\{F_n\}$ не содержит сходящейся подпоследовательности. Для этого достаточно показать, что $\{F_n'\}$ не содержит сходящейся подпоследовательности и сильно ограничена в $\Omega \oplus \Omega$.

Имеем $F_n' = \{\Gamma_1 y_n, \Gamma_2 y_n\} = X\left\{\Gamma_1^0 y_n, \Gamma_2^0 y_n\right\}$, т. е. $\{-UP_3 y_n, \tilde{A}P_2 y_n\} = X^{-1}F_n'$. Если $\{F_{n_k}'\}$ — сходящаяся подпоследовательность, то в силу леммы сходятся последовательности $\{P_3 y_{n_k}\}$ и $\{P_2 y_{n_k}\}$. С другой стороны, $A_S y_{n_k} = AP_1 y_{n_k} + \tilde{A}P_2 y_{n_k}$, где $A_S y_{n_k} \to 0$, а $\{\tilde{A}P_2 y_{n_k}\}$ также сходится. Тогда $\{AP_1 y_{n_k}\}$ сходится и, поскольку $0 \in \Pi(A)$, $\{P_1 y_{n_k}\}$ и, следовательно, $\{y_{n_k}\}$ сходится, что невозможно.

Для доказательства ограниченности последовательности $\{\|F_n'\|_{\Omega \oplus \Omega}\}$ достаточно согласно лемме доказать ограниченность последовательностей $\{\|UP_3 y_n\|_H\}$ и $\{\|\tilde{A}P_2 y_n\|_H\}$.

Первая из них ограничена, так как $\|y_n\|_H = 1$, и оператор P_3 ограничен в пространстве $D(JA^*J)$ (с нормой графика). Далее, слагаемые в правой части равенства $A_S y_n = AP_1 y_n + \tilde{A}P_2 y_n$ ортогональны в H: $\tilde{A}P_2 y_n \in N_0 \perp AD(A)$. Поэтому

$$\|\tilde{A}P_2 y_n\|_H \leqslant \|A_S y_n\|_H \to 0. \tag{5}$$

В частности, $\|F_n\|_{\Omega + \Omega} \leqslant C$.

Пусть Q — ортопроектор на S_0 в пространстве $\Omega \oplus \Omega$. Покажем, что $\|F_n - QF_n\|_{\Omega + \Omega} \to 0$ (согласно [10, с. 286] это эквивалентно равенству $nul'(S, S_0) = \infty$). До сих пор расширение $\tilde{A}$, имеющее ограниченный обратный, было произвольным. Пусть теперь $\tilde{A}$ — сужение JA^*J на множество $\{y \in D(JA^*J) \,|\, \{\Gamma_1 y,$

$\Gamma_2 y\} \perp S_0\}$. Из теоремы 1 и предложения 1 следует, что оператор $\tilde{A}$ J-самосопряжен. Очевидно, $\operatorname{Ker}\tilde{A}=\{0\}$. Для любого $h\in H$ вектор $x=f+g$, где $JA^*Jf=h$, $\{\Gamma_1 g, \Gamma_2 g\}=-Q\{\Gamma_1 f, \Gamma_2 f\}$, принадлежит $D(\tilde{A})$ и $\tilde{A}x=h$. Таким образом, оператор $\tilde{A}$ имеет ограниченный обратный. Поскольку F_n' не содержит сходящейся подпоследовательности, имеем $\|F_n'\|\geqslant C_1>0$, так что достаточно доказать сильное стремление к нулю $(E-Q)F_n'$. Но

$$(E-Q)F_n'=(E-Q)\{\Gamma_1 y_n, \Gamma_2 y_n\}=(E-Q)X\{-UP_3 y_n,$$

$$\tilde{A}P_2 y_n\}=(E-Q)X\{0, \tilde{A}P_2 y_n\}+(E-Q)X\{-UP_3 y_n, 0\}.$$

Легко видеть, что $X\{-UP_3 y_n, 0\}=\{\Gamma_1 P_3 y_n, \Gamma_2 P_3 y_n\}\in S_0$, т. е. $(E-Q)X\{-UP_3 y_n, 0\}=0$. С другой стороны, $X\{0, \tilde{A}P_2 y_n\}=$ $=\{\Gamma_1 P_2 y_n, \Gamma_2 P_2 y_n\}\perp S_0$, т. е. $(E-\tilde{Q})F_n'=X\{0, \tilde{A}P_2 y_n\}\to 0$ в силу (5).

Обратное утверждение доказывается с помощью тех же рассуждений, проводимых в обратном порядке. Теорема доказана.

Следующее предложение доказывается так же, как теорема об инвариантности существенного спектра замкнутого оператора при вполне непрерывных возмущениях (см. [11]).

Предложение 2. *Пусть M_0, M_1, M_2 — подпространства гильбертова пространства, Q_1 и Q_2 — ортопроекторы на M_1 и M_2. Если* $\operatorname{nul}'(M_0, M_1)=\infty$, *а оператор Q_1-Q_2 вполне непрерывен, то* $\operatorname{nul}'(M_0, M_2)=\infty$.

Следствие. *Пусть S_1, S_2 — $\hat{J}$-самосопряженные подпространства в $\Omega\oplus\Omega$, Q_1 и Q_2 — ортопроекторы на S_1 и S_2. Если оператор Q_1-Q_2 вполне непрерывен то существенные спектры расширений A_{S_1} и A_{S_2} совпадают.*

5. Пусть A — симметрический J-вещественный оператор, $(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — его пространство граничных значений [5]. Как показано в [5], общий вид максимального диссипативного расширения оператора A дается как сужение A^* на множество всех векторов $f\in D(A^*)$, для которых

$$(K-E)\Gamma_1 f+i(K+E)\Gamma_2 f=0, \tag{6}$$

где K — сжатие в Ω. При этом расширение A_K, соответствующее (6), является самосопряженным тогда и только тогда, когда K унитарен. Пусть в Ω существует инволюция $\hat{J}$, такая, что $(\Omega, \hat{J}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — пространство граничных значений оператора A, рассматриваемого как J-симметрический[1]. Нетрудно проверить,

---

[1] Например, $\hat{J}$ может быть такова, что $\Gamma_i J=\hat{J}\Gamma_i$ $(i=1, 2)$. Такая инволюция, естественно, возникает при рассмотрении дифференциальных операторов.

что подпространство в $\Omega \oplus \Omega$, выделяемое равенством (6), является $\hat{J}$-самосопряженным в том и только в том случае, когда $\hat{J}$-самосопряжен оператор K. Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Расширение A_K является J-самосопряженным тогда и только тогда, когда оператор K $\hat{J}$ самосопряжен.*

В частности, мы получаем описание всех J-вещественных самосопряженных расширений оператора A. Существование таких расширений было доказано в [7].

Таким образом, комбинируя рассуждения, использованные в доказательстве теоремы 2 данной работы и теоремы 3 статьи [5], можно доказать существование для любого J-вещественного симметрического оператора A такого пространства граничных значений $(\Omega, \hat{J}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, что $(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2)$ является пространством граничных значений A как симметрического оператора (это требуется для применения теоремы 4).

Список литературы: 1. *Galindo A.* On the existence of J-selfadjoint extensions of J-symmetric operators with abjoint.— Comm. Pure Appl. Math., 1962, vol. 15. № 4, p. 423—425. 2. *Райх Л. М., Цекановский Э. Р.* Биинволютивно самосопряженные бирасширения J-эрмитовых операторов.— В кн.: Теория функций, функц. анализ и их приложения. Вып. 23. Харьков, 1975, с. 79—93. 3. *Жихарь Н. А.* К теории расширений J-симметрических операторов.— «Укр. матем. журн.», 1959, т. 11, № 4, с. 352—365. 4. *Рофе-Бекетов Ф. С.* О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций.— В кн.: Теория функций, функц. анализ и их приложения. Вып. 8. Харьков, 1969, с. 3—24. 5. *Кочубей А. Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений.— «Мат. заметки», 1975, т. 17, № 1, с. 41—48. 6. *Макарова А. Д.* К теории расширений J-симметрических операторов с неплотной областью определения.— В кн.: Функц. анализ. Вып. 4. Ульяновск, 1975, с. 70—74. 7. *Stone M. H.* Linear transformations in Hilbert space.— New Jork, AMS. 1932, p. 622. 8. *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений. — «Труды Моск. мат. о-ва», 1952, т. 1, с. 187—246. 9. *Ли В. П.* К теории J-симметрических операторов.— В кн.: Функц. анализ. Вып. 3. Ульяновск, 1974, с. 84—91. 10. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., «Мир», 1972. 740 с. 11. *Глазман И. М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов.— М., Физматгиз, 1963. 339 с.

Поступила 4 января 1976 г.