УДК 519.210

В. П. ПОТАПОВ

ТЕОРЕМА О МОДУЛЕ. 1
Основные понятия. Модуль

Рассматриваемые здесь матрицы в начале трактуются как операторы, действующие в m-мерном векторном пространстве с индефинитной метрикой. Вводится понятие модуля J-нерастягивающей матрицы. Доказывается основная теорема о произведении модулей.

§ 1. Предварительные сведения Основными изучаемыми здесь объектами являются квадратные матрицы $A = (a_{kj})$ размера $m \times m$ с комплексными элементами. Наряду с ними будут рассматриваться прямоугольные матрицы размера $k \times m$, и в частности $f = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m]$, называемые также векторами.

Матрица $A^* = \bar{A}'$, где штрих означает переход к транспонированной матрице, а черта — переход к комплексно-сопряженным элементам, называется сопряженной матрицей A.

Хорошо известны следующие свойства операции сопряжения:

1. $(A^*)^* = A$; 2. $(A + B)^* = A^* + B^*$; 3. $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$, ($\lambda$ — скаляр); 4. $(AB)^* = B^* A^*$.

Применительно к вектору f операция сопряжения приведет к матрице-колонне f^* размера $m \times 1$. В связи с этим произведение матриц $fg^* = \sum_{k=1}^{m} \xi_k \bar{\eta}_k = < f, g >$ — число, называемое *скалярным произведением* вектора f на вектор g, *в то время как $f^* g = (\xi_k \bar{\eta}_k)$ — матрица первого ранга порядка $m \times m$.*

Матрица H называется *эрмитовой*, если $H^* = H$. Эрмитова матрица H называется *положительной*, если *эрмитова форма* $fHf^* = \sum_{k,j=1}^{m} \xi_k h_{kj} \bar{\xi}_j$ положительна для всех векторов $f \neq 0$. Если же $fHf^* \geqslant 0$, то H называется *неотрицательной*. Вообще H называется *дефинитной*, если fHf^* не изменяет знака при всевозможных векторах f, и *индефинитной* — в противном случае.

Неравенство $A \geqslant B$ означает, что $A - B \geqslant 0$, т. е. что матрица $A - B$ является эрмитовой неотрицательной.

Весьма часто мы будем пользоваться тем, что из $A \geqslant B$ вытекает $TAT^* \geqslant TBT^*$ для любой матрицы T порядка $l \times m$ (l — любое натуральное число). Обратное верно для всякой квадратной неособенной T.

Матрица U называется *унитарной*, если $UU^* = I$, и матрица X называется *нерастягивающей* (сжатием), если $XX^* \leqslant I$.

Пусть g — произвольный вектор и $gX = f$. Тогда $\langle f, f \rangle = \langle gX, gX \rangle = gXX^* g^* \leqslant gIg^* = gg^* = \langle g, g \rangle$ и, следовательно, сжатие X переводит каждый вектор g в вектор $f = gX$ не большей длины. Аналогично, унитарная матрица U переводит вектор g в вектор $f = gU$ той же длины. То, что вместе с U и сопряженная матрица U^* является унитарной, непосредственно усматривается из определения. Аналогичное утверждение для сжатий X проще всего доказать, используя понятие операторной нормы матрицы (оператора) A: $\|A\| = \sup_f \frac{\|fA\|}{\|f\|}$, где под нормой вектора понимают число $\|f\| = < f, f >^{1/2} = (\sum |\xi_j|^2)^{1/2}$. Легко доказать, что $\|A\| = \sup_{f, g} \frac{|< fA, g >|}{\|f\| \, \|g\|}$. И так как $|< fA, g >| = |< gA^*, f >|$, то $\|A^*\| = \|A\|$. Тот факт, что X является сжатием: $I - XX^* \geqslant 0$ эквивалентен неравенству $\|X\| < 1$. Но тогда и $\|X^*\| < 1$ и, следовательно, X^* является сжатием: $I - X^*X \geqslant 0$.

По аналогии с модулем комплексного числа a вводится понятие модуля матрицы A. Число $r = (a\bar{a})^{1/2}$ называется модулем числа a, и так как $(r^{-1} a) \times \overline{(r^{-1} a)} = 1$, то $r^{-1} a = e^{i\varphi}$, откуда вытекает полярное представление $a = re^{i\varphi}$.

Пусть теперь A — произвольная квадратная матрица. Произведение $AA^* = H$ является эрмитово-неотрицательной матрицей. Приведем ее унитарным преобразованием U к диагональному виду $D : H = UDU^*$. Так как сейчас $D \geqslant 0$, то существует корень квадратный арифметический $D^{1/2}$. Полагая $R = UD^{1/2} U^*$, мы получим $R^2 = AA^*$. Считая для простоты A обратимой, мы из равенства $R^{-1} (AA^*) R^{-1} = I$ заключаем, что матрица $R^{-1}A = W$ является унитарной. Равенство $A = RW$ является аналогом полярного представления комплексного числа.

В заключение этого параграфа перечислим кратко необходимые для нас сведения, касающиеся приведения квадратной матрицы к нормальной форме Жордана и понятия функции от матрицы.

В принятых нами обозначениях запись $gA = \lambda g$, $g \neq 0$ означает, что g является собственным вектором матрицы A, отвечающим собственному числу λ.

Каждую квадратную матрицу A преобразованием подобия $A = TCT^{-1}$ можно привести к нормальной жордановой форме C. Матрица C является блочно-диагональной. Ее диагональные блоки, называемые клетками Жордана, имеют вид:

$$C(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix};$$

здесь λ_0 — собственное число, а порядок клетки равен m_0. Одному и тому же собственному числу λ_0 может отвечать несколько клеток Жордана, причем порядок клеток не обязательно одинаков. Каждой клетке Жордана ставится в соответствие бином $(\lambda - \lambda_0)^{m_0}$, называемый элементарным делителем матрицы A. Набор всех элементарных делителей является инвариантом преобразования подобия, он определяет структуру жордановой матрицы С с точностью до перестановки клеток.

Все элементарные делители эрмитовой матрицы H — простые, т. е. имеют вид $\lambda - \lambda_0$. Иными словами, жорданова форма эрмитовой матрицы H является диагональной матрицей.

Существует несколько путей, ведущих к определению функции от матрицы. Все они приводят к одному и тому же конечному результату. Мы остановимся на трех из них.

Первый, пожалуй, наиболее общий предложен Ф. Риссом. Через $\sigma(A)$ обозначим спектр матрицы A — совокупность ее собственных чисел. Если $f(z)$ — функция, голоморфная в области G, содержащей $\sigma(A)$, а Γ — контур в области G, охватывающий $\sigma(A)$, то в соответствии с формулой Коши $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$, мы полагаем $f(A) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (\zeta I - A)^{-1} f(\zeta)\,d\zeta$. Достоинство риссовского определения в том, что оно охватывает и случай операторов, действующих в бесконечно-мерном пространстве, недостатком же является некоторая расплывчатость конструкции.

Второй способ может быть использован, когда $f(z)$ голоморфна в круге $|z| < R$, содержащем спектр $\sigma(A)$. Отправляясь от разложения $f(z)$ в степенной ряд $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$, мы полагаем $f(A) = a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \dots$ Этот способ заведомо хорош, когда $f(z)$ — целая функция.

Наконец, третий заключается в том, что мы приводим матрицу A к нормальной форме Жордана $A = TCT^{-1}$ и заменяем каждую клетку $C(\lambda_0)$ клеткой

$$\begin{pmatrix} f(\lambda_0) & \frac{f'(\lambda_0)}{1!} & \dots & \frac{f^{(m_0-1)}_{(\lambda_0)}}{(m_0-1)!} \\ 0 & f(\lambda_0) & \dots & \frac{f^{(m_0-2)}_{(\lambda_0)}}{(m_0-2)!} \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_0) \end{pmatrix} = f[C(\lambda_0)].$$

Тогда $f(A)$ определяется равенством $f(A) = Tf(C)T^{-1}$. Можно доказать, что результат не зависит от выбора матрицы T, приводящей A к нормальной форме Жордана.

§ 2. **Основные понятия J — алгебры.** Пусть $J = (P_{kj})$ — эрмитова, вообще говоря, индефинитная матрица m-го порядка, квадрат которой равен единичной $J^* = J$, $J^2 = I$. В m-мерном линейном комплексном пространстве L векторов-строк $f = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m]$ введем *индефинитную метрику*, определяя скалярное произведение равенством $[f, g] = fJg^* = \sum_{k,j=1}^{m} \xi_k P_{kj} \bar{\eta}_j$. Как и в обычном случае метрики $\langle f, g\rangle = fg^* = \sum_{k=1}^{m} \xi_k \bar{\eta}_k$, билинейный функционал $[f, g]$ обладает свойствами:

1. $[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g] = \lambda_1 [f_1, g] + \lambda_2 [f_2, g]$;
2. $[g, f] = \overline{[f, g]}$.

Однако сейчас нельзя утверждать, что скалярный квадрат $[f, f]$ вектора $f \neq 0$ является положительным числом. В связи с этим векторы $g \in L$ делятся на «плюс-векторы», «минус-векторы» и «нейтральные» соответственно тому, что $[g, g] > 0$, $[g, g] < 0$, $[g, g] = 0$. В *общей* теории вид метризующей матрицы J несущественен. Однако в конкретных ситуациях чаще других встречаются следующие виды J (матрицы Паули): $J = \begin{pmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$ $(p + q) = m$; $J_r = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$; $J_r = \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{pmatrix}$. Матрица J_r тесно связана с теорией электрических цепей, J_s — с классическими задачами; в этих двух случаях m необходимо является четным числом.

Наличие скалярного произведения позволяет каждой матрице поставить в соответствие *J-сопряженную матрицу* A^+, потребовав выполнения равенства $[f, gA^+] = [fA, g]$ для всех f и g из L. Это соотношение означает, что $fJ(A^+)^* g^* = fAJg^*$, откуда в силу произвольности векторов f и g и того, что $J^2 = I$, получаем $A^+ = JA^*J$.

Матрица H называется *J-эрмитовой* (*J — самосопряженная*), если выполняется $H = H^+$ или эквивалентное ему равенство[1] $HJ = JH^*$. Очевидно, для J-эрмитовой матрицы H скалярное произведение $[fH, f]$ является вещественным числом для всех $f \in L$. Если же, сверх того, это скалярное произведение для всех $f \in L$ неотрицательно, то H называется *J-эрмитово-неотрицательной* и, очевидно, характеризуется наравенством $HJ \geqslant 0$.

Матрица U называется *J-унитарной*, если она сохраняет скалярный квадрат $[fU, fU] = [f, f]$ $(f \in L)$. Так как из равенства квадратичных форм в комплексном векторном пространстве вытекает равенство билинейных, то $[fU, gU] = [f, g]$ и, следовательно, $UJU^* = J$.

Наконец, матрица W называется *J-нерастягивающей*, если она не увеличивает скалярного квадрата $[fW, fW] \leqslant [f, f]$, т. е. если $WJW^* \leqslant J$. Выражение $J - WJW^* \geqslant 0$, часто встречающееся в дальнейшем называется *J-формой*.

Излагаемая здесь теория изучает класс $\mathbf{W}$ J-нерастягивающих матриц. Определяющим обстоятельством является мультипликативность этого класса: если $W_1, W_2 \in \mathbf{W}$, то и $W_1, W_2 \in \mathbf{W}^{-*}$.

---

[1] При перестановке H^* с J матрица H утрачивает звездочку.

В самом деле, $J-(W_1W_2)J(W_1W_2)^*=J-W_1JW_1^*+W_1(J-$ $-W_2JW_2^*)W_1^*\geqslant 0$.

Принципиальное значение имеет

Теорема 2.1. *Если W является J-нерастягивающей (J-унитарной), то таковой же будет и W^*.*

Для доказательства рассмотрим дробно-линейное преобразование класса $\boldsymbol{W}(W)$ в класс сжатий $\boldsymbol{X}(X)$ (соотношения такого рода часто встречаются и в других вопросах J-теории). Для реализации этой связи введем в рассмотрение матрицы $P=\frac{1}{2}(I+$ $+J)$; $Q=\frac{1}{2}(I-J)$. Легко видеть, что P и Q являются ортогональными проекторами; $P^2=P=P^*\geqslant 0$; $Q^2=Q=Q^*\geqslant 0$; $PQ=$ $=QP=0$ и что $P+Q=I$; $P-Q=J$.

Для дробно-линейного преобразования $X=(WQ-P)^{-1}(-WP+$ $+Q)$ (2.1) справедливы три утверждения. Во-первых, это преобразование имеет смысл для любой J-нерастягивающей матрицы W; во-вторых, оно же может быть записано в виде $X=(PW+$ $+Q)\ (QW+P)^{-1}$ **(2.2);**

в-третьих, оно переводит J-нерастягивающие матрицы в сжатия X, а J-унитарные — в унитарные.

1. Тот факт, что W является J-нерастягивающей, равносилен, очевидно, неравенству $P+WQW^*\geqslant Q+WPW^*$. Умножив знаменатель в (2.1) на сопряженное выражение справа, получим $(WQ-P)\ (QW^*-P)=WQW^*+P$. Из двух последних соотношений следует, что если $g(WQ-P)=0$, то одновременно $gP=0$ и $gQ=0$, т. е. $g=0$.

2. Легко проверяется тождество $(WQ-P)(PW+Q)=(-WP+$ $+Q)\ (QW+P)$ **(2.3)**, из которого вытекает, что $QW+P$ — неособенная матрица. В самом деле, если $(QW+P)h^*=0$, то из (2.3) и 1. следует, что $(PW+Q)h^*=0$. Умножая слева первое на P, а второе на Q и складывая, мы получим, что $h^*=0$. Вследствие этого тождество (2.3) можно переписать в виде $(WQ-P)^{-1}\ (-WP+Q)=(PW+Q)\ (QW+P)^{-1}$.

3. Пользуясь первой и второй формулами преобразования, вычисляем $I-XX^*=(WQ-P)^{-1}\ \{J-WJW^*\}\ (QW^*-P)^{-1}$; $I-X^*X=(W^*Q+P)^{-1}\ \{J-W^*JW\}\ (QW+P)^{-1}$.

После этого утверждения теоремы становятся следствием уже известных свойств сжатий и унитарных матриц.

§ 3. Определение модуля J-нерастягивающей матрицы. Изложенное в § 1 понятие модуля произвольной матрицы A основывалось на построении матрицы R с неотрицательными собственными числами, квадрат которой равен AA^*.

Для каждой матрицы S с положительными собственными числами

1) существует, и притом только одна, матрица R с положительными собственными числами такая, что $R^2=S$, называемая

корнем квадратным арифметическим из S и обозначаемая $R = S^{1/2}$.

2) существует, и притом только одна, матрица H с вещественными собственными числами такая, что $e^H = S$.

H называется *главным значением логарифма* S и обозначается $H = \ln S$.

Заметим, что для эрмитовых матриц $S \geqslant 0$ корень квадратный $S^{1/2}$ имеет смысл и при наличии собственных чисел, равных нулю. В общем случае это не так из-за возможного присутствия в S клеток Жордана вида $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ для которых $s^{1/2}$ не существует.

Обобщая понятие модуля на случай индефинитной метрики, естественно вместо AA^* рассматривать матрицу $S = AA^+ = AJA^*J$.

Учтем, однако, что для произвольной матрицы A обычная процедура построения модуля не всегда реализуется, как видно из примера $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Здесь $S = AA^+ = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и арифметический корень $S^{1/2}$ лишен смысла.

На деле задачу о построении модуля следует ставить не для произвольных матриц A, а для матриц W класса $\boldsymbol{W}$ и притом обратимых. Для них верна

Теорема 3.1. *Если* W *обратимая* J*-нерастягивающая матрица, то все собственные числа матрицы* $S = WJW^*J$ *положительны.*

Доказательство. Положим $H = I - S$. Так как $HJ = J - WJW^*$, то H — J-эрмитова неотрицательная матрица.

1) Покажем прежде всего, что спектр $\sigma(H)$ — вещественен. В самом деле, пусть $g \neq 0$ — собственный вектор матрицы H, отвечающий собственному числу λ: $\lambda g = gH$. Тогда $\lambda g Jg^* = gHJg^*$. Если $gHJg^* > 0$, то λ — вещественно, если же $gHJg^* = 0$, то мы последовательно получаем $g(HJ)^{1/2} \cdot (HJ)^{1/2} g^* = 0$; $g(HJ)^{1/2} = 0$; $g(HJ)^{1/2}(HJ)^{1/2} = 0$; $g(HJ) = 0$; $gH = 0$, $\lambda g = 0$, и, следовательно, $\lambda = 0$.

2) Покажем теперь, что спектр $\sigma(S)$ — положителен. В самом деле, пусть $e \neq 0$ — собственный вектор матрицы S, отвечающий собственному числу μ: $\mu e = eS = e(I - H)$. Тогда $(1 - \mu)e = eH$, откуда $(1 - \mu)eJe^* = eHJe^*$ **(3.1)**. Воспользуемся теперь тем, что $\boldsymbol{W}^*$ является J-нерастягивающей одновременно с W: $J - W^*JW \geqslant 0$. Отсюда следует $WJ \cdot J \cdot JW^* \geqslant WJW^*J \cdot J \cdot JWJW^*$ или $SJ \geqslant SJS^*$. Но тогда $eSJe^* \geqslant eSJS^*e^*$.

И так как по доказанному в пункте 1) μ — вещественное, то $\mu eJe^* \geqslant \mu^2 eJe^*$ или $\mu(1 - \mu)eJe^* \geqslant 0$. Используя (3.1), придем к соотношению $\mu eHJe^* \geqslant 0$. И если $eHJe^* > 0$, то $\mu \geqslant 0$, если же $eHJe^* = 0$, то как в пункте 1) $eH = 0$, $1 - \mu = 0$ и, следовательно, $\mu = 1$. Таким образом, собственные числа матрицы S

неотрицательны, и так как S обратима, то они положительны. Теорема доказана.

Замечание. Спектральные свойства J-эрмитово-неотрицательной матрицы H (а значит и S) могут быть без труда уточнены. Элементарные делители матрицы H, отвечающие собственным числам $\lambda \neq 0$ — первой кратности, а отвечающие собственному числу $\lambda = 0$ — лишь второй. Исчерпывающий анализ жордановой структуры любой (не обязательно неотрицательной) J-эрмитовой матрицы дан Фробениусом, изложение его результатов можно найти в [1].

Следствие.

Для любой обратимой J-нерастягивающей матрицы W существует матрица R такая, что $R = S^{1/2} = (WW^{+})^{1/2} = (WJW^{*}J)^{1/2}$. Матрица R называется модулем матрицы W.

§ 4. Простейшие свойства модуля. Ряд свойств матрицы $S = WJW^{*}J$ переносится на модуль R матрицы $W \in \mathbf{W}$. Для вывода их удобно воспользоваться связью между произвольной матрицей A с положительным спектром и ее квадратом A^2, выражаемой формулой

$$A^{-1} = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} (x^2 I + A^2)^{-1}\, dx. \tag{4.1}$$

Она вытекает из соответствующего тривиального скалярного соотношения

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2} a^{-1} \quad (a > 0)$$

и без труда проверяется на клетках Жордана матрицы A.

Смысл формулы (4.1) заключается в том, что она сводит изучение сравнительно сложной зависимости матрицы A от A^2 к изучению «линейной комбинации» с положительными коэффициентами функций $(x^2 I + A^2)^{-1}$ значительно более простой природы.

Очевидна следующая

Лемма 4.1. *Если A — обратимая J-эрмитова матрица, то и A^{-1} — J-эрмитова.*

Соотношения $AJ = JA^{*}$; $JA^{-1*} = A^{-1}J$ эквивалентны, так как $(A^{-1})^{*} = (A^{*})^{-1}$.

Из леммы 4.1 и формулы (4.1) вытекает

Лемма 4.2. *Если S — J-эрмитова матрица с положительными собственными числами, то и $S^{1/2}$ является J-эрмитовой.*

Имеем

$$S^{-1/2} = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} (x^2 I + S)^{-1}\, dx$$

и из J-эрмитовости матрицы S последовательно вытекает J-эрмитовость матриц x^2I+S, $(x^2I+S)^{-1}$, $S^{-1/2}$, $S^{1/2}$.

Лемма 4.3. *Если A и B — J-эрмитовы матрицы с положительными собственными числами, то неравенства $AJ \leqslant BJ$ и $A^{-1}J \geqslant B^{-1}J$ эквивалентны.*

В самом деле, $A^{1/2}$, $B^{1/2}$ существуют, обратимы и по лемме 4.2 они J-эрмитовы. В силу этого неравенство $AJ \leqslant BJ$ равносильно неравенству $A^{1/2}J(A^{1/2})^* \leqslant B^{1/2}J(B^{1/2})^*$ или $B^{1/2}A^{1/2}J(A^{1/2})^* \times (B^{-1/2})^* \leqslant J$, означающему, что матрица $W=B^{-1/2}A^{1/2}$ является J-нерастягивающей. Но тогда по теореме § 1 будет J-нерастягивающей и матрица W^*: $W^*JW \leqslant J$, т. е. $(A^{1/2})^*(B^{-1/2})^* \times JB^{-1/2}A^{1/2} \leqslant J$, откуда $(B^{-1/2})^*JB^{-1/2} \leqslant (A^{-1/2})^*JA^{-1/2}$ или $JB^{-1} \leqslant JA^{-1}$. Умножая обе части неравенства слева и справа на J, получим $B^{-1}J \leqslant A^{-1}J$, что и требовалось доказать.

После этого без труда доказываются теоремы, устанавливающие основные свойства модуля R J-нерастягивающей матрицы W.

Теорема 4.1. *Модуль $R=(WJW^*J)^{1/2}$ обратимой J-нерастягивающей матрицы W является J-эрмитовой J-нерастягивающей матрицей с положительными собственными числами. Имеет место «полярное представление» матрицы W: $W=RU$, где U — J-унитарная матрица.*

Доказательство. J-эрмитовость R вытекает на основании леммы 4.2 из того, что в данном случае матрица $S=WJW^*J$ является J-эрмитовой. Опираясь на это, мы получаем J-нерастягиваемость R: $J-RJR^*=J-R^2J=J-SJ=J-WJW^* \geqslant 0$. Положительность собственных чисел содержится в определении $S^{1/2}=R$. Наконец, из равенства $RJR^*=WJW^*$ следует, что $U=R^{-1}W$ является J-унитарной матрицей и $W=RU$, что и завершает доказательство.

Внутреннее определение модуля дает обратная в известном смысле

Теорема 4.2. *Модуль R J-эрмитовой J-нерастягивающей матрицы W с положительными собственными числами совпадает с W.*

Имеем $R^2=S=WJW^*J=W\cdot WJ\cdot J=W^2$ и из единственности корня квадратного арифметического из матрицы S с положительными собственными числами следует, что $R=W$.

Теорема 4.3. *Модуль R удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant J-RJ \leqslant J-R^2J$, $0 \leqslant R^{-1}J-J \leqslant R^{-2}J-J$.*

Доказательство. Отправляясь от формулы (4.1) $R^{-1}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}(x^2I+R^2)^{-1}\,dx$ вычислим $R^{-1}J-J=\Big[\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}(x^2I+R^2)^{-1}\,dx-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}(x^2I+I)^{-1}\,dx\Big]J=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}(x^2I+R^2)^{-1}(I-R^2)\times$

$$\times J\frac{dx}{x^2+1}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}(x^2I+R^2)^{-1/2}(I-R^2)(x^2I+R^2)^{-1/2}J\,\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}(x^2I+R^2)^{-1/2}(J-RJR^*)\,[(x^2I+R^2)^{-1/2}]^*\,\frac{dx}{x^2+1}\geqslant 0.$$ Здесь мы воспользовались J-эрмитовостью матриц R и $(x^2I+R^2)^{-1/2}$; последнее вытекает из лемм 4.1, 4.2. Итак $R^{-1}J\geqslant I\cdot J$. Отсюда по лемме 4.3 имеем $RJ\leqslant I\cdot J$. Тем самым неравенства $0\leqslant J-RJ$; $0\leqslant R^{-1}J-J$ доказаны. Но $J-R^2J=J-RJ+RJ-R^2J=J-RJ+R^{1/2}J(R^{1/2})^*-RJR^*=J-RJ+R^{1/2}(J-RJ)\times(R^{1/2})^*\geqslant J-RJ$, что и завершает доказательство.

Теорема 4.4. *Если R_1 и R_2 — модули, то из неравенства $R_1^2J\leqslant R_2^2J$ вытекает неравенство $R_1J\leqslant R_2J$.*

Доказательство. По формуле (4.1) $R_i^{-1}J=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}(x^2I+R_i^2)^{-1}J\,dx$ $(i=1,2)$. Так как по условию $(x^2I+R_1^2)J\leqslant(x^2I+R_2^2)J$, то по лемме 4.3 $(x^2I+R_1^2)^{-1}J\geqslant(x^2I+R_2^2)^{-1}J$ и, следовательно, $R_1^{-1}J\geqslant R_2^{-1}J$. Применив снова лемму 4.3, получим $R_1J\leqslant R_2J$, что и требовалось доказать.

Как известно, обратное утверждение не имеет места уже в случае дефинитной метрики $J=I$.

§ 5. Экспоненциальное представление модуля. Для того чтобы получить для $\ln A$ формулу, аналогичную интегральному представлению (4.1), проинтегрируем равенство $\frac{1}{a}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}$ по параметру a от 1 до $a>0$: $\ln a=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{x}\left[\operatorname{arctg}\frac{a}{x}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right]dx.$ Интегрируем по частям и, учитывая, что двойная подстановка равна нулю, получаем $\ln a=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left[\frac{a}{x^2+a^2}-\frac{1}{x^2+1}\right]\ln x\,dx$. Разбив этот интеграл на сумму двух по промежуткам $[0, 1]$ и $[1, +\infty)$, заменим в последнем x на $\frac{1}{x}$. Мы получим окончательно $\ln a=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1}\left[\frac{a}{x^2+a^2}-\frac{a}{1+a^2x^2}\right]\ln x\,dx$. То, что это равенство остается верным и после замены числа $a>0$ произвольной матрицей A с положительнным спектром, можно проверить так же, как и формулу (4.1), на клетках Жордана матрицы A. Сейчас целе-

сообразна следующая ее запись: $\ln A = \frac{2}{\pi}\int_0^1 (x^2 I + A^2)^{-1/2} (I + A^2x^2)^{-1/2} A^{1/2}\{[-A^2\} A^{1/2} (I + A^2x^2)^{-1/2} (x^2 I + A^2)^{-1/2} (1 - x^2) \times \ln x\, dx$. Пусть теперь $A = R$ — модуль, т. е. J-нерастягивающая J-эрмитова матрица с положительным спектром. Обозначим $\ln A = -H$. Учитывая леммы 4.1 и 4.2, мы придем к следующему соотношению $HJ = \frac{2}{\pi}\int_0^1 [(x^2 I + R^2)^{-1/2} (I + R^2x^2)^{-1/2} R^{1/2} (J - RJR^*) [(x^2 I + R^2)^{-1/2} (I + R^2x^2)^{-1/2}] R^{1/2*} (1 - x^2) \ln x\, dx$.
Тем самым верна

Теорема 5.1. *Модуль $R = (WJW^*J)^{1/2}$ обратимой J-нерастягивающей матрицы W однозначно представляется в виде $R = e^{-H}$, где H — J-эрмитово-неотрицательная матрица.*

Справедлива и обратная

Теорема 5.2. *Если H — произвольная J-эрмитово-неотрицательная матрица, то матрица $R = e^{-H}$ является модулем.*

Доказательство. Так как собственные числа матрицы H вещественны, то спектр R положителен. Далее $RJ = J \cdot J^{-1}e^{-H}J = Je^{-JHJ} = Je^{-H^*} = JR^*$, т. е. R — J-эрмитова.

Остается доказать, что R — J-нерастягивающая. Пусть g — произвольный вектор. Рассмотрим скалярную функцию $\varphi_g(t) = [ge^{-tH}, ge^{-tH}] = ge^{-tH}Je^{-tH^*}g^*$ вещественного переменного t и найдем ее производную

$$\varphi_g'(t) = ge^{-tH}(-HJ)e^{-tH^*}g^* + ge^{-tH}J(-H^*)e^{-tH^*}g^* = -2ge^{-tH}(HJ)e^{-tH^*}g^* \leqslant 0.$$

Таким образом, $\varphi_g(t)$ монотонно убывает, в частности, $\varphi_g(0) \geqslant \varphi_g(1)$, т. е. $gJg^* \geqslant gRJR^*g^*$. Это, в силу произвольности g, завершает доказательство теоремы.

Заслуживают внимания три факта, вытекающих из только что доказанных теорем.

1. *Если $R = e^{-H}$ — модуль, то при любом $t \geqslant 0$, $R^t = e^{-tH}$ также является модулем.*

2. Утверждение теоремы 4. 3 предыдущего параграфа вытекает из следующего неравенства: $\varphi_g(-1) \geqslant \varphi_g\left(-\frac{1}{2}\right) \geqslant \varphi_g(0) \geqslant \varphi_g\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant \varphi_g(1)$.

3. Имеет место

Теорема 5.3. *Если $R_1 = e^{-H_1}$, $R_2 = e^{-H_2}$ удовлетворяют неравенству $R_1J \geqslant R_2J$, то $H_1J \leqslant H_2J$.*

В самом деле, по теореме 4.4 $R_1^{1/2}J \geqslant R_2^{1/2}J$ и так как $R_1^{1/2}$, $R_2^{1/2}$ в свою очередь являются модулями, то по той же теореме

$R_1^{1/4}J \geqslant R_2^{1/4}J$. Продолжая так, получим $e^{-1/2^n H_1}J \geqslant e^{-1/2^n H_2}J$, откуда $2^n(J - e^{-1/2^n H_1}J) \leqslant 2^n(J - e^{-1/2^n H_2}J)$. Переход к пределу при $n \to \infty$ доставляет требуемое неравенство $H_1 J \leqslant H_2 J$.

В заключение заметим, что последняя теорема и теорема 4.4 о монотонности логарифма и квадратного корня являются слабыми отзвуками замечательной работы Левнера [2].

Список литературы: 1. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. —М. —Л.: Гостехиздат, 1948. — 434 с. 2. Löwner K. Über monotone Matrixfunktionen.— Math. Zeitschrift, 1933, № 38, с. 177—216.

Поступила в редколлегию 08.01.81.