11 1970

ОБ ИДЕАЛАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ

В. Д. Головин

В настоящей работе исследуется связь, существующая между идеалами го и того же ростка аналитического множества соответственно в кольце ков голоморфных функций и в кольце ростков аналитических функций.

1. Теорема о базисе

Пусть E — комплексное отделимое локально выпуклое пространство, $O(U;\ E)$ — векторное пространство всех голоморфных функций том множестве U пространства C^n со значениями из E, наделенное ей компактной сходимости. Обозначим через $O_n(E)$ векторное ство ростков голоморфных функций в начале координат простран- C^n со значениями из E, наделенное сильнейшей из локально выпук- топологий, для которых непрерывны канонические отображения

$$O(U;\ E) \to O_n(E),$$

U — произвольная открытая окрестность начала координат в C^n.

Если E — топологическое кольцо, то и пространство $O_n(E)$ с естест- образом определенной операцией умножения представляет собой логическое кольцо. В частности, топологическим кольцом является странство $O_n = O_n(C)$ ростков числовых голоморфных функций.

По существу А. Картану [1] принадлежит следующее утверждение, рое мы будем называть теоремой о базисе:

Для любых элементов $\varphi_i \in O_n$ $(i = 1, \ldots, s)$ существуют такие не- рывные линейные отображения

$$\pi_i : O_n \to O_n \quad (i = 1, \ldots, s),$$

что

$$f = \pi_1(f)\varphi_1 + \cdots + \pi_s(f)\varphi_s$$

каждом f из идеала $(\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$, порожденного элементами $\varphi_1, \ldots,$ кольце O_n.

Если π — непрерывное линейное отображение пространства E в себя принадлежит пространству $O_m(E)$, то композиция $\pi \cdot f$ принадлежит е $O_m(E)$. Из теоремы о базисе следует, что каждый элемент $f \in O_m((\varphi_1, \ldots, \varphi_s))$ представим в виде

$$f = (\pi_1 \cdot f)\varphi_1 + \cdots + (\pi_s \cdot f)\varphi_s,$$

ем

$$\pi_i \cdot f \in O_m(O_n) \quad (i = 1, \ldots, s).$$

В частности, для любого идеала I кольца O_n идеалы $O_m(I)$ и $O_m(O_n)I$ в кольце $O_m(O_n)$ совпадают.

2. Идеал произведения

Рассматривая пространство C^n при $n = n_1 + \cdots + n_k$ как произведение $C^{n_1} \times \cdots \times C^{n_k}$, мы можем при каждом $j = 1, \ldots, k$ с помощью проекции $C^n \to C^{n_j}$ отождествить кольцо O_{n_j} с подкольцом в O_n.

Пусть $\mathfrak{M}_j$ при каждом $j = 1, \ldots, k$ — росток аналитического множества в начале координат пространства C^{n_j}, и M_j — его представитель в некоторой открытой окрестности U_j начала координат. Тогда произведение $M = M_1 \times \cdots \times M_k$ является аналитическим множеством в окрестности $U_1 \times \cdots U_k$ начала координат пространства C^n. Так как росток $\mathfrak{M}$ аналитического множества M не зависит от выбора представителей $M_1, \ldots, M_k$, то мы будем писать

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \times \cdots \times \mathfrak{M}_k$$

и называть $\mathfrak{M}$ *произведением ростков* $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_k$.

Теорема 1. *Пусть I_j при каждом $j = 1, \ldots, k$ — идеал в кольце O_{n_j} ростка аналитического множества $\mathfrak{M}_j$ в начале координат пространства C^{n_j}. Тогда идеал в кольце O_n*

$$O_n I_1 + \cdots + O_n I_k$$

является идеалом произведения $\mathfrak{M}_1 \times \cdots \times \mathfrak{M}_k$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение при $k = 2$; доказательство в общем случае сводится к индукции по k.

Итак, пусть $n = n_1 + n_2$ и $C^n = C^{n_1} \times C^{n_2}$. Обозначим через I идеал в кольце O_n произведения ростков $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$. Каждому элементу $f \in I$, рассматриваемому как элемент кольца $O_{n_2}(O_{n_1})$, сопоставим элемент идеала $O_{n_2}(I_1)$

$$f_1 = (\pi_{11} \cdot f)\,\varphi_1 + \cdots + (\pi_{1s} \cdot f)\,\varphi_s,$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ — образующие идеала I_1 в O_{n_1}, а $\pi_{11}, \ldots, \pi_{1s}$ — непрерывные линейные отображения кольца O_{n_1} в себя, определяемые этими образующими в силу теоремы о базисе.

Рассмотрим разность $f_2 = f - f_1$ как элемент кольца $O_{n_1}(O_{n_2})$. Тогда f_2 принадлежит идеалу $O_{n_1}(I_2)$ и по теореме о базисе

$$f_2 = (\pi_{21} \cdot f_2)\,\psi_1 + \cdots + (\pi_{2t} \cdot f_2)\,\psi_t,$$

где $\psi_1, \ldots, \psi_t$ — образующие идеала I_2 в O_{n_2}, а $\pi_{21}, \ldots, \pi_{2t}$ — непрерывные линейные отображения кольца O_{n_2} в себя. Теорема доказана.

3. Неприводимые ростки

Пусть A_n — кольцо ростков комплексных аналитических функций в начале координат пространства R^{2n}. Отождествляя пространство R^{2n} с C^n, можно рассматривать A_n как кольцо сходящихся степенных рядов $C\{z_1, \ldots, z_n; \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n\}$. С другой стороны, вложение $z \to (z, \bar{z})$ пространства C^n в C^{2n} определяет отображение

$$\theta : O_{2n} \to A_n,$$

являющееся изоморфизмом колец. Имеет место следующая лемма.

Лемма. *Пусть $\mathfrak{M}$ — неприводимый росток аналитического множества в начале координат пространства C^n. Элемент $f \in O_{2n}$ равен нулю*

… $\mathfrak{M}\times\overline{\mathfrak{M}}$ *в том и только в том случае, когда элемент* $\theta(f)\in \boldsymbol{A}_n$ *равен на* $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Пусть M — неприводимое аналитическое множество в окрестности U начала координат пространства C^n, ростком которого является $\mathfrak{M}$. Окрестность U выберем настолько малой, чтобы в ней существовала аналитическая функция $\varphi(z, \bar{z})$ с ростком $\theta(f)$ в начале координат, равная нулю на M. Для произвольной регулярной точки $z_0\in M$ существует достаточно малая окрестность $V\subset M$, которую при подходящей замене координат можно считать полицилиндром в пространстве переменных $z_1, \ldots, z_k$ при некотором $k\leqslant n$. Тогда

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_k}\varphi(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}_1^{\alpha_1}\cdots\partial \bar{z}_k^{\alpha_k}}=0$$

в V при $\alpha_1, \ldots, \alpha_k\geqslant 0$ и, следовательно, в силу аналитичности, $\varphi(z, \bar{z}_0)\equiv 0$ $(z\in V)$. Ввиду леммы Ритта [2] $\varphi(z, \bar{z}_0)=0$ при каждом $z\in M$, а так как здесь z_0 — произвольная регулярная точка множества M, то по непрерывности $\varphi(z, w)=0$ при любых $z\in M$ и $w\in\overline{M}$. Лемма доказана.

Замечание. Если росток $\mathfrak{M}$ приводим, то утверждение леммы, вообще говоря, не имеет места. Действительно, пусть M — аналитическое множество в C^2, определяемое уравнением $z_1z_2=0$. Тогда функция $f(z, \bar{z})=z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2$ равна нулю на M, а функция $f(z, w)=z_1w_2+w_1z_2$ не равна тождественно нулю на произведении $M\times\overline{M}$.

Следующая теорема дает положительный ответ на один вопрос, поставленный Б. Мальгранжем [3, стр. 12].

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — неприводимый росток аналитического множества в начале координат пространства C^n, и $\boldsymbol{I}$ — его идеал в кольце $\boldsymbol{O}_n$. Тогда*

$$\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}_n\overline{\boldsymbol{I}}$$

есть идеал ростка $\mathfrak{M}$ в кольце $\boldsymbol{A}_n$.

Доказательство. Пусть элемент $f\in\boldsymbol{A}_n$ равен нулю на $\mathfrak{M}$; тогда в силу леммы $f=\theta(g)$, где g — элемент кольца $\boldsymbol{O}_{2n}$, равный нулю на $\mathfrak{M}\times\overline{\mathfrak{M}}$. Так как $\overline{\mathfrak{M}}$ также является ростком аналитического множества в начале координат пространства C^n, то утверждение следует из теоремы 1.

Обозначим через $\boldsymbol{E}_n$ кольцо ростков комплексных бесконечно дифференцируемых функций в начале координат пространства $\boldsymbol{R}^{2n}$.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{M}$ — росток локально неприводимого аналитического множества в начале координат пространства C^n, и $\boldsymbol{I}$ — его идеал в кольце $\boldsymbol{O}_n$. Тогда*

$$\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}_n\overline{\boldsymbol{I}}$$

есть идеал ростка $\mathfrak{M}$ в кольце $\boldsymbol{E}_n$.

Доказательство. Пусть M — локально неприводимое аналитическое множество в открытой окрестности U начала координат пространства C^n. В силу когерентности пучка идеалов множества M (см. например, [2]) окрестность U можно выбрать настолько малой, чтобы при каждом $z\in U$ (голоморфный) идеал $\boldsymbol{I}_z$ множества M в точке z порождался голоморфными функциями $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$, определенными в U. Обозначим через $\hat{f}$ формальный ряд Тейлора функции f, определенной и бесконечно дифференцируемой в U. Если $f=0$ на M, то по теореме 2

$$\hat{f}=\alpha_1\hat{\varphi}_1+\cdots+\alpha_s\hat{\varphi}_s+\beta_1\hat{\bar{\varphi}}_1+\cdots+\beta_s\hat{\bar{\varphi}}_s$$

(см. [3]), где $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$; $\beta_1, \ldots, \beta_s$ — формальные степенные ряды. Следовательно,

$$f = g_1\varphi_2 + g_s\varphi_s + h_1\bar{\varphi}_1 + \cdots + h_s\bar{\varphi}_s$$

в U [4], где $g_1, \ldots, g_s$; $h_1, \ldots, h_s$ — бесконечно дифференцируемые функции.

4. Ростки с двумя компонентами

Пусть $\mathfrak{M}_i$ (соответственно $\mathfrak{N}_i$) при каждом $i = 1, 2$ — росток аналитического множества в начале координат пространства C^m (соответственно C^n), и I_i (соответственно J_i) — его идеал в кольце O_m (соответственно O_n).

Теорема 3. *Идеал ростка*

$$(\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{N}_1) \cup (\mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{N}_2)$$

в кольце O_{m+n} порождается суммой

$$I_1 \cap I_2 + I_1 J_2 + J_1 I_2 + J_1 \cap J_2.$$

Доказательство. Пусть φ_{ij} (соответственно ψ_{ij}) при каждом $i = 1, 2$ — образующие идеала I_i (соответственно J_i) в кольце O_m (соответственно O_n). Если элемент f кольца O_{m+n} равен нулю на

$$(\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{N}_1) \cup (\mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{N}_2),$$

то согласно теореме 1 он представим в виде

$$f = \sum (\alpha_{1j}\varphi_{1j} + \beta_{1j}\psi_{1j}) = \sum (\alpha_{2j}\varphi_{2j} + \beta_{2j}\psi_{2j}),$$

где α_{ij} и β_{ij} принадлежат кольцу O_{m+n}. По теореме о базисе существуют такие непрерывные линейные отображения π_{ij} кольца O_m в себя, что каждый элемент φ суммы $I_1 + I_2$ представим в виде

$$\varphi = \pi_{11}(\varphi)\varphi_{11} + \cdots + \pi_{21}(\varphi)\varphi_{21} + \ldots$$

Следовательно, отождествляя кольцо O_{m+n} с $O_n(O_m)$, получим

$$\sum_j (\alpha_{1j}\varphi_{1j} - \alpha_{2j}\varphi_{2j}) = \sum_{i,j,k} \{(\pi_{ik}\cdot\beta_{2j})\varphi_{ik}\psi_{2j} - (\pi_{ik}\cdot\beta_{1j})\varphi_{ik}\psi_{1j}\},$$

т. е. разность

$$\sum_j \alpha_{1j}\varphi_{1j} - \sum_{j,k} \{\pi_{1k}\cdot\beta_{2j})\varphi_{1k}\psi_{2j} - (\pi_{1k}\cdot\beta_{1j})\varphi_{1k}\psi_{1j} =$$

$$= \sum_j \alpha_{2j}\varphi_{2j} + \sum_{j,k} \{(\pi_{2k}\cdot\beta_{2j})\varphi_{2k}\psi_{2j} - (\pi_{2k}\cdot\beta_{1j})\varphi_{2k}\psi_{1j}$$

принадлежит идеалу $O_{m+n}I_1 \cap I_2$. С другой стороны, разность

$$\sum_j \beta_{1j}\psi_{1j} - \sum_{i,j,k} (\pi_{ik}\cdot\beta_{1j})\varphi_{ik}\psi_{1j} = \sum_j \beta_{2j}\psi_{2j} - \sum_{i,j,k} (\pi_{jk}\cdot\beta_{2j})\varphi_{ik}\psi_{2j}$$

принадлежит идеалу $O_{m+n}J_1 \cap J_2$. Следовательно, разность

$$f - \sum_{j,k} \{(\pi_{1k}\cdot\beta_{2j})\varphi_{1k}\psi_{2j} + (\pi_{2k}\cdot\beta_{1j})\varphi_{2k}\psi_{1j}\}$$

принадлежит идеалу

$$O_{m+n}(I_1 \cap I_2 + J_1 \cap J_2).$$

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть росток $\mathfrak{M}$ аналитического множества в начале координат пространства C^n является объединением неприводимых ростков $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$. Тогда идеал ростка $\mathfrak{M}$ в кольце A_n порождается суммой*

$$I + I_1\bar{I}_2 + \bar{I}_1 I_2 + \bar{I},$$

где I, I_1, I_2 — идеалы в кольце O_n соответственно ростков $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$.

Доказательство. Если элемент $f \in A_n$ равен нулю на $\mathfrak{M}$, то согласно лемме элемент $g = \theta^{-1}(f)$ кольца O_{2n} равен нулю на объединении

$$(\mathfrak{M}_1 \times \bar{\mathfrak{M}}_1) \cup (\mathfrak{M}_2 \times \bar{\mathfrak{M}}_2).$$

Тем самым утверждение следует из теоремы 3.

5. Контрпример к общему случаю

Пусть $\mathfrak{M}_i$ (соответственно $\mathfrak{N}_i$) при каждом $i = 1, \ldots, k$ — росток аналитического множества в начале координат пространства C^m (соответственно C^n) и I_i (соответственно J_i) — его идеал в кольце O_m (соответственно O_n). Тогда идеал I в кольце O_{m+n} ростка

$$(\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{N}_1) \cup \cdots \cup (\mathfrak{M}_k \times \mathfrak{N}_k)$$

по теореме 1 совпадает с пересечением

$$(O_{m+n}I_1 + O_{m+n}J_1) \cap \cdots \cap (O_{m+n}I_k + O_{m+n}J_k).$$

При $k > 2$, однако, нельзя утверждать, что идеал I порождается суммой

$$I_{1\ldots k} + \sum_i I_{1\ldots\hat{i}\ldots k}J_1 + \sum_{i<j} I_{1\ldots\hat{i}\ldots\hat{j}\ldots k}J_{ij} + \cdots + J_{1\ldots k},$$

где

$$I_{i_1\ldots i_s} = I_{i_1} \cap \cdots \cap I_{i_s}; \quad J_{i_1\ldots i_s} = J_{i_1} \cap \cdots \cap J_{i_s}.$$

Действительно, пусть $m = n = 2$, $k = 3$ и пусть

$$I_1 = (z_1), \quad I_2 = (z_1 + z_2), \quad I_3 = (z_1 - z_2),$$
$$J_1 = (w_1), \quad J_2 = (w_1 - w_2), \quad J_3 = (w_1 + w_2).$$

Тогда элемент

$$f = w_2 z_1 + z_2 w_1 = z_1(w_2 - w_1) + w_1(z_1 + z_2) = \\ = w_1(z_2 - z_1) + z_1(w_1 + w_2)$$

принадлежит пересечению

$$(O_4 I_1 + O_4 J_1) \cap (O_4 I_2 + O_4 J_2) \cap (O_4 I_3 + O_4 J_3).$$

С другой стороны, $I_{12} = (z_1^2 + z_1 z_2)$, $I_{13} = (z_1^2 - z_1 z_2)$, $I_{23} = (z_1^2 - z_2^2)$, $I_{123} = (z_1^3 - z_1 z_2^2)$ и т. д., т. е. каждый элемент в сумме

$$I_{123} + I_{12}J_3 + \cdots + J_{123}$$

имеет степень $\geqslant 3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Cartan. Ideaux de fonctions analytiques de n variables complexes, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3), 61 (1944), 149—197.

2. М. Эрве. Функции многих комплексных переменных, М., «Мир», 1965.

3. B. Malgrange. Sur les fonctions differentiables et les ensembles analytiques, Séminaire Lelong (Analyse), 3e année, 1961, 7/01—7/15.

4. B. Malgrange. Division des distributions, IV, Séminaire Schwartz, 4e année, 1959—1960, 25/01—25/05.

5. Б. Мальгранж. Идеалы дифференцируемых функций. «Мир», М. 1968.

Поступила 10 февраля 1969 г.