О ПРОДОЛЖЕНИИ НОРМ, ЗАДАННЫХ НА ПОДКОЛЬЦЕ МАТРИЧНОГО КОЛЬЦА

Г. Р. Белицкий

Пусть $\mathfrak{M}_p$ — *кольцо всех вещественных квадратных матриц* p*-го порядка и* $\pi \subseteq \mathfrak{M}_p$ — какое-нибудь подкольцо. Функционал $\nu = \nu(A)$ типа нормы матриц [1], определенный на π, мы будем называть нормой на* π. В остальном мы сохраняем терминологию работы [1], где было доказано, что для всякого функционала типа нормы матриц, определенного на идеале $I \subset \mathfrak{M}_p$, существует продолжающая норма матриц, т. е. норма на $\mathfrak{M}_p$. Здесь мы обобщаем этот результат.

Теорема 1. *Пусть* $\pi \subset \mathfrak{M}_p$ — *любое подкольцо и* $\nu = \nu(A)$ — *норма на* π. *Существует норма матриц* $\|A\|$, *совпадающая с* $\nu(A)$, *на* π.

Эта теорема позволяет получить следующий общий критерий продолжаемости функционала до нормы матриц.

Пусть M — любое множество матриц. Обозначим через $\pi(M)$ наименьшее подкольцо, содержащее M. Это подкольцо совпадает с множеством всевозможных линейных комбинаций всевозможных конечных произведений матриц из M, то есть $A \in \pi(M)$ тогда и только тогда, когда A имеет вид

$$A = \sum_k \alpha_k \prod_j z_{k,j}^{\lambda_{k,j}} \; (z_{k,j} \in M, \lambda_{k,j} \geqslant 0 \text{ — целые}, \sum_{k,j} \lambda_{k,j} > 0). \tag{1}$$

Пусть теперь $\nu(A)$ — произвольный неотрицательный функционал на M. Положим

$$\nu'(A) = \inf \sum_k |\alpha_k| \prod_j \nu^{\lambda_{k,j}}(z_{k,j}) \quad (A \in \pi(M)),$$

где нижняя грань берется по всем представлениям матрицы $A \in \pi(M)$ в виде (1). Очевидно,

$$\nu'(A) \leqslant \nu(A) \quad (A \in M). \tag{2}$$

Непосредственно проверяется, что функционал $\nu'(A)$ обладает всеми свойствами нормы на π, кроме, быть может позитивности**. Если функционал $\nu'(A)$ позитивен, то он является нормой на $\pi(M)$.

---

* Таким образом, норма на подкольце обладает обычными свойствами нормы матриц:

1) $\nu(A) > 0 \quad (A \neq 0)$; 2) $\nu(\alpha A) = |\alpha| \nu(A)$;

3) $\nu(A + B) \leqslant \nu(A) + \nu(B)$; 4) $\nu(AB) \leqslant \nu(A)\nu(B)$.

** В [2] установлено, что свойство позитивности на $\mathfrak{M}_p$ вытекает из неотрицательности и остальных свойств нормы матриц (разумеется, исключая случай тождественного нуля). Для подкольца $\pi \subset \mathfrak{M}_p$ это, вообще говоря, несправедливо.

Теорема 2. *Для того, чтобы существовала норма матриц, совпадающая с функционалом $\nu(A)$ на множестве M, необходимо и достаточно, чтобы*

$$a)\ \nu'(A) = \nu(A) \quad (A \in M); \quad b)\ \nu'(A) > 0 \ (A \neq 0,\ A \in \pi(M)).$$

Доказательство. Необходимость этих условий почти очевидна. В самом деле, пусть норма матриц $\|A\|$ такова, что

$$\|A\| = \nu(A) \quad (A \in M). \tag{3}$$

Тогда для всякого представления матрицы $A \in \pi(M)$ в виде (1) имеем:

$$\|A\| \leqslant \sum_k |\alpha_k| \prod_j \|z_{k,j}\|^{\lambda_{k,j}} = \sum_k |\alpha_k| \prod_j \nu^{\lambda_{k,j}}(z_{k,j}).$$

Отсюда вытекает, что

$$\|A\| \leqslant \nu'(A) \quad (A \in \pi(M)).$$

Это неравенство вместе с (2) и (3) влечет $a)$ и $b)$.

Достаточность условий $a)$ и $b)$ вытекает из теоремы 1. В самом деле, пусть условия выполнены. В силу $b)$ ν' является нормой на $\pi(M)$. По теореме 1 существует норма матриц $\|A\|$, совпадающая с $\nu(A)$ на $\pi(M)$. В силу $a)$ $\|A\| = \nu(A)$ $(A \in M)$.

Теорема 2 доказана.

Заметим, что условие $a)$ эквивалентно следующему:

$$a')\ \nu(A) \leqslant \sum_k |\alpha_k| \prod_j \nu^{\lambda_{k,j}}(z_{k,j})$$

для всякого представления матрицы $A \in M$ в виде (1).

Из $a)$ и $b)$ вытекает, что $\nu(A)$ есть функционал типа нормы матриц на M. Обратное неверно. Легко построить пример, когда $\nu(A)$ есть функционал типа нормы матриц на M, однако $a)$ не выполнено. Но даже, когда $a)$ выполнено, условие $b)$ может нарушаться. В самом деле, пусть $p = 2$ и множество M состоит из одной матрицы

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Положим $\nu(A_0) = 1$. Непосредственно проверяется, что здесь $a)$ выполнено*. В то же время в рассматриваемом нами примере условие $b)$ не выполнено. Рассмотрим матрицу

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{A_0^n - A_0^m}{n - m} \quad (n, m = 1, 2, 3, \ldots; \quad n \neq m).$$

Так как

$$\nu'(A_0') \leqslant \frac{2}{|n - m|},$$

то $\nu'(A_0') = 0$. Это означает, что не существует нормы матриц, равной единице на матрице A_0. Можно получить следующее утверждение.

Пусть множество M состоит из одной матрицы A. Для того, чтобы существовала норма матриц, равная некоторому числу $\nu > 0$ на матрице A, необходимо, чтобы $\nu \geqslant r(A)$. Это условие достаточно, если

---

* Нетрудно показать, что если множество M состоит лишь из одной матрицы A, то $a)$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$\nu(A) \geqslant r(A),$$

где $r(A)$ — спектральный радиус матрицы A.

наибольшим по модулю собственным значениям матрицы A отвечают только одномерные клетки Жордана. В противном случае необходимое и достаточное условие заключается в неравенстве $\nu > r(A)$.

Переходим к доказательству основной теоремы 1. Предварительно докажем одну лемму.

Лемма. *Пусть векторная норма матриц* * $\|A\|_0$ *такова, что*

$$\|AX\|_0 \leqslant \|A\|_0 \cdot \|X\|_0 \quad (X \in \pi, \quad A \in \mathfrak{M}_p). \tag{4}$$

Тогда существует норма матриц, совпадающая с $\|A\|_0$ на π.

Из (4) вытекает, что функционал $\nu_0(A) = \|A\|_0$ $(A \in \pi)$ есть норма на π.

Доказательство. Положим

$$G \equiv \bigcup_{-\infty<\lambda<\infty} \{\lambda E\} \cup \pi,$$

где E — единичная матрица. Если $E \in \pi$, то G и π совпадают. Далее, положим

$$\|A\|_1 = \max_{X \in G} \frac{\|AX\|_0}{\|X\|_0}.$$

Норма $\|A\|_1$ является векторной нормой матриц, сохраняющей единицу $\|E\|_1 = 1$. Кроме того, в силу (4)

$$\|A\|_1 \leqslant \max\left(\frac{\|A\|_0}{\|E\|_0}, \ \|A\|_0\right) = \|A\|_0.$$

Отсюда вытекает, что функционал

$$\|A\| = \max_{V \in \mathfrak{M}_p} \frac{\|VA\|_0}{\|V\|_1}$$

является нормой матриц. Покажем, что эта норма является искомой. В самом деле,

$$\|A\| \geqslant \frac{\|A\|_0}{\|E\|_1} = \|A\|_0 \quad (A \in \mathfrak{M}_p).$$

С другой стороны, если $A \in \pi$, то

$$\|U\|_1 \geqslant \frac{\|UA\|_0}{\|A\|_0} \quad (u \in \mathfrak{M}_p)$$

и поэтому $\|A\| \leqslant \|A\|_0 (A \in \pi)$. Таким образом, $\|A\| = \|A\|_0$ $(A \in \pi)$.

Доказательство теоремы 1. В силу леммы достаточно построить векторную норму матриц $\|A\|_0$, обладающую свойством (4) и совпадающую на π с $\nu(A)$. С этой целью продолжим функционал $\nu(A)$ на множество G, положив

$$\nu(\lambda E) = |\lambda| \quad (-\infty < \lambda < \infty),$$

если $E \overline{\in} \pi$. Далее для матриц $A \in G$ положим

$$\nu_1(A) = \max_{X \in G} \frac{\nu(XA)}{\nu(X)}.$$

Очевидно,

$$\nu_1(E) = 1, \quad \nu_1(A) \leqslant \nu(A) \quad (A \in \pi).$$

Пусть теперь $\|A\|'$ — любая векторная норма матриц, совпадающая с $\nu(A)$ на π. Положим

$$\|A\|_0 = \max_{X \in G} \frac{\|AX\|'}{\nu_1(X)}.$$

---

* Т. е., кольцевое свойство $\|AB\|_0 \leqslant \|A\|_0 \cdot \|B\|_0$ $(A, B \in \mathfrak{M}_p)$ не обязательно.

Покажем, что векторная норма матриц $\|A\|_0$ и будет искомой. В самом деле, пусть $Y \in \pi$. Тогда, с одной стороны,

$$\|Y\|_0 \geqslant \frac{\|Y\|'}{\nu_1(E)} = \|Y\|' = \nu(Y),$$

с другой стороны,

$$\|Y\|_0 = \max_{X \in G} \frac{\|YX\|'}{\nu_1(X)} = \max_{X \in G} \frac{\nu(YX)}{\nu_1(X)} \leqslant \nu(X)$$

в силу определения функционала ν_1. Таким образом,

$$\|Y\|_0 = \nu(Y) \quad (Y \in \pi).$$

Покажем, что $\|A\|_0$ обладает свойством (4). Пусть $Y \in \pi$. Тогда для всех $A \in \mathfrak{M}_p$ имеем:

$$\|AY\|_0 = \max_{X \in G} \frac{\|AYX\|'}{\nu_1(X)} = \nu(Y) \max_{X \in G} \frac{\|AYX\|'}{\nu_1(X)\nu(Y)} \leqslant$$

$$\leqslant \nu(Y) \max_{X \in G} \frac{\|AYX\|'}{\nu(YX)} \leqslant \nu(Y) \max_{X \in G} \frac{\|AYX\|'}{\nu_1(YX)} \leqslant \nu(Y)\|A\|_0 = \|Y\|_0 \cdot \|A\|_0.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $S \subseteq \mathfrak{M}_p$ — любая замкнутая подполугруппа и $\nu = \nu(A)$ — функционал типа нормы матриц на S. Существует норма матриц, совпадающая с ν на S.*

Для доказательства достаточно заметить, что подкольцо $\pi(S)$ совпадает с линейной оболочкой множества S. Поэтому условия a) и b) теоремы 2 выполнены.

Теорема 1′. *Пусть π — подкольцо, не содержащее единицу, и $\nu = \nu(A)$ — норма на π. Существует сохраняющая единицу норма матриц, совпадающая с $\nu(A)$ на π.*

Доказательство. Так как $E \bar{\in} \pi$, то существует векторная норма $\|A\|'$, сохраняющая единицу и совпадающая с $\nu(A)$, на π. Тогда в прежних обозначениях (см. доказательство теоремы 1 и предшествующей леммы) имеем:

$$\nu_1(A) = \nu(A) = \|A\|' \quad (A \in G),$$

так что $\|E\|_0 = 1$, а это означает, в свою очередь, что

$$\|A\|_1 = \|A\|_0, \quad \|A\| = \max_u \frac{\|UA\|_0}{\|U\|_0},$$

откуда $\|E\| = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Р. Белицкий. О продолжении норм матриц. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 1. Изд-во ХГУ, 1965.

2. Г. Р. Белицкий. О цепях матричных норм, ДАН СССР, 151, № 1, 9—10, 1963.