

УДК 530.1(075.8)

ДВИЖЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАРЯДОВ В ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КОНДЕНСАТОРА И ЛИНЕЙНОГО ТОКА, ТЕКУЩЕГО ВДОЛЬ ЕГО ОСИ

Ю.А. Кирочкин¹, А.Ю. Кирочкин²

¹Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, 61004, Харьков, пл. Свободы, 4

²Университет гражданской защиты Украины, 61023, Харьков, ул. Чернышевского, 94

Поступила в редакцию 12 ноября 2007 г.

Получены траектории движения релятивистских заряженных частиц в постоянных радиальном электрическом и азимутальном магнитном полях. Показано, что при определенных условиях движение положительных и отрицательных зарядов может происходить по одинаковым замкнутым траекториям. Найдено условие применимости нерелятивистских траекторий. Обсуждается возможность образования вихревых колец положительных и отрицательных зарядов и их слияние в одно вихревое кольцо.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: электромагнитное поле, заряд, движение, траектория, вихрь

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию движения релятивистских положительных и отрицательных зарядов в аксиально симметричных постоянных радиальном электрическом и азимутальном магнитном полях. Электрическое поле обусловлено разностью потенциалов между коаксиальными цилиндрическими обкладками конденсатора, магнитное – прямолинейным током, текущим вдоль его оси. Предполагалось, что длина конденсатора велика по сравнению с его диаметром. Это условие позволило пренебречь краевыми эффектами в пространстве взаимодействия зарядов с полями и считать величины напряженностей электрического и магнитного полей обратно пропорциональными расстоянию r от оси цилиндров. Подобные исследования для нерелятивистских положительных зарядов (ионов) изложены в работе [1].

Целью исследований, представленных в настоящей работе, является получение траекторий релятивистских зарядов, определение условий перехода к нерелятивистским траекториям движения, изучение замкнутых траекторий, образующих тороидальные поверхности – два устойчивых удаленных друг от друга в установке противоположно заряженных вихревых кольца. Предполагается возможность их слияния после выключения полей в одно кольцо с гораздо меньшим или равным нулю полным зарядом.

Результаты этих исследований могут быть использованы при изучении движения зарядов в лабораторных установках, в линейных и шаровых молниях [1], а также в лекциях по электродинамике для студентов университетов.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Исследование траекторий зарядов ведется в цилиндрической системе координат r, α, z ($\vec{e}_r, \vec{e}_\alpha, \vec{e}_z$ – орты) с осью z , направленной вдоль оси цилиндрического конденсатора. Релятивистская частица, масса которой m и заряд $q > 0$, в момент времени $t = 0$ появляется из источника в точке с координатами

$$r = a, \alpha = \alpha_0, z = 0 \quad (1)$$

с начальным импульсом

$$\vec{p}_0 = \vec{e}_r \delta p_r + \vec{e}_\alpha \delta p_\alpha + \vec{e}_z (p_{0z} + \delta p_z), \quad p_{0z} > 0, \quad (2)$$

где $\delta p_r, \delta p_\alpha$ и δp_z – флуктуации начального импульса заряда при вылете его из источника, величины которых малы по сравнению с p_{0z} .

Напряженности полей в вакуумной камере между концентрическими обкладками конденсатора радиусов R_A и R_B представим в виде

$$\vec{E} = \vec{e}_r E_r, \quad E_r = -\psi/r, \quad \psi > 0. \quad (3)$$

Потенциал электростатического поля между цилиндрами определяется следующими выражениями

$$\varphi(r) = \psi \ln(r/R_A) + \varphi_A, \quad \varphi_A = \varphi(R_A), \quad \varphi_B = \varphi(R_B) = \psi \ln(R_B/R_A) + \varphi_A, \quad \psi = (\varphi_B - \varphi_A)/\ln(R_B/R_A). \quad (4)$$

$$\vec{H} = \vec{e}_\alpha H_\alpha, \quad H_\alpha = -\chi/r, \quad \chi > 0. \quad (5)$$

Для поля прямолинейного тока, сила которого J , напряженность магнитного поля, как известно, равна

$$H_\alpha = 2J/(cr) \quad \text{и, следовательно,} \quad \chi = -2J/c. \quad (6)$$

ТРАЕКТОРИИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАРЯДОВ

Интегрируя z -составляющую уравнения движения заряда

$$dp_z/dt = F_z, \vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{H})/c - \text{сила Лоренца} \quad (7)$$

при начальных условиях (1, 2) и напряженностях полей (3, 5), находим z-составляющую импульса заряда

$$p_z = [\kappa(1 + \delta_z) - \ln(r/a)]p_{0z}/\kappa, \quad (8)$$

где

$$\delta_z = \delta p_z/p_{0z}, \kappa = cp_{0z}/(q\chi) = cp_{0z}/(q|H_\alpha| \cdot r) = r_L(r)/r \quad (r_L - \text{ларморовский радиус}). \quad (9)$$

Из z-составляющей уравнения для момента импульса

$$dM_z/dt = (\vec{r} \times \vec{F})_z, \vec{M} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (10)$$

получим

$$d(rp_\alpha)/dt = rF_\alpha = 0, p_\alpha = a\delta p_\alpha/r. \quad (11)$$

Из закона сохранения энергии

$$d(\varepsilon_k + q\varphi)/dt = 0, \varepsilon_k = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} \quad (12)$$

с учетом (4) и начальных условий находим

$$c\sqrt{p_r^2 + p_\alpha^2 + p_z^2 + m^2c^2} + q(\psi \ln(r/R_A) + \varphi_A) = c\sqrt{\delta p_r^2 + \delta p_\alpha^2 + p_{0z}^2(1 + \delta_z)^2 + m^2c^2} + q(\psi \ln(a/R_A) + \varphi_A). \quad (13)$$

В (13) переносим второе слева слагаемое направо, возводим в квадрат и подставляем (8) и (11)

$$p_r^2 + a^2\delta p_\alpha^2/r^2 + p_{0z}^2[\kappa(1 + \delta_z) - \ln(r/a)]^2/\kappa^2 + m^2c^2 = \delta p_r^2 + \delta p_\alpha^2 + p_{0z}^2(1 + \delta_z)^2 + m^2c^2 + \\ + q^2\psi^2 \ln^2(r/a)/c^2 - 2q\psi \ln(r/a)p_{0z}\sqrt{\delta_r^2 + \delta_\alpha^2 + (1 + \delta_z)^2 + c^2/v_{0z}^2(1 - v_{0z}^2/c^2)}/c, \quad (14)$$

где

$$\delta_r = \delta p_r/p_{0z}, \delta_\alpha = \delta p_\alpha/p_{0z} \text{ и } |\delta_r| \ll 1, |\delta_\alpha| \ll 1, |\delta_z| \ll 1. \quad (15)$$

В выражении под корнем в (14) имеем

$$\delta_r^2 + \delta_\alpha^2 + 1 + 2\delta_z + \delta_z^2 + c^2/v_{0z}^2 - 1 \approx c^2/v_{0z}^2 \quad (\text{учитывая (15)}). \quad (16)$$

Из (14) с учетом (16) получим

$$p_r = \pm \frac{p_{0z}}{\kappa} \sqrt{\kappa^2 \left[\delta_r^2 + \delta_\alpha^2 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \right] + 2\kappa(1 + \delta_z) \ln \frac{r}{a} - \left(1 - \frac{q^2\psi^2}{c^2} \frac{\kappa^2}{p_{0z}^2} \right) \ln^2 \frac{r}{a} - 2\kappa \frac{q\psi}{c} \frac{\kappa}{p_{0z}} \frac{c}{v_{0z}} \ln \frac{r}{a}}. \quad (17)$$

В (17) в последнем слагаемом с использованием κ из (9) преобразуем величину

$$q\psi\kappa c/(cp_{0z}v_{0z}) = c\psi/(v_{0z}\chi) = cE_r/(H_\alpha v_{0z}) = v_d/v_{0z} \equiv \eta \quad (18)$$

(v_d – скорость электрического дрейфа).

Перепишем (17) с учетом (18)

$$p_r = \pm \sqrt{\kappa^2 \left[\delta_r^2 + \delta_\alpha^2 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \right] + 2\kappa(1 - \eta + \delta_z) \ln(r/a) - \left(1 - v_{0z}^2\eta^2/c^2 \right) \ln^2(r/a)} p_{0z}/\kappa. \quad (19)$$

Итак, найдены проекции импульса заряда в зависимости от расстояния r от оси конденсатора и напряженностей полей. Воспользовавшись связью между скоростью частицы \vec{v} , ее импульсом \vec{p} и кинетической энергией ε_k

$$\vec{v} = c^2\vec{p}/\varepsilon_k, \vec{v} = \vec{e}_r dr/dt + \vec{e}_\alpha r d\alpha/dt + \vec{e}_z dz/dt \quad (20)$$

и совершив переход к безразмерным координатам

$$\xi = r/a, \zeta = z/a, \quad (21)$$

получим уравнения для траекторий заряда в плоскости $\xi\zeta$ (или rz)

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \pm \frac{\kappa(1 + \delta_z) - \ln \xi}{\sqrt{\kappa^2 \left[\delta_r^2 + \delta_\alpha^2 (1 - \xi^{-2}) \right] + 2\kappa(1 - \eta + \delta_z) \ln \xi - \left(1 - v_{0z}^2\eta^2/c^2 \right) \ln^2 \xi}} \quad (22)$$

и в плоскости $\xi\alpha$ (или $r\alpha$)

$$\frac{d\alpha}{d\xi} = \pm \frac{\delta_\alpha \kappa}{\xi^2 \sqrt{\kappa^2 \left[\delta_r^2 + \delta_\alpha^2 (1 - \xi^{-2}) \right] + 2\kappa(1 - \eta + \delta_z) \ln \xi - \left(1 - v_{0z}^2\eta^2/c^2 \right) \ln^2 \xi}} \quad (23)$$

(знак «+» ставится при движении в сторону роста ξ , знак «-» – при движении в сторону убывания ξ).

В этих уравнениях существенную роль играют постоянные κ (9) и η (18), зависящие от напряженностей полей, массы, величины и начальной z-составляющей скорости заряда.

Легко убедиться, что уравнение (22) (с изменением знака в числителе: $\kappa(1 + \delta_z) - \ln \xi \rightarrow \ln \xi - \kappa(1 + \delta_z)$) и уравнение (23) описывают движение отрицательного заряда $q = -|q|$ в том же магнитном поле (5) и в противоположно направленном электрическом поле (см. (3, 4))

$$E_r = |\psi|/r, \quad (24)$$

если начальные z -составляющие импульсов отрицательного и положительного зарядов отличаются знаком (сравнить с (2))

$$\vec{p}_0 = \vec{e}_r \delta p_r + \vec{e}_\alpha \delta p_\alpha - \vec{e}_z (|p_{0z}| + \delta p_z), \quad (25)$$

а постоянные κ и η равны (сравнить с (9) и (18))

$$\kappa = \frac{c|p_{0z}|}{|q|\chi}, \quad \eta = \frac{c|\psi|}{|v_{0z}|\chi}. \quad (26)$$

Если $\frac{v_{0z}^2}{c^2} \eta^2 \ll 1$ (или $|E_r| \ll |H_\alpha|$ (18)), то уравнения траекторий (22) и (23) становятся нерелятивистскими, которые можно переписать в виде

$$\zeta(\xi) = \zeta(\xi_0) \pm \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{[\kappa(1 + \delta_z) - \ln x] dx}{\sqrt{(\kappa\delta_- + \ln x)(\kappa\delta_+ - \ln x)}}, \quad (27)$$

$$\alpha(\xi) = \alpha(\xi_0) \pm \delta_\alpha \kappa \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{dx}{x^2 \sqrt{(\kappa\delta_- + \ln x)(\kappa\delta_+ - \ln x)}}, \quad (28)$$

где

$$\delta_\pm = \sqrt{(1 - \eta + \delta_z)^2 + \delta_r^2 + \delta_\alpha^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} \pm (1 - \eta + \delta_z). \quad (29)$$

Эти уравнения были получены из уравнений движения нерелятивистских зарядов и подробно исследованы в работе [1]. Еще раз надо отметить, что неравенство

$$\frac{v_{0z}^2}{c^2} \eta^2 \ll 1 \quad (30)$$

является условием применимости нерелятивистских уравнений траекторий (27) и (28).

Расчеты показали, что при $E_r = 0$ и при $|E_r| \geq |H_\alpha|$ траектории, описываемые уравнениями (22) и (23), не могут быть замкнутыми.

При условии

$$\eta = \left(1 + \frac{I_0(\nu)}{I_1(\nu)}\right)^{-1}, \quad \nu = \kappa(1 - \eta) \quad (31)$$

(I_0 и I_1 – модифицированные функции Бесселя) в (29) можно пренебречь начальными флуктуациями скорости заряда (15). В этом случае положительный заряд движется в плоскости rz по замкнутой траектории [1], причем величина ν определяется по заранее заданному расстоянию от оси z до дальней точки поворота $r_2 = a \cdot \xi_2 = a \exp(2\nu)$ при заранее заданном расстоянии a до источника. По найденным из (31) величинам κ и η и заранее известному значению p_{0z} определяем напряженности магнитного и электрического полей (см. (9) и (18)).

В настоящей работе показано, что положительный и отрицательный заряды могут двигаться в противоположных направлениях в плоскости rz по одинаковым замкнутым траекториям в одинаковых по величине и направлению магнитных полях, в противоположно направленных электрических полях и при разных знаках z -составляющих начальных скоростей вылетающих из источников зарядов. При этом величины q , E_r и v_{0z} должны быть выбраны такими, чтобы значения величин κ , η и ν для обоих зарядов были одинаковыми. Отметим, что при этом электрон оказывается ультррелятивистским даже для самого легкого иона. В качестве отрицательного заряда можно рассматривать отрицательный водород.

При равных величинах ν согласно (31) равны величины η и κ для разных зарядов. Равенство величин κ достигается за счет разных значений величин зарядов и начальных z -составляющих скоростей (9), затем из (18) и (26) определяются величины напряженностей электрических полей, действующих на заряды разных знаков.

В качестве примера построим замкнутую траекторию в плоскости $\xi\zeta$ для отрицательного заряда. После замены переменной интегрирования из (27) (с измененным знаком в числителе) получим следующие уравнения траекторий:

1) движение заряда от $\xi_1 = \xi_0 = 1$ до $\xi_2 = \exp(2\nu)$

$$\zeta^{(1)}(\xi) = -\nu e^\nu \int_{-\pi/2}^{\theta(\xi, \nu)} d\theta \left(\frac{I_1(\nu)}{I_0(\nu)} - \sin \theta \right) e^{\nu \sin \theta}; \quad (32)$$

2) движение заряда в обратном направлении от $\xi_2 = \exp(2\nu)$ до $\xi_1 = 1$

$$\zeta^{(2)}(\xi) = v e^v \int_{\pi/2}^{\theta(\xi, v)} d\theta \left(\frac{I_1(v)}{I_0(v)} - \sin \theta \right) e^{v \sin \theta}, \quad (33)$$

где $\theta(\xi, v) = \arcsin(\ln \xi / v - 1)$. Эти траектории (при $v = 0,69$) изображены на рисунке. Они совпадают с соответствующими траекториями положительного заряда, приведенными в [1], но разные по знаку заряды двигаются в противоположных направлениях. Подчеркнем, что уравнения для замкнутой траектории заряда $\zeta(\xi)$ определяются только одним параметром v .

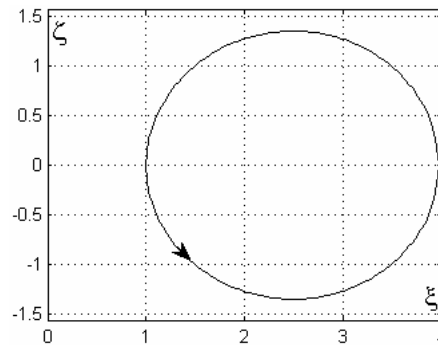


Рисунок. Траектория и направление движения отрицательного заряда при $v = 0,69$

В работе [1] обсуждался вопрос о возможности образования движущимися зарядами тороидальной поверхности – вихревого кольца (либо при кольцевом источнике зарядов, либо при точечном с малой азимутальной составляющей скорости зарядов). Такое вихревое кольцо можно промоделировать поверхностью, получаемой вращением вокруг оси ζ замкнутой траектории, представленной на рисунке. Возможно, что и в конденсаторе можно добиться устойчивости таких вихревых колец в течение какого-то промежутка времени после выключения полей (в атмосфере такие незаряженные вихревые кольца демонстрировал сто лет назад Р. Вуд [2, 3 с. 63]). Таким образом, в одной и той же установке с разрезанными поперек обкладками конденсатора, создающими внутри каждой половинки конденсатора противоположно направленные E_r -поля, можно было бы получить отдельно два вихревых кольца, одно из которых образовано положительными зарядами, другое – отрицательными. После выключения полей возможно столкновение и образование вихревого кольца из встречных пучков зарядов разного знака, в котором кулоновское поле расталкивания уменьшится.

ВЫВОДЫ

В работе изложены теоретические исследования траекторий, полученных путем решения релятивистских уравнений движения положительных и отрицательных заряженных частиц. Найдено условие перехода к нерелятивистским уравнениям траекторий. Показано, что при определенных условиях в цилиндрическом конденсаторе по одинаковым замкнутым траекториям, но в противоположных направлениях могут двигаться в плоскости r, z заряды разных знаков. Эти траектории либо при точечных источниках при наличии малых азимутальных скоростей зарядов, либо при кольцевых источниках образуют тороидальную поверхность – вихревое кольцо. Ожидается, что такие устойчивые вихри положительных и отрицательных зарядов после выключения полей могут сливаться в одно вихревое кольцо, в котором кулоновское поле расталкивания будет уменьшаться.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кирочкин Ю.А., Кирочкин А.Ю. Теоретическое исследование возможности разделения изотопов при движении заряженных частиц в постоянном электромагнитном поле цилиндрического конденсатора и линейного тока, текущего вдоль его оси. Замкнутые траектории. О шаровой молнии // Журнал технической физики. – 2007. – Т. 77, № 10. – С. 89-96.
2. Wood R.W. Vortex rings // Nature. – 1901. – Vol. 63. – P. 418.
3. Сибрук В. Роберт Вуд. – М.: Госуд. изд. физ.-мат. лит., 1960. – 324 с.

MOTION OF RELATIVISTIC CHARGES IN THE CONSTANT ELECTROMAGNETIC FIELD OF A CYLINDRICAL CAPACITOR AND A LINEAR CURRENT FLOWING ALONG ITS AXIS

Yu.A. Kirochkin¹, A.Yu. Kirochkin²

¹Karazin National University, 610077, Kharkov, Svobody Sq., 4

²Ukrainian Civil Defence University, 61023, Kharkov, Chernyshevskogo street, 94

The trajectories of motion of the relativistic charged particles in constant radial electric and azimuthal magnetic fields are obtained. It is shown that at certain conditions motion of positive and negative charges can take a place on the identical closed trajectories. The usability condition of nonrelativistic trajectories is found. Possibility of formation of vortex rings of positive and negative charges and their confluence in one vortex ring is discussed.

KEY WORDS: electromagnetic field, charge, motion, trajectory, vortex.