

Некоторые результаты о парных уравнениях в  
кольцах с факторизационными парами

Г. С. Полетаев

*Одесская государственная академия холода, Украина*

Рассмотрены абстрактные парные уравнения общего вида с неизвестными из кольца, обладающего факторизационной парой подколец. В предположении правильности факторизации некоторых элементов, строящихся по коэффициентам, установлена теорема существования и единственности с формулами решения.

2000 *Mathematics Subject Classification* 45N05.

**0.1.** Уравнения, которые можно понимать как парные, важны во многих областях науки. Так, например, различные задачи математической и теоретической физики, электросвязи, теоретической и строительной механики, теории упругости, гидротехники и другие связаны с парными уравнениями типа свертки, – матричными (возникающими, например, в задачах определения единой матрицы нагрузки по части прогибов двух разных совокупностей одинаковых тел); – векторными в  $R_3$  и его расширении; – функциональными и иными. Для указанных уравнений, в том числе для обычно изучаемых особо разных случаев постановок задачи разрешимости интегральных уравнений с ядрами, зависящими от разности аргументов [1]–[5]:

$$\begin{cases} \varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)\varphi(s)ds = f(t), & -\infty < t < 0, \\ \varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s)\varphi(s)ds = f(t), & 0 < t < \infty; \end{cases} \quad (1)$$

где  $k_j(t)\exp\{c_j t\} \in L_1(-\infty, \infty)$ ,  $c_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2$ , можно обнаружить много общего. Общие качества наблюдаются с точки зрения основных положений теории колец и функционального анализа. Они могут включать возможную форму записи уравнений и их решений; постановку задачи разрешимости и другие аспекты. Для конкретных наборов парных уравнений совокупности общих качеств могут отличаться. Существенно наличие или отсутствие ассоциативности умножения в соответствующем уравнении и предположениям кольце  $R$  элементов. Вскрытие подходов к исследованию приводит к мотивации необходимости изучения парных уравнений в кольцах  $R$  с фактори-



зованными парами подколец  $(R^+, R^-)$ , порождаемыми действующими в  $R$  коммутирующими проекторами  $p^+, p^-$  [5]-[8]:

$$\begin{cases} p^-(a_{11}xa_{12}) = p^-(c), \\ p^+(a_{21}xa_{22}) = p^+(b), \end{cases} \quad (2)$$

где  $p^+, p^-$  – соответствующие проекторы.

**0.2.** Ниже рассматриваются абстрактные парные уравнения общего вида (2)

и

$$(a_1x)^- = c^-, \quad (xa_2)^+ = b^+; \quad (3)$$

$$(a_1x)^- = c^-, \quad (a_2x)^+ = b^+. \quad (4)$$

Как и  $p^+, p^-$  в (2), знаки “+”, “-” в парных уравнениях (3), (4) указывают на применение соответствующих проекторов или на принадлежность некоторым подмножествам.

В уравнениях (2)-(4) неизвестный элемент  $x$  отыскивается в соответствующем кольце  $R$  с факторизационной парой [6]. В случае, когда коэффициенты принадлежат одному кольцу  $R$  и обратимы в нем; правая часть задана, а неизвестный отыскивается в  $R$ , рассматриваемые парные уравнения (3), как и (2), дают общий вид парных уравнений в ассоциативном кольце  $R$  с факторизационной парой подколец  $(R^+, R^-)$  [5]-[8]. Парное абстрактное уравнение (4) в случае, когда коэффициенты принадлежат вообще разным кольцам с факторизационными парами и обратимы в этих кольцах изучено в [6]. Уравнения (4) важны в известных приложениях, в частности, к парным матричным и парным интегральным уравнениям.

Для понимания записи и уточнения смысла парных уравнений относительно неизвестного  $x$ , и формулировки установленных результатов потребуются следующие

## 1. Обозначения, определения и общие положения

**1.1.** Следуя [5]-[8] через  $R$  обозначим произвольное, вообще, некоммутативное и, возможно, неассоциативное кольцо с единицей  $e$ . Пусть  $p^+, p^-$  – коммутирующие проекторы, т. е. аддитивные и идемпотентные отображения  $R \rightarrow R$ . Положим:  $p^0 := p^+p^- (= p^-p^+)$ ,  $p_{\mp} := p^{\mp} - p^0$ . Для любого подмножества  $B \subseteq R$  обозначим  $B^{\mp,0} := p^{\mp,0}B$ ;  $B_{\mp} := p_{\mp}B$ ;  $B^* = B^+ + B^-$ ;  $B_* = B_+ + B_-$ . Для любого  $x \in R$  полагаем:  $x^{\mp,0} := p^{\mp,0}x$ ;  $x_{\mp} := p_{\mp}x$ . Обратный в  $R$  для обратимого в  $R$  элемента  $x \in R$  будем обозначать символом  $x'$ , снабженным, при необходимости, дополнительными. Для произвольных подмножеств  $A, B \subseteq R$  определим множество  $\text{inv}(A, B) := \{x \in A : x' \text{ существует и принадлежит } B\}$ . Положим  $\text{inv}(A, A) := \text{inv}A$ . Элемент  $u^+$  [- элемент  $v^0$ , элемент  $w^-$ ] назовем правильным [7], если  $u^+ \in \text{inv}R^+$  [ $v^0 \in \text{inv}R^0$ ,  $w^- \in \text{inv}R^-$ ].

**1.2.** Дополняя [9, 5, 6], где, в частности, развивается понятие факторизации структуры [7] и используя [8], введем следующие определения.



**Определение 1.** Пару подколец  $(R^+, R^-)$  [ $\equiv (R^-, R^+)$ ] кольца  $R$  с единицей  $e$  будем называть левой факторизационной парой (ЛФП) этого кольца  $R$ , если она порождена действующими в  $R$  коммутирующими проекторами  $p^+$ ,  $p^- : R^\mp := p^\mp R$ , и выполняются следующие аксиомы:

$$e \in R^0; \quad (5)$$

$$p^0 - \text{кольцевой гомоморфизм } R^+ \text{ и } R^- \text{ в } R^0; \quad (6)$$

$$R^+ R^- \subseteq R^*. \quad (7)$$

Аналогично вводится правая факторизационная пара [9]. Укажем, что факторизация структуры в  $R$  [7] здесь соответствует ЛФП  $R$ . Если  $R$  – коммутативное и, вообще, всякий раз, когда пара  $(R^+, R^-)$  является одновременно ЛФП и ПФП  $R$ , эту пару будем называть факторизационной парой (ФП) кольца  $R$ .

**Определение 2.** Всякое кольцо  $R$  с единицей  $e$ , рассматриваемое вместе с его фиксированной ФП  $(R^+, R^-)$  [ $\equiv (R^-, R^+)$ ] будем называть кольцом с факторизационной парой.

Нетривиальные примеры колец с ФП можно построить, отправляясь, например, от колец матриц; – колец абсолютно интегрируемых функций; – их соответствующих преобразований и других [1, 4-9].

1.3. Будем говорить ([5]-[6] ср. [7], что элемент  $a \in R$  допускает в  $R$  левую (правую) факторизацию (л.ф. (р.ф.)) по паре  $(R^+, R^-)$  если существуют элементы  $r^+ \in R^+$ ,  $s^0 \in R^0$ ,  $t^- \in R^-$ , такие, что

$$a = r^+ s^0 t^-, \quad (a = t^- s^0 r^+). \quad (8)$$

Множители  $r^+ \in R^+$ ,  $s^0 \in R^0 \in R^0$ ,  $t^- \in R^-$  в (8) называются плюс-, диагональным- и минус-факторами, соответственно. Левая (правая) факторизация (8) называется: правильной левой (правой) факторизацией (п.л.ф. (п.п.ф.)), если  $r^+ \in R^+$ ,  $s^0 \in R^0$ ,  $t^- \in R^-$  – правильные элементы; – нормированной левой (правой) факторизацией (н.л.ф. (н.п.ф.)), если  $t^0 = r^0 = e$ ; – нормированной правильной левой (правой) факторизацией (н.п.л.ф. (н.п.п.ф.)), если она является (п.л.ф. (п.п.ф.)) и  $t^0 = r^0 = e$ .

## 2. Главный результат

2.1. Когда задача разрешимости абстрактных парных уравнений (2)-(4) ставится в кольце  $R$  с факторизованной парой  $(R^+, R^-)$ , элемент  $x \in R^*$  будем считать искомым, а остальные элементы заданными. При этом считаем, что  $c^- \in R^-$ ,  $b^+ \in R^+$ , а коэффициенты предполагаем обратимыми в  $R$ . Под решением в  $R$  парного уравнения (2) понимается всякий элемент  $x \in R$ , результат подстановки которого в левую часть каждого из составляющих (2) уравнений с помощью операций из  $R$  и проекторов  $p^+$ ,  $p^-$  преобразуется в соответствующую правую часть. Аналогично для парных уравнений (3), (4).



Разрешимость абстрактного парного уравнения (2) в случае нормированной правильной факторизации характеризует следующая

**Теорема.** Пусть  $R = R^*$  — ассоциативное кольцо с ФП  $(R^+, R^-)$ , порождаемой коммутирующими проекторами  $p^+, p^-: R \rightarrow R$ .

Если коэффициенты абстрактного парного уравнения (2)  $a_{ij} \in \text{inv } R$ ;  $i, j = 1, 2$  такие, что элементы  $a_{11}a'_{21}$ ,  $a'_{12}a_{22}$  допускают в  $R$  н.п.л.ф. по паре  $(R^+, R^-)$ :

$$\begin{cases} a_{11}a'_{21} = r_1^+ s_1^0 t_1^-; \\ a'_{12}a_{22} = r_2^+ s_2^0 t_2^-, \end{cases} \quad (9)$$

тогда при любой правой части  $c^- \in R^-$ ,  $b^+ \in R^+$ , удовлетворяющей условию согласования:

$$[r_1^+ c^- r_2^+ s_2^0]^0 = [s_1^0 t_1^- b^+ t_2^-']^0, \quad (10)$$

это парное уравнение (2) имеет в  $R$  одно и только одно решение. Его можно определить по формуле:

$$x = a'_{11} r_1^+ ([s_1^0 t_1^- b^+ t_2^-']_+ + [r_1^+ c^- r_2^+ s_2^0]^-) t_2^- a'_{22}. \quad (11)$$

### 3. Некоторые следствия и замечания о приложениях

**3.1.** В рассматриваемой ситуации при  $a_{11} = a_1$ ,  $a_{22} = a_2$ ,  $a_{12} = a_{21} = e$  парное уравнение (2) в  $R$  с ФП  $(R^+, R^-)$  переходит в парное уравнение (3), рассматриваемое в том же кольце. При  $a_{11} = a_1$ ,  $a_{22} = a_2$ ,  $a_{12} = a_{22} = e$  парное уравнение (2) переходит в парное уравнение (4). С учетом этого замечания и очевидных рассуждений из теоремы заключаем, что справедливы такие следствия.

**Следствие 1.** Пусть при прочих условиях теоремы коэффициенты  $a_j \in \text{inv } R$  парного уравнения (3) допускают в  $R$ , соответственно, н.п.л.ф. по паре  $(R^+, R^-)$

$$a_j = r_j^+ s_j^0 t_j^-; \quad j = 1, 2. \quad (12)$$

Тогда при любой удовлетворяющей условию согласования

$$[s_1^0 r_1^+ c^- r_2^+]^0 = [t_1^- b^+ t_2^-' s_2^0]^0 \quad (13)$$

правой части  $c^- \in R^-$ ,  $b^+ \in R^+$  парное уравнение (3) имеет в  $R$  одно и только одно решение.

Его можно определить по формуле:

$$x = t_1^-' ([t_1^- b^+ t_2^-' s_2^0]_+ + [s_1^0 r_1^+ c^- r_2^+]^-) r_2^+'. \quad (14)$$

Отметим, что полученная сейчас как следствие теоремы формула решения (14) отличается от приведенной в доказанной автором ранее непосредственно



теореме 14 из работы [6] для уравнения (3) только обозначениями.

**Следствие 2.** Пусть при прочих условиях теоремы коэффициенты  $a_j \in \text{inv} R$ ;  $j = 1, 2$  парного уравнения (4) таковы, что элемент  $a_1 a'_2$  допускает в  $R$  н.п.л.ф.:

$$a_1 a'_2 = r^+ s^0 t^-.$$

Тогда при любой удовлетворяющей условию согласования

$$[r^+ c^-]^0 = [s^0 t^- b^+]^0 \quad (15)$$

правой части  $c^- \in R^-$ ,  $b^+ \in R^+$  парное уравнение (4) имеет в  $R$  одно и только одно решение. Его можно определить по формуле:

$$x = a'_1 r^+ ([s^0 t^- b^+]_+ + [r^+ c^-]^-). \quad (16)$$

В определенном смысле, формула (16) обобщает установленную для парных интегральных уравнений типа свертки (1) формулу (15) из работы [4] и формулу (3.4) из работы [2, с.68]. Методы доказательства теоремы и следствий 1,2 аналогичны использованным в [6].

**3.2.** Ряд приложений теоремы и следствий 1,2 можно получить, отправляясь от известных теорем о факторизации элементов в конкретных кольцах с ФП [1,4,7,10-14]. Например, для матричных парных уравнений, получающихся из (2)-(4) при  $R = R_{n \times n}$ ,  $n \geq 2$  [7,10] с ФП  $(R_{n \times n}^+, R_{n \times n}^-)$ . Здесь  $R_{n \times n}^{+/-}$  – подкольца нижних/верхних числовых треугольных матриц из  $R_{n \times n}$ . Аналогично, для парных интегральных уравнений типа свертки (1), получающихся из (4) при  $R = \tilde{L} (= \tilde{L}_{<0>})$  с ФП  $(\tilde{L}^+, \tilde{L}^-)$  [1, 2, 4]. Если ФП кольца  $R$  – каноническая [7, 8], то решение задачи факторизации элемента из  $R$  по ФП  $(R^+, R^-)$  упрощается. Следовательно, упрощается и решение парных уравнений (2)-(4). Ассоциативность кольца  $R$  существенна, так что, например, к парным векторным уравнениям, которые можно построить в  $R_3$ ,  $\tilde{R}_3$  [7], теорема не применима.

Применяя известные теоремы о правильной факторизации [1, 4], можно уже в скалярном случае парных интегральных уравнений (1) получать новые результаты. В частности, при  $R = \tilde{L}$ ,  $a_j = \delta - k_j$  ( $k_j(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ ;  $j = 1, 2$ ;  $\delta$  – формальная мультипликативная единица  $\tilde{L}[1]$ ) из формулы (14) вытекает формула (17) из работы [4], с. 806. На основе теоремы для (2) при этом получается соответствующая теорема существования и единственности для парного интегрального уравнения (1).

Основные результаты работы в числе других доложены автором, в частности, на международной конференции по функциональному анализу (Киев, 2001) [15].



## ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М.Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов. // Успехи мат. наук. – 1958. – 13. – вып. 5(83). – С. 3–120.
2. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. О парном интегральном уравнении и его транспонированном I. // Теорет. и прикл. математика. – 1958. – вып. 1. – С. 58–81.
3. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978. – 256 с.
4. Полетаев Г.С. Парное уравнение типа свертки с ядрами из различных банаховых алгебр. // Укр. мат. журн. – 1991. – 6. – С. 803–813.
5. Полетаев Г.С. К теории абстрактных аналогов некоторых уравнений типа свертки. // Математическая физика. – 1978. – вып. 24. – С. 104–106.
6. Полетаев Г.С. Абстрактный аналог парного уравнения типа свертки в кольце с факторизационной парой. // Укр. мат. журн. – 1991. – 43,9. – С. 1201–1213.
7. McNabb A., Schumitzky A. Factorization of Operators – I: Algebraic Theory and Examples. // J. Funct. Anal. – 1972. – 9, 3. – Р. 262–295.
8. Полетаев Г.С. Об однопроектных второго порядка уравнениях с правильно факторизуемыми коэффициентами в кольце с факторизационной парой. // Вестник Херсонского гос. техн. ун-та. – 2000. – N 2(8). – С. 191–195.
9. Полетаев Г.С. Об уравнениях и системах одного типа в кольцах с факторизационными парами. – К., 1988. – 20 с. (Препринт/АН УССР. Ин-т математики: 88.31).
10. Полетаев Г.С. О постановках, матричных моделях некоторых обратных задач механики балок и представлениях факторизованных матриц влияния. // Математическое моделирование в образовании, науке и промышленности. – Международная акад. наук высш. школы. – Санкт-Петербург, – 2000. – С. 146–148.
11. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов. // УМН. – 1958. – 13, 2(80). – С. 3–72.
12. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. – М.: Наука, 1967. – 508 с.
13. Чеботарев Г.Н. Уравнения Винера-Хопфа. – Казань: КГУ им. В.И. Ульянова-Ленина, 1974. – 104 с.







Об одном обобщении теоремы Боля-Бора для  
абстрактных функций, заданных на группеС. Д. Димитрова<sup>1</sup>, Д. Б. Димитров<sup>2</sup><sup>1</sup>Національний технічний університет "ХПИ", Україна,<sup>2</sup>Економічний університет, Варна, Болгарія

Рассмотрено разностное уравнение  $\Phi(hx) - \Phi(x) = F_h(x)$ . Решение  $\Phi(x)$  и правые части  $F_h(x)$ - функции, заданные на декартовом произведении групп со значениями в пространстве Фреше, не содержащем подпространство изоморфное пространству  $c_0$ . Показано, что если существует решение  $\Phi(x)$ , ограниченное на относительно плотном множестве, то оно является почти периодической (почти периодической по Леви-тану, почти автоморфной) функцией как только правая часть - п.п.ф. (Л-п.п.ф., п.а.ф.). 2000 Mathematics Subject Classification: 43A60.

Настоящая работа является продолжением исследований авторов по теореме Боля-Бора [10] об интегрировании почти периодических функций. В работах [4-7] эта теорема перенесена на криволинейные интегралы при условии независимости их от пути интегрирования. Чтобы перенести этот результат на произвольные группы воспользуемся приемом Р. Досса [14]: вместо интеграла рассмотрим разностное уравнение. Действительно, для криволинейного интеграла  $\Phi(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} P(u, v)du + Q(u, v)dv$ , не зависящего от пути интегрирования, выполняется равенство

$$\begin{aligned} \Phi(x+h, y+t) - \Phi(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x+h,y+t)} P(u, v)du + Q(u, v)dv - \\ &- \int_{(0,0)}^{(x,y)} P(u, v)du + Q(u, v)dv = \int_{(x,y)}^{(x+h,y+t)} P(u, v)du + Q(u, v)dv = \\ &= \int_{(0,0)}^{(h,t)} P(x+u, y+v)du + Q(x+u, y+v)dv = F_{h,t}(x, y) \end{aligned}$$



Таким образом, криволинейный интеграл  $\Phi(x, y): R^2 \rightarrow Y$  является решением следующего разностного уравнения:

$$\Phi(x + h, y + t) - \Phi(x, y) = F_{h,t}(x, y),$$

что есть частный случай уравнения

$$\begin{cases} \Phi(hx) - \Phi(x) = F_h(x) \\ \Phi(e) = 0 \end{cases}, \text{ где } x \in G, h \in G \quad (1)$$

для группы  $G = R^2$ .

Р. Досс доказал, что если решение уравнения (1) существует и ограничено и скалярные функции  $F_h(x)$  почти периодичны при любом  $h \in G$ , решение является почти периодической функцией (п.п.ф.). Б. Болес [1] обобщил результаты Р. Досса [14] и М.И. Кадеца [8] и показал, что теорема Р. Досса остается в силе для абстрактных почти периодических и ограниченных почти периодических по Левитану функций (L-п.п.ф.) со значениями в банаховом пространстве, не содержащем подпространство изоморфное пространству  $c_0$ . Теоремы Б. Болеса не решают вопрос об интеграле, если решение является неограниченной L-п.п. функцией. Д. Димитров [3] расширил класс пространств до пространств Фреше и уменьшил требования на ограниченность решения. М. Любарский [11] нашел естественную формулировку классической теоремы Боля-Бора для числовых функций.

В настоящей работе исследуются свойства решения разностного уравнения (1) со значениями в пространстве Фреше, не содержащем подпространства, изоморфные пространству  $c_0$ . Доказывается почти периодичность (почти периодичность по Левитану, почти автоморфность) при более слабых требованиях на ограниченность решения - ограниченность только на некотором относительно плотном множестве. Получено также, что для любого множества абстрактных п.п. (L-п.п., п.а.) функций можно ввести топологию на группе  $G$  так, что все функции множества будут непрерывными в этой топологии и любая непрерывная в этой топологии функция является п.п. (L-п.п., п.а.).

Рассмотрим разностное уравнение (1) на группе  $G$  и введем следующие обозначения: функция  $\Phi(x): G \rightarrow Y$  - решение уравнения (1); правые части  $F_h(x): G \rightarrow Y$  - заданные функции,  $h, x \in G$ ,  $e$  - единица группы  $G$ ;  $Y$  - полное линейное метрическое пространство (пространство Фреше);  $\{p_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$  - полная возрастающая система полунорм, задающая топологию на  $Y$ . Функция  $f(x)$  называется компактной, если ее множество значений является относительно компактным множеством в  $Y$ .

Далее, во всех рассуждениях будем считать, что пространство  $Y$  не содержит подпространств, изоморфных пространству  $c_0$  ( $Y \not\supset c_0$ ).

**Определение 1.** Множество  $E \subset G$  называется относительно плотным, если существует конечное число элементов  $\{a_i\}_{i=1}^n, a_i \in G, \{b_i\}_{i=1}^n, b_i \in G$  таких, что  $G = \bigcup_{i=1}^n (a_i E)$  и  $G = \bigcup_{i=1}^n (E b_i)$ .



**Определение 2.** Непрерывная абстрактная функция  $f(x): G \rightarrow Y$  называется почти периодической (п.п.) (по Бору), если для любых  $\varepsilon > 0$  и полунормы  $p(\cdot)$  множество  $B_{f,\varepsilon}$  относительно плотно, где

$$B_{f,\varepsilon} = \{\tau \in G : \sup_{a,b \in G} p[f(a\tau b) - f(ab)] < \varepsilon\}.$$

**Определение 3.** [6] Непрерывная абстрактная функция  $f(x): (G, \mathfrak{F}) \rightarrow Y$  называется почти периодической по Левитану (Л-п.п.), если для любых  $\varepsilon > 0$ , полунормы  $p(\cdot)$  и конечного множества  $N \subset G$ , существует относительно плотное множество  $E \subset G$  такое, что  $E^{-1}E \subset B_{N,f,\varepsilon}$ , где

$$B_{N,f,\varepsilon} = \{\tau \in G : \sup_{a,b \in N} p[f(a\tau b) - f(ab)] < \varepsilon\}.$$

Определение 3 для числовых функций дано А. Райхом [15]. Из теоремы 3 статьи А. Райха [15] для числовых функций следует эквивалентность данного определения определению  $L$ -почти периодических функций из статьи Б. Левина [9]. Эти эквивалентности верны и для абстрактных функций, как показано в работе [6].

**Определение 4.** [6] Компактная абстрактная функция  $f(x): G \rightarrow Y$  называется почти автоморфной (п.а.), если для любых  $\varepsilon > 0$ , полунормы  $p(\cdot)$  и конечного множества  $S \subset G$  существует множество  $B_\varepsilon$  со свойствами: 1)  $B_\varepsilon$  -относительно плотно; 2)  $B_\varepsilon$  -симметрично; 3) для любых  $s, t \in S$  и  $\sigma, \tau \in B_\varepsilon$ :  $p(f(s\sigma\tau^{-1}t) - f(st)) < 2\varepsilon$

Определение 4 для числовых почти автоморфных функций дано В. Вичем [16].

В дальнейшем нам будет нужна следующая лемма.

**Лемма 1.** [2] Пусть в ЛВП  $X$  (не обязательно секвенциально полном) существует ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ , обладающий следующими свойствами:

- 1)  $\sum_{i=1}^{\infty} |x^*, x_i| < \infty$  для всех  $x^* \in X^*$
- 2) последовательность его частичных сумм  $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$  не является последовательностью Коши.

Тогда в  $X$  существует последовательность векторов  $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ , такая что для любого конечного набора коэффициентов  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  и любой непрерывной полунормы выполнено неравенство

$$p_\alpha\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i\right) \leq C_\alpha \max |\lambda_i|, \quad C_\alpha < \infty,$$

а хотя бы для одной полунормы  $p_0(x)$ - выполнено неравенство

$$p_0\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i\right) \geq a \max |\lambda_i|, \quad a > 0.$$



В доказательстве основной теоремы данной статьи будет использована идея М. И. Кадеца - доказательство непрерывности свести к сходимости некоторого ряда. В работе [8] М. И. Кадец пользуется тождеством:

$$X\left(\sum_{k=1}^m \tau_k\right) - \sum_{k=1}^m X(\tau_k) = \int_0^{\tau_1} [x(\eta + \tau_2) - x(\eta)] d\eta + \\ + \int_0^{\tau_1 + \tau_2} [x(\eta + \tau_3) - x(\eta)] d\eta + \dots + \int_0^{\tau_1 + \dots + \tau_{m-1}} [x(\eta + \tau_m) - x(\eta)] d\eta,$$

где  $X(t) = \int_0^t x(\eta) d\eta$ ,  $x(t)$  ( $-\infty < t < \infty$ ) - функция со значениями в банаховом пространстве. Басит Болес [1] использует следующее тождество:

$$f(t_{n_m} \dots t_{n_1}) - \sum_{i=1}^m f(t_{n_i}) = [f(t_{n_m} \dots t_{n_1}) - f(t_{n_m}) - f(t_{n_{m-1}} \dots t_{n_1})] + \\ + [f(t_{n_{m-1}} \dots t_{n_1}) - f(t_{n_{m-1}}) - f(t_{n_{m-2}} \dots t_{n_1})] + \dots + [f(t_{n_2} t_{n_1}) - f(t_{n_2}) - f(t_{n_1})],$$

где  $f(t)$  - функция со значениями в банаховом пространстве, определенная на группе.

В цитированных работах рассматривались только ограниченные решения. Чтобы уменьшить ограничения на решение и допустить к рассмотрению неограниченные функции, мы откажемся от использования выше упомянутых тождеств и сконструируем новое тождество, которое относится к правым частям уравнения (1).

**Лемма 2.** Если уравнение (1) имеет решение, то для правых частей имеет место тождество:

$$F_{h_1 h_2 h_3 \dots h_n}(x) = \sum_{s=1}^{n-1} [F_{h_1 h_2 \dots h_{s-1} h_s}(h_{s+1} x) - F_{h_1 h_2 \dots h_{s-1} h_s}(x)] + \sum_{s=1}^n F_{h_s}(x) \quad (2)$$

*Доказательство.* В равенстве (1) последовательно заменим  $h$  на  $h_2$ ,  $h$  на  $h_1 h_2$ , а затем  $h$  на  $h_1$ , а  $x$  на  $h_2 x$  и получаем равенства:

$$\Phi(h_2 x) - \Phi(x) = F_{h_2}(x)$$

$$\Phi(h_1 h_2 x) - \Phi(x) = F_{h_1 h_2}(x)$$

$$\Phi(h_1 h_2 x) - \Phi(h_2 x) = F_{h_1}(h_2 x)$$

Складывая первое и третье равенство и из суммы вычитая второе, получаем

$$F_{h_1 h_2}(x) = F_{h_2}(x) + F_{h_1}(h_2 x) = F_{h_1}(h_2 x) - F_{h_1}(x) + \sum_{i=1}^2 F_{h_i}(x) \quad (3)$$



В равенстве (3) заменим  $h_1$  на  $h_1 h_2$ , а  $h_2$  на  $h_3$ .

$$F_{h_1 h_2 h_3}(x) = F_{h_1 h_2}(h_3 x) - F_{h_1 h_2}(x) + F_{h_1 h_2}(x) + F_{h_3}(x) \quad (4)$$

и так далее

$$F_{h_1 h_2 \dots h_n}(x) = F_{h_1 h_2 \dots h_{n-1}}(h_n x) - F_{h_1 h_2 \dots h_{n-1}}(x) + F_{h_1 h_2 \dots h_{n-1}}(x) + F_{h_n}(x) \quad (5)$$

Тождество (2) выводится суммированием полученных равенств. Лемма доказана.

В дальнейшем мы будем предполагать выполнение условия (2) для правых частей уравнения (1).

Обозначим через  $H$  множество общих периодов семейства функций  $f_\alpha : G \rightarrow Y$ ,  $\alpha \in A$

$$H = \{h \in G : f_\alpha(aha^{-1}x) = f_\alpha(x), \quad \forall \alpha, \forall x \in G, \forall \alpha \in A\}.$$

Нетрудно проверить, что множество  $H$  является нормальной подгруппой группы  $G$ .

**Лемма 3.** Пусть задано уравнение (1) и решение  $\Phi(x)$  ограничено на множестве  $H$ . Тогда, уравнение (1) можно корректно определить на фактор-группе  $G/H$ , где  $H$  - нормальная подгруппа общих периодов семейства функций  $F_\tau(x)$ ,  $\tau \in G$ .

*Доказательство.* Сначала заметим, что

$$\Phi(h) = F_h(e);$$

$$\Phi(h^2) - \Phi(h) = F_h(h) = F_h(e), \quad h \in H; \quad \Phi(h^2) = \Phi(h) + F_h(e) = 2\Phi(h)$$

$$\Phi(h^3) - \Phi(h^2) = F_h(h^2) = F_h(h) = F_h(e); \quad \Phi(h^3) = \Phi(h^2) + F_h(e) = 3\Phi(h) \dots$$

$$\Phi(h^n) = n\Phi(h); \quad p(\Phi(h^n)) = np[\Phi(h)] \leq K_p, \quad \forall n$$

$$\Rightarrow p(\Phi(h)) = 0, \quad \forall p(\cdot) \Rightarrow \Phi(h) = 0, \quad h \in H.$$

$$\Rightarrow \Phi(th) - \Phi(h) = F_t(h) = F_t(e) = \Phi(t); \quad \Phi(th) = \Phi(h) + \Phi(t) = \Phi(t).$$

При  $h = t^{-1}h_1t$   $\Phi(h_1t) = \Phi(t)$ ,  $h_1 \in H$ . Следовательно,  $F_{h_1}(x) = 0$ ,  $\forall h_1 \in H$ . Роль новой единицы фактор-группы  $G/H$  будет выполнять подгруппа  $H$ . Покажем, что если  $xy^{-1} \in H$ , правая часть уравнения (1) принимает равные значения. Действительно,  $xy^{-1} \in H \Rightarrow x = hy$ , где  $h \in H$  и

$$F_\tau(x) = F_\tau(hy) = F_\tau(y),$$

т.к.  $h$ -период для  $F_\tau$ . Докажем, что

$$F_\tau(x) = F_\eta(x), \quad \text{если} \quad \tau\eta^{-1} \in H.$$

Действительно,  $\forall \mu, \nu \in G$  справедливо тождество (3):

$$F_{\mu\nu}(x) = F_\nu(x) + F_\mu(\nu x), \quad \tau = \mu\nu, \quad \eta = \nu, \quad \tau\eta^{-1} = \mu \in H,$$



$$F_{\tau\eta^{-1}}(\eta x) = 0, \quad F_\tau(x) = F_\eta(x) + F_{\tau\eta^{-1}}(\eta x) = F_\eta(x).$$

Таким образом показано, что уравнение (1) можно рассматривать на фактор-группе  $G/H$ .

**Замечание 1.** В дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые функции (независимо от того, являются ли правыми частями уравнения (1) или нет) не имеют общих периодов. Иначе, мы бы рассмотрели их на фактор-группе  $G/H$ .

**Лемма 4.** Если задано семейство абстрактных п.п. ( $L$ -п.п.) функций  $f_\alpha(x)$ ,  $\alpha \in A$  на топологической группе  $G$ , то существует топология на группе  $G$ , в которой непрерывны все функции этого семейства и любая функция  $g(x)$ , которая непрерывна в этой топологии и в исходной топологии, является п.п. ( $L$ -п.п.) на группе  $G$ .

**Доказательство.** Пусть задано семейство  $L$ -п.п. функций  $f_\alpha(x)$ ,  $\alpha \in A$  на топологической группе  $(G, \mathfrak{F})$ . На группе  $G$  введем новую топологию  $\mathfrak{F}_N$  ( $\mathfrak{F}_N \prec \mathfrak{F}$ ) при помощи окрестностей

$$B_{N,f,\varepsilon,\sigma,\Delta} = \{\tau \in G : \sup_{n \in \Delta} \sup_{\alpha \in \sigma} \sup_{a,b \in N} p_n[f_\alpha(a\tau b) - f_\alpha(ab)] < \varepsilon\}$$

где  $N, \sigma, \Delta$  произвольные конечные множества  $N \subset G, \sigma \subset A, \Delta \subset B$ . Множества  $B_{N,f,\varepsilon,\sigma,\Delta}$  являются конечными сечениями множеств вида  $B_{N,f,\varepsilon}$ . Они относительно плотны и любые их конечные пересечения относительно плотны [6]. Множества  $B_{N,f,\varepsilon,\sigma,\Delta}$  образуют полную систему окрестностей единицы группы  $G$  [6]. Так как функции  $f_\alpha(x)$  не имеют общих периодов, то топология  $\mathfrak{F}_N$  хаусдорфова. Функции  $f_\alpha(x)$  непрерывны в ней. Если функция  $g(x)$  непрерывна в этой новой топологии, то для множества  $B_{N,g,\varepsilon}$  существует окрестность единицы  $B_{M,f,\delta,\sigma,\Delta}$  такая, что  $B_{N,g,\varepsilon} \supset B_{M,f,\delta,\sigma,\Delta}$ . Используя тот факт, что вектор, все компоненты которого  $L$  — п.п. функции, со значениями в декартовом произведении  $Y \times Y \times \dots \times Y$  тоже  $L$  — п.п. ф. [6], получаем, что существует относительно плотное множество  $E$  такое, что

$$B_{N,g,\varepsilon} \supset B_{M,f,\delta,\sigma,\Delta} \supset E^{-1}E, \quad \varepsilon > 0, \delta > 0, N \subset G, M \subset G,$$

$M, N, \sigma, \Delta$  — конечные множества группы  $G$ .

Это означает, что функция  $g(x)$   $L$ -почти периодическая.

Если функции почти периодичны, то топология  $\mathfrak{F}_U$  вводится с помощью окрестностей

$$B_{f,\varepsilon,\sigma,\Delta} = \{\tau \in G : \sup_{n \in \Delta} \sup_{\alpha \in \sigma} \sup_{a,b \in G} p_n[f_\alpha(a\tau b) - f_\alpha(ab)] < \varepsilon\}$$

Доказательство проводится аналогично.

**Замечание 2.** Лемма 4 верна и для почти автоморфных функций.

В этом случае исходная топология не нужна. От функции  $g(x)$  требуется непрерывность в топологии  $\mathfrak{F}_N$  и относительная компактность множества ее значений. Доказательство аналогично доказательству для  $L$  — п.п. функций.



**Лемма 5.** Пусть задано уравнение (1) с непрерывной правой частью. Если решение  $\Phi(x)$  уравнения (1) существует и непрерывно в точке  $x_0$ , то оно непрерывно в любой точке группы  $G$ .

*Доказательство.* Возьмем произвольную точку

$$x \in G, \quad x = \theta x_0, \quad \text{где } x_0, \theta \in G.$$

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \Phi(hx) - \Phi(x) &= \Phi(h\theta x_0) - \Phi(\theta x_0) = \Phi(\theta\theta^{-1}h\theta x_0) - \Phi(\theta^{-1}h\theta x_0) - [\Phi(\theta x_0) - \\ &- \Phi(x_0)] + \Phi(\theta^{-1}h\theta x_0) - \Phi(x_0) = F_\theta(\theta^{-1}h\theta x_0) - F_\theta(x_0) + \Phi(\theta^{-1}h\theta x_0) - \Phi(x_0). \end{aligned}$$

Положим  $m = \theta^{-1}h\theta$  и получим тождество

$$\Phi(hx) - \Phi(x) = F_\theta(mx_0) - F_\theta(x_0) + \Phi(mx_0) - \Phi(x_0) \quad (6)$$

Если  $V$ -окрестность единицы в топологической группе  $G$ , то  $\theta^{-1}V\theta$  также является окрестностью единицы. Утверждение леммы 5 непосредственно следует из равенства (6).

Пусть  $(G, \mathfrak{S}_1)$  такая топологическая группа, в которой окрестности являются относительно плотными множествами.

**Лемма 6.** Если существует непрерывное решение  $\Phi(x)$  уравнения (1) на  $(G, \mathfrak{S}_1)$  с компактной правой частью  $F_h(x)$  при любом фиксированном  $h \in G$ , то оно является компактной функцией.

*Доказательство.* По заданной полунорме  $p$  и произвольном  $\varepsilon > 0$  можно найти окрестность единицы  $U_\varepsilon$  группы  $G$  такую, что

$$p(\Phi(\xi) - \Phi(e)) < \varepsilon, \quad \xi \in U_\varepsilon.$$

Возьмем произвольное  $x \in G$ . Так как

$$G = \bigcup_{i=1}^n a_i U_\varepsilon,$$

то  $\exists i$  такое, что  $x = a_i \xi$ ,  $\xi \in U_\varepsilon$ ,  $a_i \in G$ . Множество  $\overline{F_{a_i}(G)}$  является компактом. Из равенства

$$\Phi(x) - F_h(x) = \Phi(\xi) - \Phi(e)$$

следует, что для множества

$$\{\Phi(x)\}_{x \in G} \text{ множество}$$

$$\bigcup_{i=1}^n \overline{F_{a_i}(G)} = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{x \in G} \{F_{a_i}(x)\}$$

является компактной  $\varepsilon$ -сетью. В любом пространстве Фреше замкнутое множество, обладающее компактной  $\varepsilon$ -сетью, является компактом. Следовательно,



множество  $\overline{\{\Phi(x)\}_{x \in G}}$  является компактом, т.е. решение  $\Phi(x)$  является компактной функцией.

**Лемма 7.** Пусть задано уравнение (1) на  $(G, \mathfrak{F})$  с непрерывной правой частью  $F_h(x)$ , для каждого  $h \in G$ . Из ограниченности решения  $\Phi(x)$  уравнения (1) на некотором относительно плотном множестве  $E$  следует его ограниченность в некоторой окрестности единицы группы  $G$ . Окрестность зависит от выбора полунормы.

*Доказательство.* Так как  $E$  относительно плотное множество, то

$$\exists \{a_i\}_{i=1}^n, \quad a_i \in G: \quad G = \bigcup_{i=1}^n (a_i E).$$

Возьмем произвольное  $x \in G$ , тогда  $\exists i: x = a_i \xi, \xi \in E$ . Рассмотрим

$$\Phi(x) = \Phi(\xi) - (\Phi(\xi) - \Phi(x)) = \Phi(\xi) - [\Phi(a_i^{-1}x) - \Phi(x)] = \Phi(\xi) - F_{a_i^{-1}}(x)$$

Так как правые части  $F_{a_i^{-1}}(x)$  непрерывны, то для заданной полунормы  $p$  выбираем окрестность единицы  $U$  так, что

$$\max_{1 \leq i \leq n} p(F_{a_i^{-1}}(x)) < M_2, \quad x \in U.$$

Пусть

$$p(\Phi(\xi)) \leq M_1.$$

Тогда

$$\forall x \in U \quad p(\Phi(x)) \leq p(\Phi(\xi)) + p(F_{a_i^{-1}}(x)) \leq M_1 + M_2.$$

Лемма доказана.

**Теорема 1.** Пусть на топологической группе  $(G, \mathfrak{F})$  задано разностное уравнение (1) с непрерывной по  $x$  правой частью  $F_h(x)$ . Если существует решение  $\Phi(x)$  уравнения (1), которое ограничено на некотором относительно плотном множестве, то оно непрерывно на  $(G, \mathfrak{F})$ .

*Доказательство.* Допустим, что в топологии  $\mathfrak{F}$  решение  $\Phi(x)$  терпит разрыв в единице, т.е.  $\exists \varepsilon_0 > 0$ , последовательность  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow e$  и полунорма  $p_{k_0}$  такие, что

$$p_{k_0}(\Phi(t_n)) \geq \varepsilon_0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

Возьмем полунорму  $p_1$ . В силу ограниченности решения  $\Phi(x)$ , согласно лемме 7 найдем окрестность  $U_1$ :

$$p_1(F_x(e)) = p_1(\Phi(x)) < C_1 \quad \text{при} \quad x \in U_1$$

Выберем  $t_{n_1} \in U_1$  и положим  $h_1 = t_{n_1}$ . Из непрерывности функции  $F_{h_1}(x)$  и сходимости последовательности  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow e$  выбираем  $h_2 = t_{n_2}$  так чтобы

$$\begin{cases} h_2 \in U_1, & h_1 h_2 \in U_1 \\ p_1(F_{h_1}(h_2) - F_{h_1}(e)) < 1/2 \end{cases}$$



Пусть на  $n$ -том этапе выбраны элементы  $h_1, h_2, \dots, h_n$ . Из сходимости последовательности  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow e$  и непрерывности  $F_h(x)$  можно выбрать  $h_{m+1} = t_{n_{m+1}}$  так чтобы:

$$\begin{cases} h_{m+1} \in U_1, & \pi h_{m+1} \in U_1 \\ \sup_{\pi} p_1(F_{\pi}(h_{m+1}) - F_{\pi}(e)) < 1/2^m, \end{cases}$$

где  $\pi$  пробегает все частичные произведения элементов  $h_i$ ;  $\pi = h_p h_q \dots h_r$ ,  $1 \leq p < q < \dots < r \leq m$ ,  $p, q, \dots, r, m \in N$ . Выбор можно продолжить неограничено. Монотонность норм обеспечивает это неравенство для всех полунорм с номерами меньших  $m$ . Для любой подпоследовательности  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  последовательности  $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$  выполняются условия:

$$\begin{cases} g_1 g_2 \dots g_k \in U_1 \\ p_1(F_{g_1 g_2 \dots g_k}(g_{k+1}) - F_{g_1 g_2 \dots g_k}(e)) < 1/2^k \end{cases} \quad (8)$$

Из неравенства (8) следует сходимость рядов вида:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_1[F_{g_1 g_2 \dots g_k}(g_{k+1}) - F_{g_1 g_2 \dots g_k}(e)] < K_1, \quad (9)$$

где  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  произвольная подпоследовательность последовательности  $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ . Из условия теоремы следует, что  $p_1[F_h(e)] < C_1$  при любом  $h = g_1 g_2 \dots g_k$ . Из тождества (2) следует:

$$p_1\left[\sum_{k=1}^m F_{g_k}(e)\right] \leq p_1[F_{g_1 g_2 \dots g_m}(e)] + \sum_{k=1}^{m-1} p_1[F_{g_1 \dots g_k}(g_{k+1}) - F_{g_1 \dots g_k}(e)] < C_1 + K_1 \quad (10)$$

Из последовательности  $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$  выбираем подпоследовательность  $\{h_i^{(2)}\}_{i=1}^{\infty}$ , для которой верны неравенства (8)-(10) с заменой полунормы  $p_1$  на  $p_2$ , окрестности  $U_1$  на  $U_2$ . Таким образом, процесс можно продолжить и для каждой полунормы  $p_k$  и окрестности  $U_k$  будет найдена последовательность  $\{h_i^{(k)}\}_{i=1}^{\infty}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Используя диагональный процесс Кантора выбираем последовательность  $\{t_i\}_{i=1}^{\infty} = \{h_i^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ ,  $t_i = H_i^{(i)}$ . Любая подпоследовательность  $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$  последовательности  $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$  содержит не более  $s$  элементов, которые не принадлежат  $\{h_i(s)\}_{i=1}^{\infty}$  и поэтому для некоторой константы  $T_s$  выполнено:

$$p_s\left(\sum_{i=1}^m F_{\xi_i}(e)\right) < T_s, \quad \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \{t_i\}_{i=1}^{\infty}.$$

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} F_{h_n}(e)$  сходится слабо абсолютно. Из неравенства (7) вытекает, что частичные суммы этого ряда  $\sum_{n=1}^m F_{h_n}(e)$  не образуют последовательность Коши. Таким образом выполнены условия леммы 1. Продолжая рассуждение как в теореме 1 работы [2] получаем, что пространство  $Y$  содержит подпространство, изоморфное пространству  $c_0$ , а это противоречит условию теоремы.



Это доказывает, что решение непрерывно в единице. Непрерывность решения  $\Phi(x)$  в любой точке следует из леммы 5.

**Замечание 3.** Ограниченность решения  $\Phi(x)$  на некотором относительно плотном множестве  $E$  позволяет рассматривать и неограниченные решения.

**Теорема 2.** Пусть на группе  $G$  задано разностное уравнение (1) с почти периодической для каждого  $h$  правой частью  $F_h(x)$ . Если существует решение  $\Phi(x)$  уравнения (1) и оно ограничено на некотором относительно плотном множестве, то оно почти периодически.

**Доказательство.** На  $G$  введем топологию  $\mathfrak{S}_U$ . Во введенной топологии функции  $F_h(x)$  непрерывны. Окрестности  $B_{\sigma, \varepsilon}$  являются относительно плотными множествами. Согласно лемме 7 решение  $\Phi(x)$  ограничено в некоторой окрестности единицы  $U$  группы  $G$ , которая является относительно плотным множеством. Из теоремы 1 следует непрерывность  $\Phi(x)$  в топологии  $\mathfrak{S}_U$ , что согласно лемме 4, означает почти периодичность функции  $\Phi(x)$ .

**Замечание 4.** В работе [13] Л. Америко приводит пример абстрактной почти периодической функции  $f(t) = \{\frac{1}{n} \cos \frac{t}{n}\}_{n=1}^{\infty}$  со значениями в пространстве  $c_0$ . Интеграл от этой функции - ограниченная функция, но не является п.п. функцией. Таким образом, в теореме 2 выделен максимальный класс пространств, в котором теорема верна.

**Теорема 3.** Пусть на группе  $G$  задано уравнение (1) с почти периодической по Левитану правой частью  $F_h(x)$ . Тогда, если существует ограниченное на относительно плотном множестве  $E$  решение  $\Phi(x)$  уравнения (1), оно  $L$ -почти периодически.

**Доказательство.** На группе  $G$  введем топологию  $\mathfrak{S}_N$ . Далее доказательство аналогично теореме 2. Получаем, что решение  $\Phi(x)$  непрерывно в топологии  $\mathfrak{S}_N$ , значит, согласно лемме 4, является  $L$ -п.п. функцией.

**Замечание 5.** Числовые функции  $P$  и  $Q$

$$P(x, y) = \frac{\sin x + \sqrt{2} \sin \sqrt{2} x}{(4 + \cos x + \cos \sqrt{2} x + \cos y + \cos \sqrt{3} y)^2},$$

$$Q(x, y) = \frac{\sin y + \sqrt{3} \sin \sqrt{3} y}{(4 + \cos x + \cos \sqrt{2} x + \cos y + \cos \sqrt{3} y)^2}$$

являются  $L$ -почти периодически. Криволинейный интеграл

$$\Phi(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} P dx + Q dy = \frac{1}{4 + \cos x + \cos \sqrt{2} x + \cos y + \cos \sqrt{3} y} - \frac{1}{8}$$

является неограниченной  $L$ -п.п. функцией. Так как функция  $\Phi(x, y)$  ограничена на относительно плотном множестве

$$A = \{(x, y) : |\Phi(x, y) - \Phi(0, 0)| < 1\}$$



то приведенный пример показывает, что требования теоремы 4 допускают к рассмотрению и неограниченные решения.

**Теорема 4.** Пусть на группе  $G$  задано уравнение (1) с почти автоморфной правой частью  $F_h(x)$ . Тогда, если существует ограниченное на относительно плотном множестве  $E$  решение  $\Phi(x)$  уравнения (1), то оно почти автоморфно.

*Доказательство* аналогично теореме 3. Вместо леммы 4 используется замечание 2. Компактность функции  $\Phi(x)$  следует из леммы 6.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Болес Б. Р. Обобщение двух теорем М.И.Кадеца о неопределенном интеграле абстрактных почти периодических функций. // Мат. заметки. – 1971. – 3. – С. 311-320.
2. Димитров Д. Б. Об абстрактных функциях со значениями в ЛВП, не содержащем подпространства, изоморфного. // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1972. – 16. – С. 159-166.
3. Димитров Д. Б. О непрерывности решений разностного уравнения. // Математика и математическое образование, София, БАН. – 1974. – С. 97-101.
4. Димитров Д.Б., Димитрова С. Д.. Почти автоморфность на криволинейного интеграла от почти автоморфных функций. // Известия на Съюза на учените- Русе. - Серия 5 “Математика, информатика и физика”. – Т. 1. – 2001. – С. 32- 38.
5. Димитров Д.Б., Димитрова С. Д. Почти автоморфность криволинейного интеграла в произвольных метрических пространствах Фреше. // Известия, ЭУ-Варна. – 1. – 2001. – С. 35-46.
6. Димитров Д.Б., Димитрова С. Д., Эквивалентные определения абстрактных  $L$ -почти периодических и почти автоморфных функций, заданных на группе. // Известия, ЭУ-Варна. – 2. – 2002. – С. 19-28.
7. Димитрова С. Д. Криволинейный интеграл от почти периодических и почти периодических по Левитану абстрактных функций. // Вісник Харківського національного університету. Серія “Математика, прикладна математика і механіка”. – 514. – 2001. – С. 106-114.
8. Кадец М. И. Об интегрировании почти периодических функций со значениями в пространстве Банаха. // Функциональный анализ и его приложения. – 1969. – Т. 3,3. – С. 71-74.



9. Левин Б. Я. О почти периодических функций Левитана. // УМЖ. – 1949. – 1. – С. 49-101.
10. Левитан Б. М. Почти периодические функции. – ГИТТЛ, 1953. – 397 с.
11. Любарский М. Г. О неопределенном интеграле почти периодической по Левитану функции. // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – ХГУ, – 1972. – С. 139-150.
12. Робертсон А. Робертсон В. Топологические векторные пространства. – М.: "Мир", 1967. – 257 с.
13. Amerio L., Prouse G. Almost-Periodic Functions and Functional Equations. // N.Y., Van Nostrand Reinhold Company, 1971. – 172 p.
14. Doss R. On bounded functions with almost-periodic differences. // Proc. Amer. Math. Soc. – 12. – 1961. – 3. – P. 488-489.
15. Reich A. Prakompakte Gruppen and Fastperiodizitat. // Math. Z. – 1970. – P. 218-234.
16. Veech W. On a theorem of Bohnert. // Annals of Mathematics, second series, vol.86, 1, July. – 1967. – P. 719-751.



## Inertial manifolds for reaction-diffusion equation on thin two-layer domains

A. M. Rekalo

*Kharkov National University, Ukraine*

The paper is concerned with the asymptotic behavior of solutions to semilinear parabolic equation on 2D thin two-layer domains. The problems of such kind may arise as models for reaction-diffusion processes in thin sandwich films separated with permeable membranes. It is shown that there exists an invariant finite dimensional  $C^1$ -manifold which exponentially attracts as  $t \rightarrow \infty$  every solution to the problem. In other words, the initial infinite-dimensional dynamical system asymptotically can be described in terms of a finite system of ordinary differential equations.

*2000 Mathematics Subject Classification 35K57.*

### 1. Introduction

Consider the semilinear parabolic equation

$$\partial_t u_i = \Delta u_i - \alpha u_i + f(u_i), \quad t > 0, \quad (1.1)$$

on the two-dimensional two-layer domain  $\Omega_{a,\varepsilon} = \Omega_{1,a_1,\varepsilon} \cup \Omega_{2,a_2,\varepsilon}$ , where

$$\Omega_{1,a_1,\varepsilon} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < y < g_1(x, \varepsilon), \quad 0 < x < l\},$$

$$\Omega_{2,a_2,\varepsilon} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -g_2(x, \varepsilon) < y < 0, \quad 0 < x < l\},$$

$\varepsilon \in [0, 1]$ ,  $l > 0$ , and  $g_1, g_2 : [0, l] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  are positive functions of class  $C^2$  such that

$$g_i(x, 0) \equiv a_i > 0.$$

We supplement (1.1) with the initial condition

$$u|_{t=0} = u_0, \quad (1.2)$$

and boundary conditions of the form

$$\left( \frac{\partial}{\partial n} + K(x) \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega_\varepsilon \setminus \Gamma} = 0, \quad (1.3)$$



where

$$K(x) = \begin{pmatrix} k(x) & -k(x) \\ -k(x) & k(x) \end{pmatrix}$$

with the function  $k(x) \in C^1[0, l]$  such that

$$\inf_{x \in [0, l]} k(x) > 0, \quad (1.4)$$

$\Gamma = \partial\Omega_{1,a_1,\varepsilon} \cap \partial\Omega_{2,a_2,\varepsilon}$  is the interface boundary,  $u_i(x, y) \equiv u(x, y)$  for  $(x, y) \in \Omega_{i,a_i,\varepsilon}$ , and finally  $n$  is the unit outward normal to  $\partial\Omega_{i,a_i,\varepsilon}$ .

We assume that  $\alpha > 0$ ,  $f \in C^2(\mathbf{R})$  and that there exist  $\gamma, C > 0$  such that

$$|f''(u)| \leq C(1 + |u|^\gamma), \quad u \in \mathbf{R}. \quad (1.5)$$

Function  $G(u) = \int_0^u f(v) dv$  is assumed to satisfy the following requirements.

$$G(u) \leq \delta u^2 + C_\delta, \quad u \in \mathbf{R}, \quad (1.6)$$

for every  $\delta > 0$  with some  $C_\delta > 0$ , and

$$uf(u) - \xi G(u) \leq \zeta, \quad u \in \mathbf{R}, \quad (1.7)$$

for some  $\xi, \zeta > 0$ . Conditions (1.4)–(1.7) ensure that there exists a compact dissipative semigroup generated by the problem (1.1)–(1.3) (see Theorem 2.1).

In the present paper we study the asymptotic dynamics of the solutions to (1.1)–(1.3) when the domain  $\Omega_\varepsilon$  is getting thin in the  $y$ -direction. We show that the semigroup associated with the problem (1.1)–(1.3) possesses an inertial manifold (IM) of class  $C^1$ , i.e. an invariant finite-dimensional  $C^1$ -smooth manifold which attracts with an exponential speed every solution to (1.1)–(1.3) (for a precise definition of IM see Def. 3.1 in Section 3). This result manifests that the asymptotic behavior of our infinite-dimensional dynamical system can be well described by a smooth flow on a finite-dimensional vector space.

The problem (1.1)–(1.3) was studied from a different viewpoint in [1] where it was shown that under the assumption of thinness of the domain every solution to (1.1)–(1.3) stabilizes to a single equilibrium point. We also refer the interested reader to the papers [2] and [3] where similar interface problems are treated in the case of thin uncurved domains.

There has been intensive study of reaction-diffusion equations on thin domains starting from the basic work of Hale and Raugel [4]. They used IM of class  $C^1$  to show that the semigroup defined by the scalar parabolic equation

$$\partial_t u = \Delta u + f(u), \quad t > 0, (x, y) \in \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad t > 0, (x, y) \in \partial\Omega,$$

on thin (one-layer) domain  $\Omega$  is topologically equivalent to the semigroup of some one-dimensional reaction-diffusion equation on the corresponding global attractors.



The construction of IM in [4] relies upon the infinite-dimensional version of the Hadamard method proposed by Mallet-Paret and Sell [5]. In the present paper an inertial manifold theorem is obtained by an application of a modified version of the Lyapunov-Perron approach (see [6] and the references therein). It seems that in the context of thin domains problems the latter method saves one from some tedious technicalities which Hale and Raugel had to encounter. This version of Lyapunov-Perron method is basically an application of the contraction principle in some space of functions of controlled exponential growth. However, a direct application of the contraction principle is impossible in our situation. The nonlinear map which defines the IM is not a contraction for 2D reaction-diffusion equations no matter how thin the domain  $\Omega$  is. The proof of Theorem 3.1 which is a technical core of this paper is essentially devoted to overcoming this obstacle.

Our main result is contained in the following statement.

**Theorem 1.1** *Let conditions (1.4)–(1.8) be satisfied. Then there exist  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\delta > 0$ ,  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(a_1, a_2)$ , such that for every  $0 < a_1, a_2 < \delta$ ,  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  the evolutionary semigroup  $S_{a,\varepsilon}(t)$ ,  $t \geq 0$ , generated in the space  $H^1(\Omega_{1,a_1,\varepsilon}) \oplus H^1(\Omega_{2,a_2,\varepsilon})$  by system (1.1)–(1.3) possesses an  $n$ -dimensional inertial manifold of class  $C^1$ .*

The paper is organized as follows. In the next section we rewrite problem (1.1)–(1.3) as an abstract parabolic equation, give the corresponding well-posedness result and show how to apply our general theorem on existence (Theorem 3.1) of IM in our situation. Section 3 is entirely devoted to a proof of existence of IM for abstract parabolic equations.

## 2. Functional setting of the problem

The primary aim of this section is to write (1.1)–(1.3) in the form of a Cauchy problem in a Hilbert space

$$\partial_t u + Au = B(u), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0, \quad (2.1)$$

with a self-adjoint positive operator  $A$  and ‘weakly nonlinear’ mapping  $B$ . We then verify that (2.1) defines a global evolutionary semigroup in a suitable phase space which satisfies in the case of ‘thin’ domain the sufficient conditions for existence of IM (see Theorem 3.1 in the next section).

Let us introduce the Sobolev spaces

$$H^s = H_{a,\varepsilon}^s = H^s(\Omega_{1,a_1,\varepsilon}) \oplus H^s(\Omega_{2,a_2,\varepsilon}),$$

where  $a_1, a_2 > 0$ ,  $\varepsilon \in (0, 1]$ ,  $s \geq 0$ .

Consider the bilinear form  $t_{a,\varepsilon}(\cdot, \cdot)$  on  $H^1$

$$t_{a,\varepsilon}(u, v) = \int_{\Omega_{a,\varepsilon}} ((\nabla u, \nabla v) + \alpha uv) dx dy + \sum_{i,j=1}^2 (-1)^{i+j} \int_{\Gamma} (k \gamma_j u_j \gamma_i v_i)(\sigma) d\sigma,$$



where the function  $k(x) \in C^1(\Gamma)$  is the one appearing in (1.3), and the trace mapping  $u_i \mapsto \gamma_i u_i$  is a continuous operator from  $H^1(\Omega_{i,a_i,\varepsilon})$  onto  $H^{1/2}(\partial\Omega_{i,a_i,\varepsilon})$ ,  $i = 1, 2$ . The bilinear form  $t_{a,\varepsilon}(\cdot, \cdot)$  is closed and symmetric in the Hilbert space  $H = L^2(\Omega)$ . Hence, the triple  $\{H^1, H, t_{a,\varepsilon}(\cdot, \cdot)\}$  defines a unique unbounded operator  $A_{a,\varepsilon}$  in  $H$  with the domain  $D(A_{a,\varepsilon})$ , such that

$$t_{a,\varepsilon}(u, v) = (A_{a,\varepsilon}u, v)_H \quad (2.2)$$

for every  $u \in D(A_{a,\varepsilon})$ ,  $v \in D(t_{a,\varepsilon})$ . The operator  $A_{a,\varepsilon}$  is self-adjoint in  $H$  and thanks to (1.4) it is positive. Using the regularity conditions imposed on functions  $g_i(x)$ ,  $k(x)$  and applying standard techniques of the theory of boundary elliptic problems it can be shown that  $D(A_{a,\varepsilon}) \subset H^2$  and

$$(A_{a,\varepsilon}u)(x, y) = -\Delta u(x, y) + \alpha u(x, y), \quad (x, y) \in \Omega.$$

Let us remind that the mapping  $u_i \mapsto \gamma_i(\partial u_i / \partial n_i)$  ( $n_i$  is the unit outward normal to  $\partial\Omega_{i,a_i,\varepsilon}$ ) which is defined on  $C^2(\Omega_{i,a_i,\varepsilon}) \cap C^1(\overline{\Omega}_{i,a_i,\varepsilon})$  has a unique continuous extension as an operator  $\gamma_{n_i}$  from  $H^2(\Omega_{i,a_i,\varepsilon})$  into  $H^{1/2}(\partial\Omega_{i,a_i,\varepsilon})$  for  $i = 1, 2$ . We say that the function  $u \in H^2$  satisfies the boundary conditions (1.3) if the following relations hold

$$(\gamma_{n_i} u_i)|_{\partial\Omega_i \setminus \Gamma} = 0,$$

$$(\gamma_{n_i} u_i - (-1)^i k \gamma_i(u_1 - u_2))|_{\Gamma} = 0, \quad i = 1, 2.$$

By using property (2.2) and applying the generalized Green formula we show that every  $u \in D(A_{a,\varepsilon})$  satisfies the boundary conditions (1.3). On the other hand, having a function  $u \in H^2(\Omega)$  which satisfies (1.3) it is easy to show that  $u$  belongs to  $D(A_{a,\varepsilon})$ . Note also that  $D(A_{a,\varepsilon}^s) \subset H^{2s}$  for every  $s \geq 0$  and

$$D(A_{a,\varepsilon}^s) = H^{2s}, \quad s \in (0, 3/4),$$

since  $\gamma_{n_i}$  cannot be defined on spaces  $H^{2s}$  for any  $s < 3/4$ . Moreover, it can be shown that for any  $0 \leq s \leq 1$ ,  $a > 0$ , there exist constants  $C = C_{a,s}$ ,  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(a, s)$  such that for any  $0 < a_1, a_2 < a$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , we have

$$\|u\|_{H^{2s}} \leq C_s \|A_{a,\varepsilon}^s u\|, \quad u \in D(A_{a,\varepsilon}^s). \quad (2.3)$$

Since  $A_{a,\varepsilon}$  is a self-adjoint positive operator in  $H$  it determines an isomorphism of  $D(A_{a,\varepsilon}) \subset H_{a,\varepsilon}^2$  on  $H$ . This implies that  $A_{a,\varepsilon}$  has a compact inverse on  $H$ , and the spectrum of  $A_{a,\varepsilon}$  consists of a denumerable set of eigenvalues of finite multiplicity.

The key property which allows one to establish the existence of IM for parabolic equations of the form (2.1) is the presence of a large gap in the spectrum of the operator  $A$ . This condition is assumed to be fulfilled in most papers on IM (see, for instance, Chapter 3 in [7] and the references therein). The following lemma guarantees the availability of such gap provided the domain  $\Omega_{a,\varepsilon}$  is thin enough.



**Lemma 2.1** For every  $n \in \mathbb{N}$  there exist  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ , such that for any  $a_i \in (0, \alpha_i)$ ,  $i = 1, 2$ , we have

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_{k,a,\varepsilon} - \alpha - \pi^2(k-1)^2 l^{-2}| = 0,$$

where  $\lambda_{k,a,\varepsilon}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , are all the eigenvalues of  $A_{a,\varepsilon}$  taking account of their multiplicities.

*Proof.* Let us first consider the situation of uncurved domain, i.e.

$$g_i(X, \varepsilon) \equiv a_i, \quad \varepsilon \in [0, 1], \quad i = 1, 2.$$

It is shown in [2] that under condition (1.4) for every  $n \in \mathbb{N}$  there exist  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ , such that for every  $a_i \in (0, \alpha_i)$ ,  $i = 1, 2$ , the first  $n$  eigenvalues of the operator  $A_{a,0}$  are the same as the corresponding eigenvalues of the 1D differential operator

$$Au = -\partial_{xx}u + \alpha u, \quad 0 < x < l,$$

with Neumann boundary conditions. (Actually, in [2] we studied the case of periodic boundary conditions in  $x$ -direction but all necessary modifications are straightforward.) In other words, for every  $n \in \mathbb{N}$  there exist  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ , such that for every  $a_i \in (0, \alpha_i)$ ,  $i = 1, 2$ , we have

$$\lambda_{k,a,0} = \alpha + \pi^2(k-1)^2 l^{-2}.$$

Therefore, it suffices to show that

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\lambda_{k,a,\varepsilon} - \lambda_{k,a,0}| = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.4)$$

At this point it would be convenient to transform the variables  $(x, y) \in \Omega_{a,\varepsilon}$  to make our differential operators be defined on the same fixed domain. If we make the change of variables

$$\begin{cases} x = X \\ y = g_i(X, \varepsilon)Y, \end{cases} \quad (x, y) \in \Omega_{i,a_i,\varepsilon}, \quad i = 1, 2, \quad (2.5)$$

we will obtain the transformed domain  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , where  $\Omega_1 = (0, l) \times (0, 1)$ ,  $\Omega_2 = (0, l) \times (-1, 0)$ . Let  $H_\varepsilon$  ( $\varepsilon \in [0, 1]$ ) be the space  $H = L^2(\Omega)$  endowed with the inner product

$$(u, v)_{H_\varepsilon} = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} (u_i v_i g_i)(X, Y) dX dY.$$

Thanks to the continuity of  $g_i$ ,  $i = 1, 2$ , we have that

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |(u, v)_{H_\varepsilon} - (u, v)_{H_0}| = 0 \quad (2.6)$$



uniformly for bounded  $u, v \in H$ .

By the change of variables (2.5) we transform the bilinear form  $t_{a,\varepsilon}(u, v)$  into the form

$$t_{a,\varepsilon}^* = (L_{a,\varepsilon}u, L_{a,\varepsilon}v)_{H_\varepsilon} + \alpha(u, v)_{H_\varepsilon} + \sum_{i,j=1}^2 (-1)^{i+j} \int_{\Gamma} (k \gamma_j u_j \gamma_i v_i)(X) dX,$$

where

$$L_{a,\varepsilon}u(X, Y) = (\partial_X u_i - \frac{\partial_X g_i Y}{g_i} \partial_Y u_i, \frac{1}{g_i} \partial_Y u_i)$$

for  $(X, Y) \in \Omega_i$ . The space  $H^1 = H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2)$  serves as the natural domain of definition for every form  $t_{a,\varepsilon}^*(\cdot, \cdot)$ . Evidently the form  $t_{a,\varepsilon}^*(\cdot, \cdot)$  is symmetric and closed in  $H_\varepsilon$ . Hence, the triple  $\{H^1, H_\varepsilon, t_{a,\varepsilon}^*\}$  defines a unique self-adjoint operator  $A_{a,\varepsilon}^*$  on  $H_\varepsilon$  with the domain  $D(A_{a,\varepsilon}^*)$ , such that

$$t_{a,\varepsilon}^*(u, v) = (A_{a,\varepsilon}^* u, v)_{H_\varepsilon}$$

for every  $u \in D(A_{a,\varepsilon}^*)$ ,  $v \in H^1$ . Transformation (2.5) generates the isometry  $U_\varepsilon : L^2(\Omega_{a,\varepsilon}) \rightarrow H_\varepsilon$  determined by the relation

$$(U_\varepsilon u)(X, Y) = v(X, Y) = u(X, g_i(X, \varepsilon)Y), \quad (X, Y) \in \Omega_i, \quad i = 1, 2.$$

Clearly, we have  $U_\varepsilon D(A_{a,\varepsilon}) = D(A_{a,\varepsilon}^*)$  and

$$U_\varepsilon A_{a,\varepsilon} u = A_{a,\varepsilon}^* U_\varepsilon u, \quad u \in D(A_{a,\varepsilon}),$$

so the spectra of  $A_{a,\varepsilon}$  and  $A_{a,\varepsilon}^*$  are the same. The operators  $A_{a,\varepsilon}^*$  are no longer symmetric in the space  $H_0$  but they are still  $m$ -sectorial (in the sense of Kato [8]). Note also that  $D(A_{a,\varepsilon}^{1/2}) = H^1$  and for any  $a_1, a_2 > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{u \in H^1, \|u\|_{H^1} \leq 1} \|(A_{a,\varepsilon}^{1/2} - A_{a,0}^{1/2})u\| = 0. \quad (2.7)$$

The latter relation is a direct consequence of (2.6) and the following inequality (which can be easily verified)

$$\|(L_{a,\varepsilon} - L_{a,0})u\| \leq M_a \varepsilon \|u\|_{H^1}, \quad u \in H^1.$$

Thanks to the well-known results concerning the stability of spectra of  $m$ -sectorial operators under perturbations (see Ch. 6 in [8]) (2.7) implies (2.4). This completes the proof.

Let us now consider the Nemitskii operator

$$(F(u))(x, y) = f(u(x, y)), \quad (x, y) \in \Omega, \quad i = 1, 2.$$



The hypothesis (1.5) implies that  $F$  is well defined on  $H_{a,\varepsilon}^1$  with values in  $H$  and for every  $r > 0$  we have

$$\|F(u) - F(v)\| \leq C_r \|u - v\|_{H^1}, \quad (2.8)$$

$$\|F(u)\| \leq C_r, \quad u, v \in H_{a,\varepsilon}^1, \|u\|_{H^1}, \|v\|_{H^1} \leq r,$$

with some constant  $C_r > 0$ . The inequalities (2.3) and (2.8) show that the nonlinearity  $F$  is 'subjected' to the operator  $A_{a,\varepsilon}$ , thus the problem (1.1)–(1.3) can be inserted in the general framework of the theory of semilinear parabolic equations (see [9]).

Write (1.1)–(1.3) in the abstract operator form

$$\partial_t u + A_{a,\varepsilon} u = F(u), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0. \quad (2.9)$$

**Definition 2.1** We say that the function  $u(t) : [0, +\infty) \rightarrow H$  is a strong solution to problem (2.9), iff  $u(0) = u_0$ ,

$$u(t) \in C([0, +\infty); H_{a,\varepsilon}^1) \cap C^1((0, +\infty); H_{a,\varepsilon}^1) \cap C((0, +\infty); D(A_{a,\varepsilon})),$$

and  $u(t)$  satisfies equation (2.9) on the interval  $t \in (0, +\infty)$ .

**Theorem 2.1** Let conditions (1.4)–(1.8) be satisfied. Then Cauchy problem (2.9) possesses a unique strong solution  $u_{a,\varepsilon}(t)$  for every  $u_0 \in H_{a,\varepsilon}^1$ ,  $a_1, a_2 > 0$ ,  $0 < \varepsilon \leq 1$ . In addition, for every  $s \in [0, 1)$ ,  $\alpha_i > 0$ ,  $i = 1, 2$  there exists a number  $R > 0$ , such that for every  $r > 0$  there is  $t = t(r)$ , such that

$$\sup\{\|A_{a,\varepsilon}^s S_{a,\varepsilon}(t)u\| : u \in H_{a,\varepsilon}^1, \|A_{a,\varepsilon}^{1/2}u\| \leq r\} \leq R \quad (2.10)$$

for every  $t \geq t(r) > 0$ ,  $a_i \in (0, \alpha_i)$ ,  $\varepsilon \in (0, 1]$ , where  $S_{a,\varepsilon}(t)$  is an evolutionary semigroup, defined in the space  $H_{a,\varepsilon}^1$  by problem (2.9),  $S_{a,\varepsilon}(t)u_0 \equiv u_{a,\varepsilon}(t)$ .

*Proof.* In the case of uncurved thin domains ( $g_i(X, \varepsilon) \equiv a_i$ ,  $\varepsilon \in [0, 1]$ ) this theorem was proved in [3] (Theorem 2.1). Extension of the arguments presented there to the general case is straightforward and is omitted here.

Theorem 2.1 states in particular that the semigroups  $S_{a,\varepsilon}(t)$  are uniformly dissipative in  $H_{a,\varepsilon}^s$ ,  $1 \leq s < 2$ . This implies that if one interested in asymptotic dynamics it suffices to study the behavior of  $S_{a,\varepsilon}(t)$  on one of the sets

$$\{u \in H_{a,\varepsilon}^s : \|A_{a,\varepsilon}^s u\| \leq R\},$$

where  $R = R(s)$  is a number given by (2.10). Thanks to the continuous embedding  $H_{a,\varepsilon}^s \subset L^\infty(\Omega_{a,\varepsilon})$ ,  $s > 1$ , (2.10) implies that for any  $\alpha_i > 0$ ,  $r > 0$  there exists  $t = t(\alpha, r) > 0$ , such that

$$\sup\{\|S_{a,\varepsilon}(t)u\|_{L^\infty}, u \in H^1, \|A_{a,\varepsilon}^{1/2}u\| \leq r\} \leq K$$



for every  $t \geq t(r)$ ,  $a_i \in (0, \alpha_i)$ ,  $\varepsilon \in (0, 1]$ , and some constant  $K > 0$ .

Let  $B : H^1 \rightarrow H$  be the Nemitskii mapping associated with the function  $\eta(u^2 K^{-2})f(u)$ , where  $\eta(r) \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ ,  $\eta(r) = 1$  for every  $r \in [0, 1]$ . For technical reasons it is more convenient to work with the problem

$$\partial_t u + A_{a,\varepsilon} u = B(u), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0, \quad (2.11)$$

instead of (2.9). Clearly, every IM (see Def. 3.1, below) for the semigroup associated with (2.11) is at the same time an IM for  $S_{a,\varepsilon}(t)$ .

The useful properties of the mapping  $B$  are collected in the following lemma.

**Lemma 2.2** *The mapping  $B$  transforms  $H$  in itself and satisfies the following properties.*

(B1) *There exist constants  $M_1, M_2$  such that for any  $u, v \in H$*

$$\|B(u)\| \leq M_1,$$

$$\|B(u) - B(v)\| \leq M_2 \|u - v\|.$$

(B2)  *$B$  maps  $H_{a,\varepsilon}^\theta$  in  $H_{a,\varepsilon}^1$  for any  $\theta \in (1, 2)$  and it satisfies the inequalities*

$$\|B(u)\|_{H_{a,\varepsilon}^1} \leq M_3,$$

$$\|B(u) - B(v)\|_{H_{a,\varepsilon}^1} \leq M_4 \|u - v\|_{H_{a,\varepsilon}^\theta}, \quad u, v \in H_{a,\varepsilon}^\theta,$$

*with some constants  $M_3, M_4$  which may depend only on  $\theta$ .*

(B3) *The restriction of  $B$  to the space  $H_{a,\varepsilon}^\theta$  belongs to the class  $C^1(H_{a,\varepsilon}^\theta, H)$ .*

(B4) *For every  $u \in H_{a,\varepsilon}^\theta$  the Frechét derivative  $B'(u) \in \mathcal{L}(H_{a,\varepsilon}^\theta, H)$  can be extended to the operator (denoted by the same symbol) from the class  $\mathcal{L}(H, H)$ , such that for any  $u, v \in H_{a,\varepsilon}^\theta$*

$$\|B'(u)\| \leq M_5,$$

$$\|B'(u) - B'(v)\| \leq M_6 \|u - v\|_{H_{a,\varepsilon}^\theta}.$$

*There exist  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ , such that all the constants  $M_i$  in (B1)–(B4) can be chosen irrespective of  $a_1 \in (0, \alpha_1)$ ,  $a_2 \in (0, \alpha_2)$ ,  $\varepsilon \in [0, 1]$ .*

*Proof.* This statement is standard and its various versions can be found in many sources (see, for instance, Ch. 1 in [10]).

Now, in order to prove Theorem 1.1 we note that thanks to the results of this section we are in a position to apply Theorem 3.1 to problem (1.1)–(1.3). Indeed, Lemmata 2.1, 2.2 and Theorem 2.1 show that the problem (1.1)–(1.3) generates a semigroup  $S_{a,\varepsilon}(t)$  in the space  $H_{a,\varepsilon}^1$  for which all the conditions of Theorem 3.1 are satisfied (with an arbitrary  $1 < \theta < 2$ ) if the domain  $\Omega_{a,\varepsilon}$  is sufficiently thin.



### 3. Inertial manifolds for abstract parabolic equations

Let  $H$  be a real separable Hilbert space endowed with the inner product  $(\cdot, \cdot)$  and the norm  $\|\cdot\|$  (depending on context the symbol  $\|\cdot\|$  may also denote the operator norm in the space of linear continuous operators  $\mathcal{L}(H, H)$ ). Let  $A$  be a self-adjoint positive operator in  $H$ , such that the spectrum  $\sigma(A)$  consists of a denumerable sequence of eigenvalues of finite multiplicity

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \lambda_k \leq \dots$$

Let  $P_k(Q_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , be the spectral projector corresponding to the set  $\{\lambda \in \sigma(A) : \lambda \leq \lambda_k\}$ ,  $(\{\lambda \in \sigma(A) : \lambda \geq \lambda_{k+1}\})$ .

Define in a standard way the powers  $A^\theta$  for  $\theta \in \mathbb{R}$  and the spaces  $H^\theta = H^\theta(A) = D(A^{\theta/2})$  endowed with the norm  $\|\cdot\|_\theta = \|A^{\theta/2} \cdot\|$ . Our assumptions imply that

$$\|A^\theta P_i e^{-tA}\| \leq \lambda_i^\theta e^{\lambda_i |t|}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

$$\|A^{\theta_1} Q_i e^{-tA} u\| \leq (\frac{\theta_1 - \theta_2}{t} + \lambda_{i+1})^{\theta_1 - \theta_2} e^{-\lambda_{i+1} t} \|A^{\theta_2} u\|, \quad t > 0.$$

for every  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\theta \geq 0$ ,  $\theta_1 \geq \theta_2 \geq 0$ ,  $u \in H^{\theta_2}$  (see, for instance, Ch. 2 of [7]).

Let  $B$  be a nonlinear map from  $H$  in itself, satisfying conditions (B1)–(B4) of Lemma 2.2. Then the Cauchy problem

$$\frac{du}{dt} + Au = B(u), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0 \in H, \quad (3.2)$$

has the unique strong solution (see [7], [9])

$$u(t) \in C([0, +\infty); H) \cap C^1((0, +\infty); H^1) \cap C((0, +\infty); H^2).$$

The mapping  $u_0 \mapsto S(t)u_0 = u(t)$  defines a continuous semigroup  $\{S(t) : t \geq 0\}$  on  $H$ .

Let us remind a concept of inertial manifold (cf. [4]–[7], [11]).

**Definition 3.1** Let there exist a number  $n \in \mathbb{N}$  and a mapping  $\Phi \in C^1(P_n H, Q_n H)$  such that

$$\|\Phi(p_1) - \Phi(p_2)\| \leq C_\Phi \|p_1 - p_2\|, \quad p_1, p_2 \in P_n H, \quad (3.3)$$

the set

$$\mathcal{M} = \{p + \Phi(p) : p \in P_n H\} \subset H \quad (3.4)$$

is (positively)  $S(t)$ -invariant, i.e.

$$S(t)\mathcal{M} = \mathcal{M}, \quad t \geq 0,$$

and for some constant  $\gamma > 0$  and any bounded set  $D \subset H$  we have

$$\text{dist}_H\{S(t)D, \mathcal{M}\} \leq C_D e^{-\gamma t}, \quad t \geq 0. \quad (3.5)$$

Then we say that  $\mathcal{M}$  is an inertial manifold (IM) for the semigroup  $S(t)$ .



Note that  $\mathcal{M}$  contains the global attractor of the semigroup  $S(t)$  (in case where it is dissipative) and it is a  $C^1$ -manifold, the dimension of which is equal to

$$\dim P_n H = \sum_{i=1}^n \dim \ker(A - \lambda_i).$$

The main result of this section gives the sufficient conditions under which  $S(t)$  has an IM.

**Theorem 3.1** *Let there be given a self-adjoint operator  $A$  with a compact inverse and a nonlinear mapping  $B : H \rightarrow H$  satisfying conditions (B1)–(B4) of Lemma 2.2. Let also there exists a number  $n \in \mathbb{N}$  such that for some  $0 < q < 2 - \sqrt{2}$ ,  $1 < \theta < 2$  we have*

$$\beta - \alpha > 2Mq^{-1}(1+k)(\alpha^{(\theta-1)/2} + \beta^{(\theta-1)/2}), \quad (3.6)$$

where  $\alpha = \lambda_n$ ,  $\beta = \lambda_{n+1}$ ,  $M = \max_{1 \leq i \leq 6} \{M_i\}$ ,  $k = (\theta/2)^{\theta/2} \int_0^\infty t^{-\theta/2} e^{-t} dt$ . Then there is a mapping  $\Phi \in C^1(P_n H, Q_n H)$  such that the set  $\mathcal{M}$  of the form (3.4) is an IM for the semigroup  $S(t)$ . The exponent  $\gamma$  in (3.5) can be taken equal to

$$\gamma_0 = \alpha + 2Mq^{-1}\alpha^{(\theta-1)/2}.$$

*Proof.* We are going to exploit the classical Lyapunov-Perron method adapted for abstract parabolic equations in Banach space by Chow and Lu [6]. Consider the formal nonlinear integral operator

$$(p, u) \mapsto F_p[u](t) = e^{-tA}p - \int_t^0 e^{-(t-\tau)A}PB(u(\tau))d\tau + \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)A}QB(u(\tau))d\tau, \quad p \in PH, t \leq 0, \quad (3.7)$$

where  $P = P_n$ ,  $Q = Q_n$ . Following the arguments of [6] one looks for an IM of the form (3.4) with

$$\Phi(p) = QF_p[u](0) = \int_{-\infty}^0 e^{\tau A}QB(u(\tau))d\tau, \quad (3.8)$$

where  $u = u(t, p)$  is a solution to the equation

$$u = F_p[u]. \quad (3.9)$$

For any  $\gamma > 0$ ,  $s \geq 0$  we define the space  $C_{s,\gamma}$  of  $H^s$ -valued, continuous on  $(-\infty, 0]$  functions such that

$$|u|_{s,\gamma} \equiv \sup_{t \leq 0} e^{\gamma t} \|u(t)\|_s < \infty.$$

Evidently,  $(C_{s,\gamma}, |u|_{s,\gamma})$  is a Banach space.



**Lemma 3.1** *Under the conditions of Theorem 3.1  $F_p$  maps  $C_{s,\gamma}$  in itself and is a contraction operator on this space for  $s \in \{0, \theta\}$ ,*

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha + 2Mq^{-1}\alpha^{(\theta-1)/2}, \\ 0 < q < 2 - \sqrt{2}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

*and for any  $p \in PH$ . Furthermore, there is a number  $\sigma \in (0, \gamma)$  such that  $F_p$  is a contraction mapping on  $C_{s,\gamma-\sigma}$  with the same  $s, \gamma$ . The 'coefficient of contraction' is not greater than  $q$  in both cases.*

**Remark 3.1** *Since one has the continuous embeddings*

$$C_{s,\gamma-\sigma} \subset C_{s,\gamma} \subset C_{0,\gamma}$$

*for any  $s \geq 0, \gamma > 0, 0 < \sigma < \gamma$ , the fixed points  $u_{s,\gamma-\sigma}(p), u_{s,\gamma}(p), u_{0,\gamma}(p)$  of the restrictions of  $F_p$  to the corresponding spaces coincide provided  $F_p$  is contracting on each of these spaces (with respect to the corresponding norm). Therefore, we will drop the subscripts in the designation of this single fixed point  $u(p)$ .*

**Remark 3.2** *Let  $(C, |\cdot|_C)$  be one of the spaces mentioned in Lemma 3.1. As far as  $F_p$  is a  $q$ -contracting mapping on  $C$  (i.e.  $|F_p[u] - F_p[v]|_C \leq q|u - v|_C$ ), we have the standard estimate for the successive approximations  $u_1 \in C, u_{n+1} = F_p[u_n], n \in \mathbb{N}, p \in PH$  to the solution  $u = u(p)$  to equation (3.9)*

$$|u - u_{n+1}|_C \leq \frac{q^n}{1 - q} |u_1 - u_2|_C, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.11)$$

*Proof of Lemma 3.1.* In fact it is well-known (see [6], [7]). When estimating the difference  $(F_p[u_1] - F_p[u_2])$  in the appropriate norm, we use inequalities (B1), (B2) and relation (3.6). The continuity of the mapping

$$F_p[u](t) : (-\infty, 0] \rightarrow H^s, \quad u \in C_{s,\gamma}, \quad p \in PH, \quad s \in \{0, \theta\}$$

follows from the regularity results for semilinear parabolic equations ([9], Ch. 3).

Lemma 3.1 allows us to define the set  $\mathcal{M}$  as in (3.4) with  $\Phi$  given by (3.8).  $\mathcal{M}$  is invariant with respect to  $S(t)$  and is a finite-dimensional Lipschitz manifold which attracts exponentially every orbit of  $S(t)$ , as the following lemma shows (see, for instance, Ch. 3 of [7]).

**Lemma 3.2** *Under the conditions of Theorem 3.1 the following estimates are valid*

$$\|\Phi(p_1) - \Phi(p_2)\| \leq \frac{q}{1 - q} \|p_1 - p_2\|, \quad p_1, p_2 \in PH, \quad (3.4)$$

$$\|\Phi(p)\| \leq L(1 + \|p\|), \quad p \in PH,$$

*where the constant  $L$  depends only on  $\alpha, \beta, \theta, M, q$ . Besides, for any  $u_0 \in H$  there is  $v_0 \in \mathcal{M}$  such that*

$$\|S(t)u_0 - S(t)v_0\| \leq \frac{2(1 - q)}{(2 - q)^2 - 2} e^{-\gamma t} \|Qu_0 - \Phi(Pu_0)\|, \quad (3.5)$$

*where  $\gamma$  is as in Lemma 3.1.*



Thus, Lemmata 3.1, 3.2 imply that  $\mathcal{M}$  satisfies conditions (3.3)–(3.5) and it remains to show that  $\Phi(p) \in C^1(PH; QH)$ . In order to achieve this, we will apply (with some necessary modifications) the approach of Lu [12].

Let  $\gamma$  be a positive number and  $\mathcal{L}_\gamma = \mathcal{L}(PH; C_{0,\gamma})$  be the Banach space of linear continuous mappings from  $PH$  in  $C_{0,\gamma}$  endowed with the norm

$$\|v\|_{\mathcal{L}_\gamma} = \sup_{\|p\| \leq 1} \sup_{t \leq 0} e^{\gamma t} \|v(t)p\|$$

(we remind that  $\|\cdot\|$  is the norm in  $H$ ). Consider the operator  $\mathcal{F}_{p,u}[v]$ , which is a formal Frechét derivative of  $F_p[u]$  with respect to  $p$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{p,u}[v](t) &= e^{-tAP} - \int_t^0 e^{-(t-\tau)A} P B'(u(\tau)) v(\tau) d\tau \\ &\quad + \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)A} Q B'(u(\tau)) v(\tau) d\tau, \quad t \leq 0, \end{aligned}$$

where  $u(t)$  is an arbitrary element of  $C_{\theta,\gamma}$ . The following lemmata contain some basic properties of  $\mathcal{F}_{p,u}[v]$  as a linear operator on the space  $\mathcal{L}_\gamma$ .

**Lemma 3.3** *Under the conditions of Theorem 3.1  $\mathcal{F}_{p,u}[v]$  is a  $q$ -contracting linear operator on the both spaces  $\mathcal{L}_\gamma$ ,  $\mathcal{L}_{\gamma-\sigma}$  for any  $p \in PH$ ,  $u \in C_{\theta,\gamma}$ , and  $\gamma$ ,  $\sigma$ ,  $q$  as in Lemma 4.1. The corresponding fixed points  $v(p)$  satisfy the estimate*

$$\|v(p)\|_{\mathcal{L}_{\gamma-\sigma}} \leq (1-q)^{-1}, \quad p \in PH. \quad (3.12)$$

*Proof.* We verify here only (3.12) (the contraction property can be shown in the same way). Given  $u \in C_{\theta,\gamma}$  consider the (unique) solution  $u = u(p)$  of the equation

$$v(t) = \mathcal{F}_{p,u}[v](t), \quad t \leq 0, \quad p \in PH.$$

Using (B4), (3.1), (3.6) one obtains for  $t \leq 0$ ,  $p \in PH$

$$\begin{aligned} e^{(\gamma-\sigma)t} \|v(t)\| &\leq e^{(\gamma-\sigma)t} \left( e^{-\alpha t} + \int_t^0 e^{-(t-\tau)\alpha} M e^{(-\gamma+\sigma)\tau} \|v\|_{\mathcal{L}_{\gamma-\sigma}} d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)\beta} M e^{(-\gamma+\sigma)\tau} \|v\|_{\mathcal{L}_{\gamma-\sigma}} d\tau \right), \end{aligned}$$

so

$$\|v\|_{\mathcal{L}_{\gamma-\sigma}} \leq 1 + M \left( \frac{1}{\gamma - \sigma - \alpha} + \frac{1}{\beta + \sigma - \gamma} \right) \|v\|_{\mathcal{L}_{\gamma-\sigma}} \leq 1 + q \|v\|_{\mathcal{L}_{\gamma-\sigma}},$$

which implies (3.12).

**Lemma 3.4** *Under the conditions of Theorem 3.1 the estimate*

$$\|F_{p,u_1}[v] - F_{p,u_2}[v]\|_{\mathcal{L}_\gamma} \leq (e^{\sigma T} + e^{-\gamma T} |u_1 - u_2|_{\theta,\gamma}) \|v\|_{\mathcal{L}_{\gamma-\sigma}}$$

*holds true for any  $p \in PH$ ,  $u_1, u_2 \in C_{\theta,\gamma}$ ,  $v \in \mathcal{L}_{\gamma-\sigma}$ ,  $T < 0$ , and  $\gamma$ ,  $\sigma$  as in Lemma 3.1.*



*Proof.* For every  $t \leq 0$  one has

$$\begin{aligned} & e^{\gamma t} \|F_{p,u_1}[v](t) - F_{p,u_2}[v](t)\| \\ & \leq e^{\gamma t} \int_t^0 \|e^{-(t-\tau)A} P(B'(u_1) - B'(u_2))v(\tau)\| d\tau \\ & + e^{\gamma t} \int_{-\infty}^t \|e^{-(t-\tau)A} Q(B'(u_1) - B'(u_2))v(\tau)\| d\tau \leq I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

where

$$\begin{aligned} I_1 &= e^{\gamma t} \int_t^0 e^{-(t-\tau)\alpha} \|B'(u_1) - B'(u_2)\| \|v\| d\tau \\ I_2 &= e^{\gamma t} \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)\beta} \|B'(u_1) - B'(u_2)\| \|v\| d\tau, \end{aligned}$$

on account of (3.1). For given  $T < 0$  and any  $t < T$  one obtains by using (B4)

$$\begin{aligned} & e^{\gamma t} \int_t^T e^{-(t-\tau)\alpha} \|B'(u_1) - B'(u_2)\| \|v\| d\tau \\ & \leq 2Me^{\gamma t} \int_t^T e^{-(t-\tau)\alpha} e^{-(\gamma-\sigma)\tau} \|v\|_{\mathcal{L}_{\gamma-\sigma}} d\tau \\ & \leq \frac{2M}{\gamma - \alpha - \sigma} e^{\sigma T} \|v\|_{\mathcal{L}_{\gamma-\sigma}}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

and, also,

$$\begin{aligned} & e^{\gamma t} \int_T^0 e^{-(t-\tau)\alpha} \|B'(u_1) - B'(u_2)\| \|v\| d\tau \\ & \leq M e^{(\gamma-\alpha)t} \sup_{T \leq \tau \leq 0} \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_{\theta} \int_T^0 e^{-(\gamma-\alpha)\tau} \|v\|_{\mathcal{L}_{\gamma}} d\tau \\ & \leq \frac{M}{\gamma - \alpha} \sup_{T \leq \tau \leq 0} \|u(\tau)\|_{\theta} \|v\|_{\mathcal{L}_{\gamma}}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

where  $u = u_1 - u_2$ .

Reasoning similarly in case where  $T \leq t \leq 0$ , we deduce the estimate

$$I_1 \leq \frac{M}{\gamma - \alpha} \sup_{T \leq \tau \leq 0} \|u(\tau)\|_{\theta} \|v\|_{\mathcal{L}_{\gamma}},$$

which together with (3.14) and (3.15) yield for any  $t \leq 0$ ,  $T < 0$ ,

$$I_1 \leq \frac{2M}{\gamma - \alpha - \sigma} (e^{\sigma T} + \sup_{T \leq \tau \leq 0} \|u(\tau)\|_{\theta}) \|v\|_{\mathcal{L}_{\gamma-\sigma}}. \quad (3.16)$$

In the same way, one shows that

$$I_2 \leq \frac{2M}{\beta + \sigma - \gamma} (e^{\sigma T} + \sup_{T \leq \tau \leq 0} \|u(\tau)\|_{\theta}) \|v\|_{\mathcal{L}_{\gamma-\sigma}}. \quad (3.17)$$



From the condition (3.6), we infer that

$$2M \left( \frac{1}{\gamma - \alpha - \sigma} + \frac{1}{\beta + \sigma - \gamma} \right) < q < 1$$

for any  $\sigma > 0$  which is small enough, and using (3.13), (3.16), (3.17), we conclude the proof of Lemma 3.4.

In order to complete the proof of Theorem 3.1 one has to show that the fixed point  $u = u(p, t)$ ,  $t \leq 0$ ,  $p \in PH$  of the mapping  $F_p : C_{0,\gamma} \rightarrow C_{0,\gamma}$  defined by (3.9), belongs to the class  $C^1(PH; H)$  for every  $t \leq 0$ .

Let  $u_1 : PH \times (-\infty, 0] \rightarrow H$  be any function satisfying the conditions

(a)  $u_1(p, t) \in C^1(PH, H)$  for any  $t \leq 0$ .

(b)  $D_p u_1 \in \mathcal{L}_{\gamma-\sigma}$  for any  $p \in PH$  and also

$$\sup_{p \in PH} \|D_p u_1(p)\|_{\mathcal{L}_{\gamma-\sigma}} < \infty.$$

(c)  $u_1(p) \in C_{\theta, \gamma-\sigma}$ ,  $p \in PH$ ,

where the numbers  $\gamma, \sigma$  are as in Lemma 3.1. Clearly, the function  $u_1(p, t) \equiv 0$  complies with (a)-(c). Consider the sequence  $u_1, u_{k+1} = F_p u_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Thanks to (c) and Lemma 3.1, one has  $u_k(p) \in C_{\theta, \gamma}$  for any  $p \in PH$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . The estimate (3.11) implies that

$$\sup_{\|p\| \leq R} |u_{k+1}(p) - u(p)|_{\theta, \gamma} \leq \frac{q^k}{1-q} \left( \sup_{\|p\| \leq R} |u_1(p)|_{\theta, \gamma} + \sup_{\|p\| \leq R} |u_2(p)|_{\theta, \gamma} \right)$$

for  $u = F_p(u)$  and any  $R > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . By the first of the inequalities (B2), one obtains

$$|u_2(p)|_{\theta, \gamma} \leq \alpha^{\theta/2} \|p\| + M(\alpha^{\theta/2-1} + \beta^{\theta/2-1}),$$

so for any  $R > 0$  there is  $C_R > 0$ , such that

$$\sup_{\|p\| \leq R} |u_{k+1}(p) - u(p)|_{\theta, \gamma} \leq C_R q^k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.18)$$

Applying the differentiation Lebesgue Theorem yields

$$u_k(p, t) \in C^1(PH, H), \quad t \leq 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

and also

$$D_p F[u_k] = \mathcal{F}_{p, u_k}[D_p u_k], \quad p \in PH, \quad k \in \mathbb{N}.$$

The latter relation together with the condition (b) and Lemma 3.3 allow us to conclude that

$$v_k \equiv D_p u_k(p, t) \in \mathcal{L}_{\gamma-\sigma}, \quad p \in PH, \quad k \in \mathbb{N}.$$



Let us now show that for any  $R > 0$

$$\sup_{\|p\| \leq R} \|v_k(p) - v(p)\|_{\mathcal{L}_\gamma} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (3.19)$$

where  $v(p) = \mathcal{F}_{p,u(p)}$  is the single fixed point of the operator  $\mathcal{F}_{p,u(p)} : \mathcal{L}_{\gamma-\sigma} \rightarrow \mathcal{L}_{\gamma-\sigma}$ , the existence and uniqueness of which is provided by Lemma 3.3. From Lemma 3.3, we infer also that

$$\begin{aligned} \|v_{k+1}(p) - v(p)\|_{\mathcal{L}_\gamma} &= \|\mathcal{F}_{p,u_k}[v_k] - \mathcal{F}_{p,u_k}[v]\|_{\mathcal{L}_\gamma} + \|\mathcal{F}_{p,u_k}[v] - \mathcal{F}_{p,u}[v]\|_{\mathcal{L}_\gamma} \\ &\leq q \|v_k(p) - v(p)\|_{\mathcal{L}_\gamma} + \|\mathcal{F}_{p,u_k}[v] - \mathcal{F}_{p,u}[v]\|_{\mathcal{L}_\gamma} \\ &\leq q^k \|v_1(p) - v(p)\|_{\mathcal{L}_\gamma} + \sum_{j=0}^{k-1} q^j \|\mathcal{F}_{p,u_{k-j}}[v] - \mathcal{F}_{p,u}[v]\|_{\mathcal{L}_\gamma} \end{aligned} \quad (3.20)$$

for any  $k \in \mathbb{N}$ . Taking in the inequality of Lemma 3.4  $T = \sigma^{-1} \ln \varepsilon$  and using the inequality (3.18), one obtains

$$\sup_{\|p\| \leq R} \|\mathcal{F}_{p,u_k}[v_k] - \mathcal{F}_{p,u_k}[v]\|_{\mathcal{L}_\gamma} \leq (\varepsilon + \varepsilon^{-\frac{\gamma}{\sigma}} C_R q^{k-j-1}) \sup_{\|p\| \leq R} \|v(p)\|_{\mathcal{L}_{\gamma-\sigma}}$$

for any  $\varepsilon, R > 0, k \in \mathbb{N}, j = 0, 1, \dots, k-1$ . After substituting into the latter inequality the estimate (3.12) and using it in (3.20), we will have

$$\begin{aligned} \sup_{\|p\| \leq R} \|v_{k+1}(p) - v(p)\|_{\mathcal{L}_\gamma} &\leq q^k \sup_{\|p\| \leq R} \|v_1(p) - v(p)\|_{\mathcal{L}_\gamma} \\ &\quad + \frac{1}{1-q} \sum_{j=0}^{k-1} q^j (\varepsilon + \varepsilon^{-\frac{\gamma}{\sigma}} C_R q^{k-j-1}) \\ &\leq q^k \sup_{p \in PH} \|v_1(p)\|_{\mathcal{L}_\gamma} + \frac{q^k}{1-q} + \frac{\varepsilon}{1-q} \sum_{j=0}^{k-1} q^j + \frac{\varepsilon^{-\frac{\gamma}{\sigma}} C_R}{q(1-q)} \sum_{j=0}^{k-1} q^k \\ &\leq q^k \sup_{p \in PH} \|v_1(p)\|_{\mathcal{L}_\gamma} + \frac{q^k}{1-q} + \frac{\varepsilon}{(1-q)^2} + \frac{k \varepsilon^{-\frac{\gamma}{\sigma}} C_R}{1-q} q^{k-1} \end{aligned}$$

for any  $k \in \mathbb{N}$ . Now, taking  $k = k(\varepsilon)$  sufficiently large, we see that (3.19) holds true. This implies that the Frechét derivatives  $D_p u_k(p)$  converge to the function  $v(p)$  in the space  $\mathcal{L}_\gamma$  uniformly for  $p \in PH, \|p\| \leq R, R > 0$ . Therefore, for any  $t \leq 0, R > 0$ ,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sup_{\|p\| \leq R} \sup_{\|\pi\| \leq 1} \|(v_k(p, t) - v(p, t))\pi\| \leq e^{-\gamma t} \lim_{k \rightarrow 0} \sup_{\|p\| \leq R} \|v_k(p) - v(p)\|_{\mathcal{L}_\gamma} = 0,$$

and from (3.18) we infer at once, that

$$u(p, t) \in C^1(PH, H), \quad v(p) = D_p u(p) \in \mathcal{L}_\gamma,$$



for any  $p \in PH$ ,  $t \leq 0$ . Hence, the mapping  $\Phi(p)$ , defined by (3.8) belongs to  $C^1(PH, H)$  and

$$D_p \Phi(p) = \int_{-\infty}^0 e^{\tau A} Q B'(u(p, \tau)) D_p u(p, \tau) d\tau.$$

This completes the proof of Theorem 3.1.

**Acknowledgement.** The work was partially supported by the INTAS grant 2000-899. The author is grateful to Professor I.D. Chueshov for many clarifying discussions and to Dr. A.V. Rezounenko for his help at the final stages of the manuscript's preparation.

## REFERENCES

1. Rekalo A.M. Stabilization of solutions of nonlinear parabolic equations on thin two-layer domains. // *Matem. fizika, analiz, geomet.* – 2002. – **9**. – P. 446-454.
2. Rekalo A.M. Asymptotic behavior of solutions of nonlinear parabolic equations on two-layer thin domains. // *Nonlinear Analysis*. – 2003. – **52**. – P. 1393-1410.
3. Chueshov I.D., Rekalo A.M. Global attractor of contact parabolic problem on thin two-layer domain, submitted.
4. Hale J.K., Raugel G. Reaction-diffusion equation on thin domains. // *J. Math. pures et appl.* – 1992. – **71**. – P. 33-95.
5. Mallet-Paret J., Sell G. Inertial manifolds for reaction-diffusion equations in higher space dimensions. // *J. Am. Math. Soc.* – 1988. – **1**. – P. 805-866.
6. Chow S.-N., Lu K. Invariant manifolds for flows in Banach spaces. // *J. Diff. Eq.* – 1988. – **74**. – P. 285-317.
7. Chueshov I.D. Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems. – Kharkov: Acta. – 2002.  
see also <http://www.emis.de/monographs/Chueshov>
8. Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. – Berlin and New York: Springer. – 1966.
9. Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. – Berlin: Springer. – 1981.
10. Babin A.V., Vishik M.I. Attractors of evolution equations (in Russian). – Moscow: Nauka, – 1989. – 296 p.



11. Foias C., Sell G., Temam R. Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations. // - J. Diff. Eq. - 1988. - 73. - P. 309-353.
12. Lu K. Structural stability for scalar parabolic equations. // J. Diff. Eq. - 1994. - 114. - P. 253-271.

Acknowledgement. The work was partially supported by the INTAS grant 2000-259. The author is grateful to Professor I.D. Chueshev for many clarifying discussions and to Dr. A.V. Rozumenko for his help at the final stages of the manuscript's preparation.

1. Hale J.K., Kato J. Reaction-diffusion equation on thin domains. // J. Math. Anal. Appl. - 1982. - 71. - P. 33-55.
2. Hale J.K., Patai J., Sell G. Inertial manifolds for reaction-diffusion equations in higher space dimensions. // J. Am. Math. Soc. - 1988. - 1. - P. 863-886.
3. Chow S.W., Lu K. Invariant manifolds for flows in Banach spaces. // J. Diff. Eq. - 1988. - 74. - P. 285-315.
4. Chueshev I.D. Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems. - Kluwer: Dordrecht, 2003.
5. Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. - Berlin and New York: Springer. - 1966.
6. Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. - Berlin: Springer. - 1981.
7. Babin A.V., Vishik M.I. Attractors of evolution equations (in Russian). - Moscow: Nauka. - 1989.



## Групповая классификация одного класса

В. И. Лагно<sup>1</sup>, Е. В. Магда<sup>2</sup><sup>1</sup> Полтавський державний педагогічний університет  
ім. В.Г. Короленко, Україна<sup>2</sup> Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Решена задача групповой классификации квазилинейных уравнений вида  $u_{tt} = u_{xx} + g(t, x, u)u_x + f(t, x, u)$ ,  $g_u \neq 0$ . Получен полный список представителей неэквивалентных классов уравнений, имеющих нетривиальные симметричные свойства.

2000 *Mathematics Subject Classification* 42A70.

## 1. Введение

Волновые уравнения занимают важное место среди фундаментальных уравнений математической физики. К ним, в частности, приводят задачи (приближенного) описания процессов колебаний различной природы в терминах дифференциальных уравнений. При этом, как правило, ограничиваются первым приближением, получая линейные уравнения. Основное преимущество такого подхода состоит в том, что линейные дифференциальные уравнения удовлетворяют принципу линейной суперпозиции. Именно этот принцип обуславливает эффективность применения существующего в настоящее время математического аппарата для исследования и интегрирования таких уравнений.

Но во многих случаях описание процессов колебаний в терминах линейных уравнений является неудовлетворительным, поскольку соответствующая математическая модель не "чувствует" более тонких нелинейных эффектов, которые свойственны исследуемому процессу. Классическим примером этого являются солитонные уравнения, которые описывают существенно нелинейный эффект фазового сдвига взаимодействующих солитонных решений. Решения линеаризированных солитонных уравнений не имеют такого свойства. Следовательно, следующему (более точному) приближению соответствует нелинейная математическая задача, для решения и анализа которой имеется достаточно ограниченный математический аппарат.



Эта ситуация существенно изменяется, если нелинейное дифференциальное уравнение имеет нетривиальные симметричные свойства. В таком случае для его анализа и интегрирования можно использовать методы теории групп и алгебр Ли [1]–[3]. В связи с этим актуальной является задача выделения из заданного класса уравнений тех, которые допускают нетривиальные группы симметрии (инвариантности). Отметим, что задача описания дифференциальных уравнений по их группам инвариантности является одной из основных задач классического группового анализа дифференциальных уравнений [1], а соответствующая процедура называется групповой классификацией дифференциальных уравнений.

Проблему групповой классификации дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка в пространстве двух независимых переменных изучал ещё С. Ли [4, 5]. Он, в частности, доказал теорему, которая утверждает, что линейное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными допускает не более чем трехпараметрическую группу нетривиальных преобразований, а также полностью исследовал симметричные свойства уравнения Бонне  $u_{tx} = \exp u$ . Полное решение задачи групповой классификации линейных дифференциальных уравнений второго порядка было получено Л.В. Овсянниковым [6]. К настоящему времени эта задача рассмотрена для многих классов волновых уравнений с одной пространственной переменной. Полное её решение получено для таких уравнений:  $u_{tt} = f^2(x)u_{xx}$  [7],  $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$  [8],  $u_{tt} = u_{xx} + F(u)$  [9],  $u_{tt} = F(u_{xx})$  [10],  $u_{tt} = f(u_x)u_{xx}$  [10, 11],  $u_{tt} = u_x^m u_{xx} + f(u)$  [12],  $u_{tt} + f(u)u_t = (g(u)u_x)_x + h(u)u_x$ ,  $g(u) \neq 0$  [13].

Для исследования приведенных выше уравнений был использован метод, предложенный Л.В. Овсянниковым в ставшей классической работе [14], опубликование которой и положило начало целым циклам работ, посвященным групповой классификации дифференциальных уравнений. Существенной особенностью этого метода (метода Ли–Овсянникова) является то, что он позволяет получить полное решение задачи групповой классификации для тех уравнений, которые содержат произвольные функции одного аргумента. Так, использование этого метода для исследования уравнений  $u_{tt} = (f(x, u)u_x)_x$  [15],  $u_{tt} + \lambda u_{xx} = g(u, u_x)$  [16],  $u_{tt} = (f(u)u_x + g(x, u))_x$  [17],  $u_{tt} = f(x, u_x)u_{xx} + g(x, u_x)$  [18] дало возможность получить новые классы уравнений с нетривиальными симметричными свойствами, но полного решения задачи групповой классификации этих уравнений осуществить не позволило.

В настоящей работе мы рассматриваем задачу групповой классификации квазилинейных уравнений гиперболического типа

$$u_{tt} = u_{xx} + g(t, x, u)u_x + f(t, x, u), \quad g_u \neq 0. \quad (1)$$

Здесь и далее  $u = u(t, x)$ ,  $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$  и т.д.,  $f$  и  $g$  — произвольные гладкие функции своих аргументов. Для решения задачи мы используем метод, предложенный в работах [19, 20], который, собственно говоря, является синтезом



метода Ли–Овсянникова, известных результатов теории абстрактных алгебр Ли и метода использования преобразований эквивалентности. Его использование позволяет значительно расширить множество уравнений, для которых полное решение задачи групповой классификации становится конструктивным. Так, с его применением в [21] полностью решена задача групповой классификации для наиболее общего эволюционного уравнения второго порядка с одной пространственной переменной.

## 2. Предварительная групповая классификация

Прежде всего отметим, что все наши исследования относятся к достаточно малым областям и мы предполагаем, что все функции, которые нам встречаются, являются непрерывными и имеют непрерывные производные нужных порядков.

На первом шаге групповой классификации, с использованием метода Ли–Овсянникова, ищем операторы симметрии уравнения (1) в классе операторов

$$Q = \tau(t, x, u)\partial_t + \xi(t, x, u)\partial_x + \eta(t, x, u)\partial_u, \quad (2)$$

где  $\tau, \xi, \eta$  — произвольные действительные гладкие функции, определённые в некотором подпространстве пространства  $V = R^2 \times R^1$  независимых  $R^2 = \langle t, x \rangle$  и зависимой  $R^1 = \langle u \rangle$ ,  $u = u(t, x)$ , переменных. Оператор (2) генерирует некоторую однопараметрическую группу симметрии уравнения (1), если имеет место равенство

$$\varphi^{tt} - \varphi^{xx} - g\varphi^x - (\tau g_t + \xi g_x + \eta g_u)u_x - \tau f_t - \xi f_x - \eta f_u \Big|_{(1)} = 0, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi^t &= D_t(\eta) - u_t D_t(\tau) - u_x D_t(\xi), \\ \varphi^x &= D_x(\eta) - u_t D_x(\tau) - u_x D_x(\xi), \\ \varphi^{tt} &= D_t(\varphi^t) - u_{tt} D_t(\tau) - u_{tx} D_t(\xi), \\ \varphi^{xx} &= D_x(\varphi^x) - u_{tx} D_x(\tau) - u_{xx} D_x(\xi), \end{aligned}$$

$D_t, D_x$  — обобщенные операторы дифференцирования по переменным  $t$  и  $x$  соответственно. Условие  $\Big|_{(1)}$  в (3) обозначает замену  $u_{tt}$  в полученных выражениях для  $\varphi^x, \varphi^{xx}, \varphi^{tt}$  на  $u_{xx} + gu_x + f$ .

Осуществив довольно громоздкие, но стандартные вычисления, приходим к следующему результату.

**Предложение 1.** *Группа симметрии уравнения (1) генерируется инфинитезимальным оператором*

$$Q = (\lambda t + \lambda_1)\partial_t + (\lambda x + \lambda_2)\partial_x + (h(x)u + r(t, x))\partial_u, \quad (4)$$

где функции  $h = h(x), r = r(t, x)$  и постоянные  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$  удовлетворяют такую систему двух равенств:

$$\begin{aligned} -2h' - \lambda g &= (\lambda t + \lambda_1)g_t + (\lambda x + \lambda_2)g_x + (hu + r)g_u, \\ -h''u + r_{tt} - r_{xx} + (h - 2\lambda)f &= (\lambda t + \lambda_1)f_t + (\lambda x + \lambda_2)f_x + \\ &+ (hu + r)f_u + g(h'u + r_x), \end{aligned} \quad (5)$$



Полученная система равенств (5) служит для определения вида функций  $f$  и  $g$  в уравнении (1), функций  $h, r$  и постоянных  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$  в операторе (4), и называется системой определяющих уравнений. Поскольку она связывает четыре произвольные функции, две из которых являются функциями трёх переменных, то вопрос о её полном интегрировании остаётся открытым, что и не даёт возможности осуществить полную групповую классификацию уравнения (1) методом Ли-Овсянникова. Отметим только, что в случае произвольных значений  $f$  и  $g$  из (5) следует, что  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = h = r = 0$ , т.е. оператор (4) является нулевым оператором.

Далее остановимся на группе эквивалентности  $\mathcal{E}$  уравнения (1). Группу  $\mathcal{E}$  составляют такие невырожденные преобразования пространства  $V$ , которые оставляют вид уравнения (1) неизменным [1]. Прямые вычисления показали, что справедливо следующее утверждение.

**Предложение 2.** Группу  $\mathcal{E}$  уравнения (1) составляют такие преобразования пространства  $V$ :

$$\bar{t} = kt + k_1, \quad \bar{x} = \epsilon kx + k_2, \quad v = X(x)u + Y(t, x), \quad (6)$$

где  $k \neq 0, X \neq 0, \epsilon = \pm 1, k, k_1, k_2 \in R, X, Y$  — произвольные гладкие функции своих переменных.

В дальнейшем преобразования (6) используются для разбиения множества всех уравнений вида (1) на классы эквивалентных уравнений, т.е. уравнений, которые заменами переменных из группы  $\mathcal{E}$  сводятся одно в другое. Тем самым для решения задачи групповой классификации уравнения (1) достаточно описать по одному представителю из каждого такого класса уравнений. Поскольку в общем случае уравнение (1) не допускает операторов симметрии, опишем сначала уравнения вида (1), имеющие низшие симметричные свойства.

**Теорема 1.** Существуют преобразования (6), которые сводят оператор (4) к одному из таких операторов:

$$\begin{aligned} Q &= m(t\partial_t + x\partial_x), \quad m \neq 0; \\ Q &= \partial_t + \beta\partial_x, \quad \beta \geq 0; \quad Q = \partial_t + \sigma(x)u\partial_u, \quad \sigma \neq 0; \\ Q &= \partial_x; \quad Q = \sigma(x)u\partial_u, \quad \sigma \neq 0; \quad Q = \theta(t, x)\partial_u, \quad \theta \neq 0. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Замена переменных (6) сводит оператор (4) к оператору

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= k(\lambda t + \lambda_1)\partial_{\bar{t}} + \epsilon k(\lambda x + \lambda_2)\partial_{\bar{x}} + \\ &+ [Y_t(\lambda t + \lambda_1) + (\lambda x + \lambda_2)(X'u + Y_x) + X(hu + r)]\partial_v. \end{aligned} \quad (7)$$

Если в (4)  $\lambda \neq 0$ , то, положив в (6)  $k_1 = \lambda^{-1}\lambda_1 k, k_2 = \epsilon\lambda^{-1}\lambda_2 k$ , а  $X$  и  $Y$  ( $X \neq 0$ ) равными интегралам системы уравнений

$$\begin{aligned} X'(\lambda x + \lambda_2) + Xh &= 0, \\ Y_t(\lambda t + \lambda_1) + Y_x(\lambda x + \lambda_2) + Xr &= 0, \end{aligned}$$



сводим оператор (7) к виду

$$\tilde{Q} = \lambda(\bar{t}\partial_{\bar{t}} + \bar{x}\partial_{\bar{x}}).$$

Если в (4)  $\lambda = 0$ , а  $\lambda_1 \neq 0$ , то аналогично приходим к таким операторам:

$$\tilde{Q} = \partial_{\bar{t}} + \beta\partial_{\bar{x}}, \quad \beta \geq 0; \quad Q = \partial_{\bar{t}} + \sigma(\bar{x})v\partial_v, \quad \sigma \neq 0.$$

Если в (4)  $\lambda = \lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 \neq 0$ , то, положив в (6)  $k = \epsilon\lambda_2^{-1}$ , а  $X$  и  $Y$  ( $X \neq 0$ ) равным интегралам уравнений

$$\lambda_2 X' + hX = 0, \quad Y_x + rX = 0,$$

сводим оператор (7) к оператору  $\tilde{Q} = \partial_{\bar{x}}$ .

Наконец, если в (4)  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , то нетрудно убедиться, что в этом случае возможны такие случаи:

$$\tilde{Q} = \sigma(\bar{x})v\partial_v, \quad \tilde{Q} = \theta(\bar{t}, \bar{x})\partial_v.$$

Вернувшись к начальным обозначениям переменных, приходим к операторам, которые наведены в формулировании теоремы.

Теорема доказана.

**Следствие 1.** В рамках сформулированной задачи существуют пять уравнений (1), которые допускают однопараметрические группы локальных преобразований. Соответствующие значения функций  $f$  и  $g$  в уравнениях, а также одномерные алгебры Ли инфинитезимальных операторов, генерирующих эти группы, приведены ниже:

$$A_1^1 = \langle t\partial_t + \partial_x \rangle : g = x^{-1}\tilde{g}(\psi, u), \\ f = x^{-2}\tilde{f}(\psi, u), \psi = tx^{-1}, \tilde{g}_u \neq 0;$$

$$A_1^2 = \langle \partial_t + \beta\partial_x \rangle : g = \tilde{g}(\eta, u), \quad f = \tilde{f}(\eta, u), \\ \eta = x - \beta t, \quad \beta \geq 0, \quad \tilde{g}_u \neq 0;$$

$$A_1^3 = \langle \partial_t + \sigma(x)u\partial_u \rangle : g = -2\sigma'\sigma^{-1} \ln |u| + \tilde{g}(\rho, x), \\ f = (\sigma'\sigma^{-1})^2 u \ln^2 |u| - \sigma'\sigma^{-1} \tilde{g}(\rho, x)u \ln |u| - \sigma^{-1}\sigma''u \ln |u| + u\tilde{f}(\rho, x), \\ \rho = ue^{-t\sigma}, \quad \sigma \neq 0;$$

$$A_1^4 = \langle \partial_x \rangle : g = \tilde{g}(t, u), \quad f = \tilde{f}(t, u), \quad \tilde{g}_u \neq 0;$$

$$A_1^5 = \langle \sigma(x)u\partial_u \rangle : g = -2\sigma'\sigma^{-1} \ln |u| + \tilde{g}(t, x), \quad f = (\sigma'\sigma^{-1})^2 u \ln^2 |u| - \\ - (\sigma^{-1}\sigma'' + \sigma^{-1}\sigma'\tilde{g}(t, x))u \ln |u| + u\tilde{f}(t, x), \quad \sigma' \neq 0.$$

**Доказательство.** Если уравнение (1) допускает однопараметрическую группу инвариантности, то она генерируется некоторым оператором вида (4). Согласно теореме 1, все такие операторы с точностью до эквивалентности исчерпываются одним из шести полученных там операторов. Поэтому остается



для каждого из этих операторов проинтегрировать соответствующую определяющую систему (5), которая уже будет системой двух уравнений для определения двух функций. Для первых пяти операторов соответствующие решения определяющих уравнений имеют вид, приведенный в формулировке следствия.

Для последнего оператора  $Q = \theta(t, u)\partial_u$  система (5) имеет вид

$$\theta_{tt} - \theta_{xx} = \theta f_u + \theta_x g, \quad \theta g_u = 0,$$

откуда, в частности, следует, что  $g_u = 0$ , т.е. этот оператор не может быть оператором симметрии уравнения, которое удовлетворяло бы условия сформулированной задачи.

Неэквивалентность полученных уравнений следует из неэквивалентности соответствующих им операторов симметрии.

Следствие доказано.

**Теорема 2.** В классе операторов (4) не существуют реализации простых алгебр Ли.

*Доказательство.* Для доказательства теоремы достаточно убедиться, что не существуют такие реализации (представления) для низших простых алгебр Ли, которые с точностью до изоморфизма исчерпываются двумя алгебрами [22]:

$$so(3) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle : [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = -e_2, [e_2, e_3] = e_1;$$

$$sl(2, R) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle : [e_1, e_2] = 2e_2, [e_1, e_3] = -2e_3, [e_2, e_3] = e_1.$$

При этом, нужно показать, что не существуют такие тройки линейно независимых операторов вида (4), которые бы удовлетворяли коммутационным соотношениям, определяющим алгебры  $so(3)$  и  $sl(2, R)$ . Сразу отметим, что, согласно с результатами теоремы 1 и следствия 1, мы можем один из базисных операторов каждой из алгебр преобразованиями (6) свести к одному из полученных там пяти операторов.

Поскольку рассмотренная ниже процедура проводится аналогично для каждого из пяти операторов, здесь мы ограничиваемся случаем оператора

$$t\partial_t + x\partial_x. \quad (8)$$

Итак, пусть в алгебрах  $so(3)$  и  $sl(2, R)$  оператор  $e_1$  имеет вид (8). В этом случае для оператора  $Q$  (4) имеет место соотношение

$$[e_1, Q] = -\lambda_1 \partial_t - \lambda_2 \partial_x + [xh'u + xr_x + tr_t]\partial_u,$$

а значит, вследствие выполнения первых двух коммутационных соотношений для каждой из исследуемых алгебр, базисные операторы  $e_2, e_3$  будут принадлежать классу операторов

$$\alpha_1 \partial_t + \alpha_2 \partial_x + (\gamma(x)u + \mu(t, x))\partial_u,$$



где  $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ ,  $\gamma$  и  $\mu$  — гладкие функции своих аргументов. Но тогда очевидным становится невыполнение третьего коммутационного соотношения для алгебр  $sl(2, R)$  и  $so(3)$ .

Теорема доказана.

**Следствие 2.** *Не существуют нелинейные уравнения вида (1), алгебры инвариантности которых изоморфны полупростым алгебрам Ли операторов симметрии или содержат их как подалгебры.*

Как следует из теоремы 2 и известной теоремы Леви–Мальцева [22], если уравнение (1) будет допускать алгебру инвариантности размерности два и выше, то она будет разрешимой алгеброй Ли операторов симметрии.

### 3. Инвариантность относительно двумерных алгебр Ли операторов симметрии

В теории абстрактных алгебр Ли различают [22] две двумерные алгебры Ли:

$$A_{2.1} = \langle e_1, e_2 \rangle : [e_1, e_2] = 0;$$

$$A_{2.2} = \langle e_1, e_2 \rangle : [e_1, e_2] = e_2.$$

Реализации этих алгебр могут быть построены простым дополнением известных реализаций одномерных алгебр Ли ещё одним базисным оператором вида (4). При этом, поскольку алгебра  $A_{2.1}$  является абелевой, то выбор её одномерной подалгебры не играет никакой роли. В случае алгебры  $A_{2.2}$  нужно исследовать оба возможных случая. Рассмотрим подробно случай реализации  $A_1^1$  из следствия 1.

Случай алгебры  $A_{2.1}$ . Пусть оператор  $e_1$  имеет вид (8), а оператор  $e_2$  имеет вид (4). Тогда из выполнения коммутационного соотношения  $[e_1, e_2] = 0$  следует, что

$$\lambda_1 = \lambda_2 = xh' = 0, \quad tr_t + xr_x = 0,$$

а потому базис реализации может быть выбран таким:

$$\langle t\partial_t + x\partial_x, (mu + r(\psi))\partial_u \rangle,$$

где  $m \in R$ ,  $\psi = tx^{-1}$ . Если  $m = 0$ , то  $e_2 = r(\psi)\partial_u$  и, как показано выше, полученная реализация не будет удовлетворять условиям сформулированной задачи. Следовательно,  $m \neq 0$ . Но замена переменных

$$\bar{t} = t, \quad \bar{x} = x, \quad v = u + m^{-1}r(\psi)$$

сводит базисные операторы полученной реализации к операторам  $\bar{t}\partial_{\bar{t}} + \bar{x}\partial_{\bar{x}}$ ,  $m v \partial_v$ . Поэтому далее можем рассматривать реализацию  $\langle t\partial_t + x\partial_x, u\partial_u \rangle$ .

Второе из определяющих уравнений (5) для оператора  $u\partial_u$  имеет вид  $u g_u = 0$ , откуда следует, что эта реализация не удовлетворяет условиям сформулированной задачи.

Следовательно, в рамках поставленной задачи реализация  $A_1^1$  не допускает расширения к реализациям алгебры  $A_{2.1}$ .



Случай алгебры  $A_{2.2}$ . Если оператор  $e_1$  имеет вид (8), то из выполнения коммутационных соотношений  $[e_1, e_2] = e_2$  следует, что  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ,  $xh' = h$ ,  $tr_t + xr_x = r$ . Если же  $e_2$  имеет вид (8), то из  $[e_1, e_2] = e_2$  следует равенство  $1 = 0$ , которое является ложным. Следовательно, дальнейшему исследованию подлежит случай  $e_2 = (txu + xr(\psi))\partial_u$ ,  $t \neq 0$ ,  $\psi = tx^{-1}$ , т.е. с точностью до эквивалентности имеет место такая реализация:

$$\langle t\partial_t + x\partial_x, xu\partial_u \rangle.$$

Дальнейший анализ показал, что она удовлетворяет условиям поставленной задачи, а в соответствующем инвариантном уравнении значения функций  $f$  и  $g$  такие:

$$g = -2x^{-1} \ln |u| + x^{-1} \tilde{g}(\psi), \\ f = x^{-2} u \ln^2 |u| - x^{-2} \tilde{g}(\psi) u \ln |u| + x^{-2} u \tilde{f}(\psi), \quad \psi = tx^{-1}.$$

Проведя аналогичные рассуждения для остальных известных реализаций одномерных алгебр Ли операторов симметрии, мы получили десять неэквивалентных  $A_{2.1}$ - и  $A_{2.2}$ -инвариантных уравнений, для которых соответствующие реализации являются максимальными алгебрами инвариантности. Сведенный результат классификации подан в следующих двух предложениях.

**Теорема 3.**  $A_{2.1}$ -инвариантные уравнения вида (1) исчерпываются четырьмя неэквивалентными уравнениями. Соответствующие их алгебры инвариантности и значения функций  $f$  и  $g$  такие:

$$1) \langle \partial_t, \sigma(x)u\partial_u \rangle : g = -2\sigma'\sigma^{-1} \ln |u|,$$

$$f = (\sigma'\sigma^{-1})^2 u \ln^2 |u| - \sigma^{-1} \sigma' u \ln |u| + u \tilde{f}(x), \quad \sigma' \neq 0;$$

$$2) \langle \partial_t, \partial_x \rangle : g = \tilde{g}(u), \quad f = \tilde{f}(u), \quad \tilde{g}_u \neq 0;$$

$$3) \langle \partial_x, \partial_t + u\partial_u \rangle : g = \tilde{g}(\omega), \quad f = e^t \tilde{f}(\omega), \quad \omega = e^{-t}, \quad \tilde{g}_\omega \neq 0;$$

$$4) \langle \sigma(x)u\partial_u, \partial_t - \frac{1}{2}k\sigma(x)\psi(x)u\partial_u \rangle : g = -2\sigma'\sigma^{-1} \ln |u| + kt + \tilde{g}(x),$$

$$f = (\sigma'\sigma^{-1})^2 u \ln^2 |u| - \sigma^{-1} \sigma'' u \ln |u| - \sigma^{-1} \sigma'(kt + \tilde{g}(x)) u \ln |u| +$$

$$+ u \left[ \frac{1}{2}k\sigma'\sigma^{-1}t + \frac{1}{4}k^2t^2 + \frac{1}{2}k\tilde{g}(x) + \tilde{f}(x) \right],$$

$$k \neq 0, \quad \sigma' \neq 0, \quad \psi = \int \sigma^{-1} dx.$$

**Теорема 4.**  $A_{2.2}$ -инвариантные уравнения вида (1) исчерпываются шестью неэквивалентными уравнениями. Соответствующие их алгебры ин-



вариантности и значения функций  $f$  и  $g$  такие:

$$1) \langle t\partial_t + x\partial_x, k^{-1}|x|^k u\partial_u \rangle : g = x^{-1}(-2k \ln |u| + \tilde{g}(\psi)),$$

$$f = x^{-2}u(-k^2 \ln^2 |u| + k\tilde{g}(\psi) \ln |u| + k(k-1) \ln |u| + \tilde{f}(\psi)),$$

$$k \neq 0, \psi = tx^{-1};$$

$$2) \langle \partial_t + \beta\partial_x, e^{\beta^{-1}xu}\partial_u \rangle : g = -2\beta^{-1} \ln |u| + \tilde{g}(\eta),$$

$$f = \beta^{-2}u \ln^2 |u| - (\beta^{-2} + \beta^{-1}\tilde{g}(\eta))u \ln |u| + u\tilde{f}(\eta),$$

$$\beta > 0, \eta = x - \beta t;$$

$$3) \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_t + \beta\partial_x \rangle : g = \eta^{-1}\tilde{g}(u), \quad f = \eta^{-2}\tilde{f}(u), \quad \beta \geq 0,$$

$$\eta = x - \beta t, \tilde{g}_u \neq 0;$$

$$4) \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_t + mx^{-1}u\partial_u \rangle : g = x^{-1}(2m\psi + \tilde{g}(\omega)),$$

$$f = x^{-1}[-2m\psi u - 2m\psi - 2 - \tilde{g}(\omega) + e^{m\psi}\tilde{g}(\omega)],$$

$$m > 0, \omega = ue^{-m\psi}, \psi = tx^{-1}, \tilde{g}_\omega \neq 0;$$

$$5) \langle \partial_x, e^{xu}\partial_u \rangle : g = -2 \ln |u| + \tilde{g}(t), \quad f = u \ln^2 |u| - u \ln |u|(1 + \tilde{g}(t)) + u\tilde{f}(t);$$

$$6) \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_x \rangle : g = t^{-1}\tilde{g}(u), \quad f = t^{-2}\tilde{f}(u), \quad \tilde{g}_u \neq 0.$$

#### 4. Завершение групповой классификации

Как было подчеркнуто выше, все уравнения вида (1), имеющие нетривиальные симметричные свойства, могут быть инвариантными относительно разрешимых алгебр Ли операторов симметрии. С точностью до изоморфизма различают [21, 22] девять трехмерных разрешимых алгебр Ли  $A_3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$  над полем действительных чисел:

$$A_{3.1} = A_{2.1} \oplus A_1 : [e_i, e_j] = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

$$A_{3.2} = A_{2.2} \oplus A_1 : [e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0;$$

$$A_{3.3} : [e_2, e_3] = e_1, [e_1, e_3] = [e_1, e_2] = 0;$$

$$A_{3.4} : [e_1, e_3] = e_1, [e_2, e_3] = e_1 + e_2, [e_1, e_2] = 0;$$

$$A_{3.5} : [e_1, e_3] = e_1, [e_2, e_3] = e_2, [e_1, e_2] = 0;$$

$$A_{3.6} : [e_1, e_3] = e_1, [e_2, e_3] = -e_2, [e_1, e_2] = 0;$$

$$A_{3.7} : [e_1, e_3] = e_1, [e_2, e_3] = qe_2, [e_1, e_2] = 0 \quad (0 < |q| < 1);$$

$$A_{3.8} : [e_1, e_3] = -e_2, [e_2, e_3] = e_1, [e_1, e_2] = 0;$$

$$A_{3.9} : [e_1, e_3] = qe_1 - e_2, [e_2, e_3] = e_1 + qe_2, [e_1, e_2] = 0 \quad (q > 0).$$

Следует отметить, что алгебры  $A_{3,j}$  ( $j = 1, 3, 4, \dots, 9$ ) такие, что  $\langle e_1, e_2 \rangle = A_{2.1}$ , а  $A_{3.2} = A_{2.2} \oplus A_1$ . Это даёт возможность провести классификацию



уравнений, алгебры инвариантности которых являются трехмерными разрешимыми алгебрами Ли операторов симметрии, используя результаты теорем 3 и 4.

С другой стороны все полученные в этих теоремах уравнения содержат произвольные функции одного аргумента. Это даёт возможность осуществить дальнейшую групповую классификацию уравнения (1), используя метод Ли-Овсянникова, чем мы в дальнейшем и воспользовались. Поскольку процедура классификации для каждого уравнения проводится аналогично, мы останавливаемся подробно только на случае первого из  $A_{2,1}$ -инвариантных уравнений.

Здесь  $g = -2\sigma'\sigma^{-1}\ln|u|$ ,  $f = (\sigma'\sigma^{-1})u\ln^2|u| - \sigma^{-1}\sigma''u\ln|u| + u\tilde{f}(x)$ ,  $\sigma = \sigma(x)$ ,  $\sigma' \neq 0$ . Поэтому первое определяющее уравнение (5) имеет вид

$$-2h' + 2\lambda\sigma'\sigma^{-1}\ln|u| = -2(\lambda x + \lambda_2)(\sigma'\sigma^{-1})'_x \ln|u| - 2h\sigma'\sigma^{-1} - 2r\sigma'\sigma^{-1}u^{-1}.$$

Поскольку  $h = f(x)$ ,  $\sigma = \sigma(x)$ ,  $r = r(t, x)$ ,  $\lambda, \lambda_2 \in R$ , то выполнение этого равенства равносильно выполнению таких равенств:

$$\begin{aligned} h' &= \sigma'\sigma^{-1}h, \quad r = 0, \\ \lambda\sigma'\sigma^{-1} &= -(\lambda x + \lambda_2)(\sigma'\sigma^{-1})'_x. \end{aligned}$$

Если  $\sigma$  — произвольная функция, то  $\lambda = \lambda_2 = r = 0$ ,  $h = C\sigma$ ,  $C \in R$ , т.е. имеет место случай алгебры  $\langle \partial_t, \sigma(x)u\partial_u \rangle$ . Следовательно, расширение симметрии возможно, когда функция  $\psi = \sigma'\sigma^{-1}$  является ненулевым решением уравнения

$$(\alpha x + \beta)\psi' + \alpha\psi = 0, \quad \alpha, \beta \in R, \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0.$$

Если  $\alpha \neq 0$ , то сдвиги по  $x$  позволяют положить  $\beta = 0$  и получаем  $\psi = mx^{-1}$ ,  $m \neq 0$ . Проведя дальнейшие вычисления, получаем, что в этом случае в инвариантном уравнении

$$\begin{aligned} g &= -2mx^{-1}\ln|u|, \\ f &= mx^{-2}[mu\ln^2|u| - (m-1)u\ln|u| + nu], \quad m \neq 0, \quad m, n \in R, \end{aligned}$$

а алгебра инвариантности уравнения является трехмерной алгеброй Ли операторов симметрии

$$\langle \partial_t, |x|^m u \partial_u, t \partial_t + x \partial_x \rangle,$$

которая изоморфна алгебре  $A_{3,7}$ .

Если  $\alpha = 0$ , то  $\beta \neq 0$  и  $\Psi = m$ ,  $m \neq 0$ . В этом случае в уравнении

$$g = \ln|u|, \quad f = \frac{1}{4}u\ln^2|u| - \frac{1}{4}u\ln|u| + nu, \quad n \in R,$$

а алгебра инвариантности уравнения является трехмерной алгеброй Ли операторов симметрии

$$\langle \partial_t, \partial_x, e^{-\frac{1}{2}x} u \partial_u \rangle,$$



которая изоморфна алгебре  $A_{3.2}$ .

Дальнейшие исследования показали, что среди уравнений (1) высшие симметричные свойства имеют восемь уравнений, максимальными алгебрами инвариантности которых являются трехмерные разрешимые алгебры Ли операторов симметрии. Ниже приведен их полный список, в котором указан и тип соответствующих максимальных алгебр инвариантности.

#### $A_{3.2}$ -инвариантные уравнения

$$1) \ u_{tt} = u_{xx} + u_x \ln |u| + \frac{1}{4} u \ln^2 |u| - \frac{1}{4} u \ln |u| + nu, \quad n \in R;$$

$$\langle \partial_t, \partial_x, e^{-\frac{1}{2}x} u \partial_u \rangle;$$

$$2) \ u_{tt} = u_{xx} + m[\ln |u| - t]u_x + \frac{m^2}{4}u[(\ln |u| - t)(\ln |u| - t - 1)] + nu, \quad m > 0,$$

$$n \in R;$$

$$\langle \partial_x, \partial_t + u \partial_u, e^{-\frac{1}{2}mx} u \partial_u \rangle.$$

#### $A_{3.4}$ -инвариантные уравнения

$$1) \ u_{tt} = u_{xx} + x^{-1}[2 \ln |u| + mx^{-1}t + n]u_x + x^{-2}u \ln |u| +$$

$$+(mx^{-1}t + n - 2)x^{-2}u \ln |u| + \frac{1}{4}m^2x^{-4}t^2u + \frac{1}{2}m(n - 3)x^{-3}tu + px^{-2}u,$$

$$m \neq 0, \quad n, p \in R;$$

$$\langle t \partial_t + x \partial_x, x^{-1}u \partial_u, \partial_t - \frac{m}{2}x^{-1} \ln |x| u \partial_u \rangle.$$

#### $A_{3.5}$ -инвариантные уравнения

$$1) \ u_{tt} = u_{xx} + |u|^m u_x + n|u|^{1+2m}, \quad m \neq 0, \quad n \in R;$$

$$\langle \partial_t, \partial_x, t \partial_t + x \partial_x - m^{-1}u \partial_u \rangle;$$

$$2) \ u_{tt} = u_{xx} + e^u u_x + ne^{2u}, \quad n \in R;$$

$$\langle \partial_t, \partial_x, t \partial_t + x \partial_x - \partial_u \rangle;$$

$$3) \ u_{tt} = u_{xx} - x^{-1}[2 \ln |u| - mx^{-1}t - n]u_x + x^{-2}u \ln^2 |u| -$$

$$-x^{-2}(mx^{-1}t + n)u \ln |u| + ux^{-2} \left[ \frac{m}{4}x^{-2}t^2 + \frac{m}{2}(n - 1)x^{-1}t + p \right],$$

$$m, n, p \in R;$$

$$\langle t \partial_t + x \partial_x, xu \partial_u, \partial_t + \frac{m}{4}x^{-1}u \partial_u \rangle.$$



А<sub>3.7</sub>-инвариантные уравнения

$$1) u_{tt} = u_{xx} - 2mx^{-1}u_x \ln |u| + mx^{-2}[mu \ln^2 |u| - (m-1)u \ln |u| + nu],$$

$$m \neq 0, 1; n \in R;$$

$$\langle \partial_t, |x|^m u \partial_u, t \partial_t + x \partial_x \rangle;$$

$$2) u_{tt} = u_{xx} - x^{-1}[2k + \ln |u| - mx^{-1}t - n]u_x + k^2 x^{-2}u \ln^2 |u| -$$

$$-kx^{-2}[mtx^{-1} + k + n - 1]u \ln |u| + \frac{1}{2}m(k-2+n)tx^{-3}u +$$

$$+ \frac{1}{4}m^2 t^2 x^{-4}u + px^{-2}u, \quad |k| \neq 0, 1; m \neq 0, n, p \in R;$$

$$\langle t \partial_t + x \partial_x, |x|^k u \partial_u, \partial_t + \frac{m}{2(1+k)}x^{-1}u \partial_u \rangle.$$

**5. Выводы**

Поскольку существенной особенностью разрешимых алгебр Ли является наличие у них композиционного ряда [22], то проведенная групповая классификация уравнения (1) является полной. В дальнейшем нетривиальные симметричные свойства полученных уравнений могут быть использованы для их симметричной редукции и построения точных (инвариантных) решений.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.
2. Olver P.J. Applications of Lie Groups to Differential Equations. — New York: Springer-Verlag, 1986. — 497 p.
3. Фушич В.И., Штеленъ В.М., Серов Н.И. Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. — Киев: Наукова думка, 1989. — 336 с.
4. Lie S. Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linearer partiellen Differentialgleichungen. // Arch. Math. — 1881.— 6, 3. — P. 328–368.
5. Lie S. Discussion der differential Gleichung  $d^2z/dxdy = F(z)$ . // Arch Math. — 1881. — 8, 1. — P. 112–125.
6. Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений С.А. Чаплыгина. // Журн. прикл. мех. и техн. физ. — 1960. — 3. — С. 126–145.
7. Blumen G.W., Kumei S. On invariance properties of the wave equation. // J. Math. Phys. — 1987. — 28, 2. — P. 307–318.
8. Ames W.F., Lohner R.J., Adams E. Group properties of  $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$ . // Int. J. Non-Linear Mech. — 1981.—16. — P. 439–447.



9. Pucci E., Salvatori M.C. Group properties of a class of semilinear hyperbolic equations. // Int. J. Non-Linear Mech. – 1986. – **21**. – P. 147–155.
10. Oron A., Rosenau P. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations. // Phys. Lett. A. – 1986. – **118**, 4. – P. 172–176.
11. Suhubi E.S., Bakkaloglu A. Group properties and similarity solutions for a quasi-linear wave equation in the plane. // Int. J. Non-Linear Mech. – 1991. – **26**. – P. 567–584.
12. Arrigo D.J. Group properties of  $u_{xx} - u_y^m u_{yy} = f(u)$ . // Int. J. Non-Linear Mech. – 1991. – **26**. – P. 619–629.
13. Kingston J.G., Sophocleous C. Symmetries and form-preserving transformations of one-dimensional wave equations with dissipation. // Int. J. Non-Linear Mech. – 2001. – **36**. – P. 987–997.
14. Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности. // Докл. АН СССР. – 1959. – **125**, 3. — С. 492–495.
15. Torrisi M., Valenti A. Group properties and invariant solutions for infinitesimal transformations of a nonlinear wave equation. // Int. J. Non-Linear Mech. – 1985. – **20**. – P. 135–144.
16. Pucci E. Group analysis of the equation  $u_{tt} + \lambda u_{xx} = g(u, u_x)$ . // Riv. Mat. Univ. Parma. – 1987. – **12**, 4. – P. 71–87.
17. Torrisi M., Valenti A. Group analysis and some solutions of a nonlinear wave equations. // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. – 1990. – **38**, 2. – P. 455–458.
18. Ibragimov N.H., Torrisi M., Valenti A. Preliminary group classification of equations  $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$ . // J. Math. Phys. – 1991. – **32**, 11. – P. 2988–2995.
19. Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source. // J. Phys. A: Math. Gen. – 1999. – **32**. – P. 7405–7418.
20. Жданов Р.З., Лагно В. Групповая классификация уравнений теплопроводности с нелинейным джерелом. // Доп. НАН України. – 2000. — **3**. – С. 12–16.
21. Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations. // Acta Appl. Math. – 2001. – **69**, 1.—P. 43–94.
22. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и её приложения. Т.1.— М.: Мир, 1980. — 456 с.



## АНОТАЦІЇ

УДК 533.72

**Нестационарні стани газу для моделі Бріана-Піддака.**

Гордєвський В. Д., Бузніцька Е. М. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 582. Математика, прикладна математика і механіка, с. 3–9.

Для описання еволюції газу використано модель Бріана-Піддака. В цій моделі кожна з молекул має не тільки лінійну, а й кутову швидкість, і обертається навколо своєї осі. Запропоновано нестационарні розподіли спеціального вигляду, які відповідають вихроподібним станам газу, тобто потокам з поступальною та обертальною степенями свободи. Побудовано бімодальні розподіли з вихровими модами для наближеного описання взаємодії двох таких потоків. Вивчається поведінка інтегрального відхилення між частинами рівняння Больцмана за різних припущень щодо гідродинамічних параметрів.

Бібліогр.: 11 найм.

УДК 617.95

**Про коректність многоточкової інтегральної крайової задачі на смугі.**

Кенне Е., Таю Сімо Дж. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 582. Математика, прикладна математика і механіка, с. 10–14.

В області, яка є декартовим добутком сегмента та дійсної прямої, досліджується коректність многоточкової крайової задачі на смугі з інтегралом у крайовій умові для диференціальних рівнянь з частинними похідними. Установлено умови коректності задачі, що розглядається, у класі обмежених гладких функцій.

Бібліогр.: 13 найм.

УДК 517.948

**Про характеристичну властивість многочленів, задовольняючих різницевому співвідношенню 4-го порядку.**

Загороднюк С. М. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 582. Математика, прикладна математика і механіка, с. 15–25.

В даній роботі ми вивчаємо системи многочленів  $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ , що задовольняють співвідношенню:  $J_5 p(\lambda) = \lambda^2 p(\lambda)$ , де  $J_5$  - п'ятидіагональні, ермітові, напівнескінчені матриці і  $p(\lambda) = (p_0(\lambda), p_1(\lambda), p_2(\lambda), \dots)^T$ , а також відповідну симметричну проблему моментів. Доведені уточнені варіанти критерія розв'язності проблеми моментів і аналога теореми Фавара для таких систем многочленів. Показано, що наявність співвідношень ортонормальності спеціального вигляду є характеристичною властивістю таких систем многочленів. Показано зв'язок з ортогональними матрицевими многочленами на дійсній осі.

Бібліогр.: 10 найм.



УДК 517.2

**Обчислення показника Ляпунова лінійного звичайного диференціального рівняння, коефіцієнти якого швидко осцилюють.**

Л ю б а р с ь к и й М. Г. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 582. Математика, прикладна математика і механіка, с. 26–48 .

Розглядається обурена система диференціальних рівнянь з експонентним розщепленням простору вирішень у припущенні, що інтегральна норма  $\{B\} \equiv \sup_{s,t} \left| \int_t^{t+s} B(t) dt \right|$  ( $0 \leq t \leq \infty$ ,  $0 \leq s \leq 1$ ) збурювання  $B(t)$  мала. Остання умова може виконуватися і для не малих  $B(t)$ , якщо ця матриця швидко осцилює. При деяких обмеженнях знайдено ітераційний метод обчислення старшого і генерального показників обуреної системи. Рішення цієї проблеми має багато додатків у фізику. У якості приклада приводиться обчислення інкремента пучково-плазмової нестійкості в умовах неоднородної плазми. Ще одним прикладом є теорема усереднення для лінійного диференціального рівняння з малим параметром.

Бібліогр.: 10 найм.

УДК 517.948

**Функціональна модель Надя – Фояша для обмежених операторів.**

Р о з у м е н к о О. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 582. Математика, прикладна математика і механіка, с. 49–61 .

Здійснюється побудова функціональної моделі для довільного обмеженого, не обов'язково стискаючого, оператору  $T$ , діючого в гільбертовому просторі  $H$ . Ця модель є аналогом функціональної моделі Б. Секефальві-Надя та Ч. Фояша.

Бібліогр.: 7 найм.

УДК 517.5

**Канонічні, N-екстремальні та головні розв'язки узагальненої інтерполяційної задачі для стільтьєсівських функцій.**

Д ю к а р е в Ю. М. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 582. Математика, прикладна математика і механіка, с. 62–70 .

У цій статті впроваджені та досліджені канонічні, N-екстремальні та головні розв'язки узагальненої інтерполяційної задачі для стільтьєсівських оператор-функцій. Доведено, що множина канонічних розв'язків першого (другого) роду збіжна з множиною N-екстремальних розв'язків першого (другого) роду. Досліджені головні розв'язки узагальненої інтерполяційної задачі і для них отримані явні формули.

Бібліогр.: 5 найм.



УДК 517.977.5, 519.7

**Про оптимізаційний підхід в задачі вибору схеми хіміотерапії.**

Марценюк В. П., Ладика Р. Б., Ковальчук О. Я. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 582. Математика, прикладна математика і механіка, с. 71–80.

В роботі представлено модель хіміотерапії в ході лікування онкологічних захворювань. Запропоновано методику перевірки оптимальності режимів лікування, яка може бути зведена до задачі існування розв'язків алгебраїчних нерівностей. Оптимальний процес системи збудовано в явному вигляді з використанням спеціальних функцій.

Бібліогр.: 11 найм.

УДК 532.528

**Якісне дослідження процесів структурування магнітної рідини.**

Пацегон М. Ф., Попова Л. М., Свириденко С. О. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 582. Математика, прикладна математика і механіка, с. 81–89.

Розглядаються процеси структурування магнітної рідини, тобто виникнення і розпад агрегатів з магнітних часток, які входять до складу рідини. У припущенні, що можна знехтувати дифузійними процесами у рідині, досліджується однопараметрична динамічна система другого порядку, яка описує зміну магнітного стану рідини, що знаходиться у спокої у сталому однорідному магнітному полі. Знайдені стани рівноваги рідини і біфуркаційні значення параметру, котрим є напруженість магнітного поля. При різних значеннях параметру побудовані фазові портрети системи на площині.

Мал.: 3. Бібліогр.: 6 найм.

УДК 517.518.6

**Голоморфні майже періодичні функції у різних метриках.**

Удодова О. І. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 582. Математика, прикладна математика і механіка, с. 90–106.

У роботі класична теорема Бора про голоморфні майже періодичні функції у смузі розповсюджується на голоморфні функції в трубчатій області скінченновимірного векторного простору. Крім рівномірної метрики розглядаються метрики Степанова, Вейля, Безіковича.

Бібліогр.: 14 найм.

УДК 532.135+581.14

**Дослідження напружено-деформованого стану двовимірного біологічного матеріалу, який зростає, за умовами обмеження зростання.**



К а н т о р Б. Я. К і з і л о в а Н. М.

– Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 582. Математика, прикладна математика і механіка, с. 107–120.

В роботі представлені результати дослідження напружено-деформівного стану пластини з біологічного матеріалу, який зростає, за умовами повного чи часткового обмеження зростання по периметру. Матеріал вважався в'язкопружним, а у якості обмеження розглядалася гнучка нерозтяжна полімерна нитка. Для випадку повного обмеження рішення задачі отримане у виді розкладення по системі ортогональних поліномів. Чисельні розрахунки проведені за допомогою методу кінцевих елементів. Отримані розподіли напруженостей і досліджені деформації пластини на різних стадіях зростання. Показано, що розподіл напруженостей і напрямків головних осей тензора напруженостей істотно змінюються поблизу області обмеження. Запропоновано методики експериментального визначення впливу поля механічних напруженостей на зростання біологічних матеріалів.

Мал.: 2. Бібліогр.: 18 найм.

УДК 517.9:535.4

**Повторна регуляризація оператора задачі дифракції вісесиметричних ТМ хвиль на сфері з отвором.**

Резуненко В. О. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 582. Математика, прикладна математика і механіка, с. 121–134.

Відокремлення і обернена статична та головна динамічна частини оператора задачі дифракції вісесиметричних ТМ хвиль на сфері з круговим отвором. Для цього використано обернення інтегрального оператора типу Абеля та розв'язок допоміжної задачі Коши. Одержана система лінійних алгебраїчних рівнянь II роду з компактним в просторі  $\ell^2$  оператором. Система є ефективно розв'язною чисельно та аналітично у  $\ell^2$ .

Мал.: 2. Бібліогр.: 17 найм.

УДК 271.23.17.19.33.17

**Два інтеграли.**

Гришин А. П., Поєдинцева І. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 582. Математика, прикладна математика і механіка, с. 135–142.

У роботі обчислюються два визначені інтеграли, які виникають у дослідженнях авторів. Ми не знайшли їх у відомих нам таблицях інтегралів. У порівнянні з іншими, в задачнику М.А.Євграфова та співавторів міститься більша кількість типів інтегралів. Дана стаття може розглядатися як додаток до цієї книги.

Бібліогр.: 2 найм.



УДК 513.88:517.948.3

**Деякі результати про парні рівняння в кільцях з факторизаційними парами.**

По л е т а є в Г. С. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 582. Математика, прикладна математика і механіка, с. 143–149.

Розглянуто абстрактні парні рівняння загального вигляду з невідомими з кільця, що володіє факторизаційною парою підкілець. У припущенні правильності факторизації деяких елементів, що будуються за коефіцієнтами, встановлено теорему існування й єдиності з формулами розв'язку.

Бібліогр.: 15 найм.

УДК 513.88

**Об одному узагальненні теореми Боля-Бора для абстрактних функцій які задані на групі.**

Д і м і т р о в а С. Д., Д і м і т р о в Д. Б. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 582. Математика, прикладна математика і механіка, с. 150–161.

Розглянуто різностне рівняння  $\Phi(hx) - \Phi(x) = F_h(x)$ . Рішення  $\Phi(x)$  та праві частини  $F_h(x)$  - функції, які задані на декартовому добутку груп зі значеннями у просторі Фреше, що не містить підпростори, які ізоморфні простору  $c_0$ . Показано, якщо існує рішення  $\Phi(x)$ , яке обмежене на відносно щільному множинстві, то воно є майже періодичною, майже періодичною за Левітаном, майже автоморфною функцією, як тільки права частина є м.п.ф (L-м.п.ф., м.а.ф.).

Бібліогр.: 16 найм.

УДК 517.94

**Інерціальні многовиди для рівняння реакції-дифузії в тонких двошарових областях.**

Р е к а л о А. М. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 582. Математика, прикладна математика і механіка, с. 162–178.

Робота присвячена дослідженню асимптотичної поведінки розв'язків напівлінійного параболического рівняння в двовимірних тонких двошарових областях. Задачі, подібні до цієї, виникають при моделюванні процесів реакції-дифузії у тонких багатошарових плівках, що є розділеними проникними мембранами. В роботі показано, що кожний розв'язок задачі притягується з експоненціальною швидкістю до деякого інваріантного скінченновимірного  $C^1$ -многовиду. Інакше кажучи, вихідна нескінченновимірна динамічна система асимптотично може бути описана за допомогою скінченної системи звичайних диференціальних рівнянь.

Бібліогр.: 12 найм.



УДК 517.95

**Групова класифікація одного класу квазілінійних хвильових рівнянь.**

Лагно В. І., Магда О. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 582. Математика, прикладна математика і механіка, с. 179–191.

Розв'язана задача групової класифікації квазілінійних рівнянь вигляду  $u_{tt} = u_{xx} + g(t, x, u)u_x + f(t, x, u)$ ,  $g_u \neq 0$ . Отримано повний перелік представників нееквівалентних класів рівнянь, що мають нетривіальні симетрійні властивості. Ключові слова: групова класифікація, квазілінійні хвильові рівняння, оператори симетрії, алгебри Лі.

Бібліогр.: 22 найм.



ЗМІСТ	
<b>Gordevskyy V. D., Buznitska E. M. Non-stationary States of a Gas for the Bryan-Pidduck Model</b>	3
<b>Kengne E., Tayou Simo J. On well-posedness of multi-point integral boundary value problems in a stripe</b>	10
<b>Загороднюк С. М. О характеристическом свойстве многочленов, удовлетворяющих разностному соотношению 4-го порядка</b>	15
<b>Lyubarsky M. G. Calculation of the Lyapunov exponent of Linear Ordinary Equation with Rapidly Oscillating Coefficients</b>	26
<b>Розуменко О. В. Функциональная модель Нады-Фояша для ограниченных операторов</b>	49
<b>Дюкарев Ю. М. Канонические, N-экстремальные и главные решения обобщенной интерполяционной задачи для стилтесовских функций</b>	62
<b>Марценюк В. П., Ладика Р. Б., Ковальчук О. Я. Про оптимізаційний підхід в задачі вибору схеми хіміотерапії</b>	71
<b>Пацегон Н. Ф., Попова Л. Н., Свириденко С. А. Качественное исследование процессов структурирования магнитной жидкости</b>	81
<b>Удодова О. И. Голоморфные почти периодические функции в различных метриках</b>	90
<b>Кантор Б. Я., Кизилова Н. Н. Исследование плоского напряженно-деформированного состояния растущего биологического материала при ограничении роста</b>	107
<b>Резуненко В. А. Повторная регуляризация оператора задачи дифракции осесимметричных ТМ волн на сфере с отверстием.</b>	121



Grishin A. F., Poedintseva I. V. Two integrals 135

Полетаев Г. С. Некоторые результаты о парных уравнениях в  
кольцах с факторизационными парами 143

Димитрова С. Д., Димитров Д. Б. Об одном обобщении  
теоремы Боля-Бора для абстрактных функций, заданных на  
группе 150

Rekalo A. M. Inertial manifolds for reaction-diffusion equation on thin  
two-layer domains 162

Лагно В. И., Магда Е. В. Групповая классификация одного  
класса квазилинейных волновых уравнений 179

АНОТАЦІЇ 192



## CONTENTS

<b>Gordevskyy V. D., Buznitska E. M.</b> Non-stationary States of a Gas for the Bryan-Pidduck Model	3
<b>Kengne E., Tayou Simo J.</b> On well-posedness of multi-point integral boundary value problems in a stripe	10
<b>Zagorodnyuk S. M.</b> On a characteristic property of polynomials satysfying a difference equation of 4 th order	15
<b>Lyubarsky M. G.</b> Calculation of the Lyapunov exponent of Linear Ordinary Equation with Rapidly Oscillating Coefficients	26
<b>Rozumenko O. V.</b> Nagy – Foias functional model of bounded operator	49
<b>Dyukarev Yu. M.</b> The canonical N-extremal and main solutions for the generalised interpolation problem for Stieltjes functions	62
<b>Marzeniuk V. P., Ladyka R. B., Kovalchuk O. Ya.</b> On Optimizational Approach for Problem of Chemotherapy Scheme Search	71
<b>Patsegon N. F., Popova L. N., Sviridenko S. A.</b> A qualitative analysis of the structurization processes in a magnetic fluid	81
<b>Udodova O. I.</b> Holomorphic almost periodic functions in various metrics	90
<b>Kantor B. Ya., Kizilova N. N.</b> Stress-strain state investigation in bidimensional growing biological material at growth restriction	107
<b>Rezunenko V. A.</b> Multiple regularization of the diffraction operator for the axis-simmetrical TM wave problems on the sphere with aperture	121
<b>Grishin A. F., Poedintseva I. V.</b> Two integrals	135



<b>Poletaev G. S.</b> Some results on the conjugate equations in rings with factorization pairs	143
<b>Dimitrova S. D., Dimitrov D. B.</b> About one generalization of the Bohl-Bohr theorem for abstract functions, given on group	150
<b>Rekalo A. M.</b> Inertial manifolds for reaction-diffusion equation on thin two-layer domains	162
<b>Lagno V. I., Magda O. V.</b> Group classification of one class of quasilinear wave equations	179
<b>SUMMARY</b>	192



## Visit our Web-page

<http://www-mechmath.univer.kharkov.ua/vestnik/>

to find

- Information for Manuscript Preparation
- Abstracts
- Editorial Board

*Збірник наукових праць*

Вісник Харківського національного університету

№ 582

Серія "Математика, прикладна математика і механіка"

Підписано до друку 15.05.2003 р.

Формат 70 × 108/16. Папір офсетний.

Умовн.- друк. арк. – 13,2

Обл.- вид. арк. – 15,3

Наклад 400 прим.

Ціна договірна

20-00

61077, Харків, м. Свободи, 4, Харківський національний університет

Видавничий центр ХНУ.

Відруковано ПП "Азамаєв В.Р."

61144 Харків-144, вул. Героїв праці, 17.



(14) c/o-1<sup>v</sup>