ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ С ПРАВИЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ КОРНЕЙ

Т. А. Коломийцева

В работах Б. Я. Левина [2, 3] и А. Пфлюгера [4—6], результаты которых изложены в [1], установлены теоремы, относящиеся к асимптотическому поведению целых функций в случае правильного распределения корней. В частности, для случая нецелого порядка известна следующая теорема [1, гл. II, стр. 120].

Теорема 1. *Пусть* $\rho(r)$ — *некоторый уточненный порядок, причем* $\rho = \lim \rho(r)$ — *нецелое число и множество* $\{a_n\}$ *точек ком-*

---

[1] Напомним, что топология τ называется *непрерывной*, если $x_\alpha \downarrow 0$ влечет топологическую сходимость $x_\alpha \to 0$.

плексной плоскости имеет угловую плотность $\Delta(\psi)$ с показателем $\rho(r)$. Тогда при z, не принадлежащем некоторому C°-множеству, целая функция*

$$\left.\begin{aligned} f(z) = z^m e^{P(z)} \prod_1^\infty G\left(\frac{z}{a_k};\ p\right) \\ (P(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_p z^p,\ p = [\rho] \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

удовлетворяет асимптотическому равенству

$$\ln|f(re^{i\theta})| \approx H(\theta)\, r^{\rho(r)}, \qquad (2)$$

в котором

$$H(\theta) = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} \int_{\theta-2\pi}^{\theta} \cos\rho(\theta - \psi - \pi)\, d\Delta(\psi).$$

При этом функция

$$h_{f,r}(\theta) = r^{-\rho(r)} \ln|f(re^{i\theta})|$$

стремится к пределу $H(\theta)$ равномерно относительно θ при $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

В этой теореме C°-множество не указывается эффективно, вернее не указывается способ, с помощью которого можно было бы выделить это исключительное C°-множество. В настоящей заметке мы указываем такой способ. При этом основываемся на некотором уточнении леммы 7 из главы II в [I].

Лемма 7[1]. *Пусть $\{a_n\}$ — бесконечное множество точек, имеющее предельную точку на бесконечности и*

$$F_\delta(z) = \prod\left(1 - \frac{z}{a_n}\right),$$

где в произведение входят только те множители, в которых числа a_n удовлетворяют неравенству

$$a_n - z| \leqslant \delta r,\ |z| = r \text{ и } 0 < \delta < \frac{1}{2}.$$

Тогда при $z \neq a_n$ имеет место неравенство

$$|\,|\ln|F_\delta(z)|| - \int_0^{\delta r} \frac{n_z(t)}{t} dt\,| < \ln\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) n(r\delta) \qquad (3)$$

Доказательство. Из определения функции $F_\delta(z)$ следует

$$|\ln|F_\delta(z)|| = -\ln|F_\delta(z)| = -\sum_{|a_n - z| \leqslant \delta r} \ln\left|1 - \frac{z}{a_n}\right|. \qquad (4)$$

---

[1] Мы пользуемся понятиями и обозначениями, введенными в [1].

Интегрирование по частям дает

$$\sum_{|a_n-z|<\delta r} \ln|a_n - z| = n_z(\delta r)\ln \delta r - \int_0^{\delta r} \frac{n_z(t)}{t}\,dt.$$

Кроме того, при $r > r_\delta$ имеем

$$n_z(\delta r)\ln(r-\delta r) < \sum_{|a_n-z|<\delta r} \ln|a_n| < n_z(\delta r)\ln(r + r\delta),$$

и потому из равенства (4) получаем

$$|\ln|F_\delta(z)|| > -n_z(\delta r)\ln\delta r + \int_0^{\delta r}\frac{n_z(t)}{t}dt + n_z(\delta r)\ln(1-\delta)r,$$

$$|\ln|F_\delta(z)|| < -n_z(\delta r)\ln\delta r + \int_0^{\delta r}\frac{n_z(t)}{t}dt + n_z(\delta r)\ln(1+\delta)r.$$

Отсюда следует неравенство (3).

Обозначим через Ω множество точек, для которого любому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$ и $r_{\varepsilon,\delta}$, что неравенство

$$\int_0^{\delta r}\frac{n_z(t)}{t}\,dt < \varepsilon r^{\rho(r)} \tag{5}$$

выполняется при $z \in \Omega$ и $|z| > r_{\varepsilon\delta}$.

Теорема 2. *Если $\{a_n\}$ — множество, удовлетворяющее условиям теоремы 1 и целая функция $f(z)$ дается равенством (1), то для того, чтобы асимптотическое равенство (2) было справедливо вне некоторого множества E, необходимо и достаточно, чтобы дополнение к E было Ω-множеством*[1].

Доказательство. Докажем теорему для случая нецелого порядка $\rho = \lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)$. Теорема распространяется и на случай целого порядка, при этом доказательство ее от случая нецелого порядка отличается лишь некоторыми несущественными деталями.

При нецелом порядке экспоненциальный множитель перед каноническим произведением не влияет на индикатор функции и величина $H(\theta)$ вполне определяется каноническим произведением $\prod\limits_1^\infty G\left(\frac{z}{a_n}; p\right)$, или, что то же, множеством $\{a_n\}$ корней этой

[1] Результаты, близкие к теореме 2, могут быть получены из работы А. Ф. Гришина [7].

функции. В связи с этим ограничимся рассмотрением канонического произведения

$$f(z)=\prod_{1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n};\, p\right). \tag{6}$$

Согласно лемме (7*), при $z \notin E$ для любого $\varepsilon > 0$ можно так выбрать $0<\delta<\frac{1}{2}$ и $r_\delta > 0$, что при $|z| > r_\delta > 0$ будем иметь

$$|\ln|F_\delta(z)|| < \frac{\varepsilon}{2} r^{\rho(r)}. \tag{7}$$

Представим функцию $f(z)$ в виде произведения

$$f(z)=f^\delta(z) f_\delta(z), \tag{8}$$

где

$$f^\delta(z)=\prod_{|a_n-z|>\delta r} G\left(\frac{z}{a_n};\, p\right), \quad f_\delta(z)=\prod_{|a_n-z|\leqslant\delta r} G\left(\frac{z}{a_n};\, p\right), \tag{9}$$

и покажем, что для $\varepsilon > 0$ и достаточно малого $0<\delta<\frac{1}{2}$

$$|\ln|f_\delta(z)|| < \varepsilon r^{\rho(r)} \tag{10}$$

при $z \notin E$ и $|z| > r_\delta$.

Функция $f_\delta(z)$ допускает представление

$$\ln|f_\delta(z)| = \ln|F_\delta(z)| + \operatorname{Re}\left\{\sum_{|a_n-z|\leqslant\delta r}\left(\frac{z}{a_n}+\frac{z^2}{2a_n^2}+\ldots+\frac{z^p}{pa_n^p}\right)\right\},$$

из которого получаем

$$|\ln|f_\delta(z)|| < |\ln|F_\delta(z)|| + \sum_{|a_n-z|\leqslant\delta r}\left(\left|\frac{z}{a_n}\right|+\frac{1}{2}\left|\frac{z}{a_n}\right|^2+\ldots+\frac{1}{p}\left|\frac{z}{a_n}\right|^p\right). \tag{11}$$

Так как $|a_n| > (1-\delta) r$, где $r=|z|$, то

$$\sum_{|a_n-z|\leqslant\delta r}\left(\left|\frac{z}{a_n}\right|+\frac{1}{2}\left|\frac{z}{a_n}\right|^2+\ldots+\frac{1}{p}\left|\frac{z}{a_n}\right|^p\right) < \sum_{|a_n-z|\leqslant\delta r}\left[\frac{1}{1-\delta}+\frac{1}{(1-\delta)^2}+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{1}{(1-\delta)^p}\right] < 2^p p n_z(\delta r), \tag{12}$$

а для $n_z(\delta r)$, в силу существования угловой плотности у множества $\{a_n\}$, имеет место оценка

$$n_z(\delta r) < \frac{\varepsilon}{2^{p+1}p} r^{\rho(r)} \tag{13}$$

при соответствующем подборе $0 < \delta < \frac{1}{2}$ и $r > r_\delta$. Следовательно, для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\sum_{|a_n - z| \leqslant \delta r} \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} \left| \frac{z}{a_k} \right|^k \right) < \frac{\varepsilon}{2} r^{\rho(r)}$$

при сделанных предположениях относительно δ и r.

Для доказательства достаточности заметим, что по теореме 1 [1, гл. II] имеет место асимптотическое равенство

$$\ln |f(re^{i\theta})| \approx H(\theta) r^{\rho(r)}. \qquad (14)$$

При этом неравенство

$$\ln |f(re^{i\theta})| < [H(\theta) + \varepsilon] r^{\rho(r)} \ (0 \leqslant \theta < 2\pi) \qquad (15)$$

выполняется всюду при r, превосходящем некоторое число r'_ε, и неравенство

$$\ln |f(re^{i\theta})| > [H(\theta) - \varepsilon] r^{\rho(r)} \qquad (16)$$

вне некоторого C°-множества.

Нужно показать, что неравенство (16) выполняется всюду в области Ω вне круга некоторого радиуса $r'_\varepsilon > 0$. Зафиксируем $z \in \Omega$ так, что $|z| > 2r'_\varepsilon$, и определим функцию от u

$$F_\delta(z, u) = \prod_{|a_n - z| \leqslant \delta r} \left(1 - \frac{z+u}{a_n}\right).$$

Очевидно, что $F_\delta(z, 0) = F_\delta(z)$, и при $\delta < \frac{1}{3}$ и $|u| < \delta r$ будет верно неравенство $\ln |F_\delta(z, u)| < 0$. Отсюда получается, что во всем этом круге, но вне исключительного C°-множества функция

$$\varphi_\delta(z, u) = \frac{f(z+u)}{F_\delta(z, u)}$$

удовлетворяет неравенству

$$\ln |\varphi_\delta(z, u)| > [H(\psi) - \varepsilon] |z + u|^{\rho(|z+u|)} \ (z + u \notin C^\circ),$$

в котором $\psi = \arg(z + u)$ и $f(z)$, по предположению,— каноническая функция. Из непрерывности $H(\psi)$ следует, что при достаточно малом $\delta > 0$ в той же области

$$\ln |\varphi_\delta(z, u)| > [H(\theta) - 2\varepsilon] r^{\rho(r)} \quad (z = re^{i\theta}). \qquad (17)$$

Покажем, что при достаточно больших значениях r это неравенство выполняется при $u = 0$ и $z \in \Omega$. В самом деле, при фиксированном $\delta > 0$ и r достаточно большом сумма диаметров кружков C°-множества, попавших в круг $|u| < \delta r$, меньше, чем δr, и поэтому существует окружность $|u| = \tau$ $(0 < \tau < \delta r)$, не пересекающая C°-множества.

Неравенство (17) выполняется на всей окружности $|u|=\tau$, а так как функция $\varphi_\delta(z, u)$ не имеет корней в круге $|u|\leqslant\tau$, то оно должно выполняться в центре.

Итак,

$$\ln\frac{|f(z)|}{|F_\delta(z)|}>[H(\theta)-2\varepsilon]\,r^{\rho(r)}$$

и в силу неравенства (3), имеющего место при всех $z\notin E$ и $|z|>r'_\varepsilon$,

$$\ln|f(z)|>[H(\theta)-3\varepsilon]\,r^{\rho(r)}. \tag{18}$$

Соединяя неравенство (18) с асимптотическим неравенством (15), убеждаемся в справедливости асимптотического равенства (2) вне множества E.

Перейдем к доказательству необходимости условия $CE=\Omega$. Пусть асимптотическое равенство

$$\ln|f(re^{i\theta})|\approx H(\theta)\,r^{\rho(r)} \tag{19}$$

выполняется при $z\notin E$. Представим снова функцию $f(z)$ в виде (8).

Тогда из (11), (12) и асимптотического равенства (19) получаем

$$\ln|f^\delta(z)|+\ln|F_\delta(z)|<[H(\theta)+2\varepsilon]\,r^{\rho(r)} \tag{20}$$

при $z\notin E$.

Для получения оценки функции $\ln|f^\delta(z)|$ сверху вне множества E воспользуемся леммой 3 [1, гл. II], согласно которой, если последовательность $\{a_n\}$ точек комплексной плоскости имеет плотность Δ с показателем $\rho(r)$, каковы бы ни были два положительных числа ξ и ζ, можно так выбрать множество C кружков с верхней плотностью, меньшей ξ, и число β, что при $R\to\infty$, $||z|-R|<\beta R$ и $z\notin C$ функция $\Phi_{R,\beta}(z)$, определяемая равенством

$$\Phi_{R,\beta}(z)=\prod_{(1-\beta)R<|a_n|<(1+\beta)R}G\left(\frac{z}{a_n};\ p\right),$$

где p — натуральное число, $0<\beta<\frac{1}{2}$ и $R>1-\beta$, удовлетворяет асимптотическому неравенству

$$|\ln|\Phi_{R,\beta}(z)||<\zeta r^{\rho(r)}\quad(|z|=r). \tag{21}$$

В нашем случае введем функцию

$$\Phi_{r,\delta}(w)=\psi_{r,\delta}(w)\ f_\delta(w)^{(*)},$$

где

$$\psi_{r,\delta}(w)=\prod_{\substack{||r_n|-|z||<\delta r\\ |a_n-z|>\delta r}}G\left(\frac{w}{a_n};\ p\right).$$

Каждый множитель функции

$$F^{\delta}(w) = \prod_{\substack{||a_n|-|z||<\delta r \\ |a_n - z|>\delta r}} \left(1 - \frac{w}{a_n}\right)$$

при $|w - z| < \delta_1 r = \frac{\delta}{2} r$ допускает очевидную оценку

$$\frac{\delta}{2(1+\delta)} < \left|1 - \frac{w}{a_n}\right| < \frac{2}{1-\delta},$$

из которой для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно малого δ $\left(0 < \delta < \frac{1}{2}\right)$ следует справедливость неравенств

$$-\frac{\varepsilon}{2} r^{\rho(r)} < \ln |F^{\delta}(w)| < \frac{\varepsilon}{2} r^{\rho(r)}. \tag{22}$$

Функция $\psi_{r,\delta}(w)$ может быть представлена в виде

$$\ln |\psi_{r,\delta}(w)| = \ln |F^{\delta}(w)| + \operatorname{Re}\left\{\sum_{\substack{||a_n|-|z||<\delta r \\ |a_n - z|>\delta r}} \left(\frac{w}{a_n} + \ldots + \frac{w^p}{p a_n^p}\right)\right\}.$$

Аналогично тому, как была получена оценка (12), имеем

$$\sum \left(\sum_{1}^{p} \frac{1}{k} \left|\frac{w}{a_n}\right|^k\right) < \frac{\varepsilon}{2} r^{\rho(r)} \tag{23}$$

при $\varepsilon > 0$ и достаточно малом $\delta\left(0 < \delta < \frac{1}{2}\right)$.

Соединяя оценки (22) и (23), получаем

$$|\ln |\psi_{r,\delta}(w)|| < \varepsilon r^{\rho(r)}. \tag{24}$$

Согласно упомянутой ранее лемме 3 [1, гл. II], для функции

$$\Phi_{r,\delta}(w) = \prod_{(1-\delta)r < |a_n| < (1+\delta)r} G\left(\frac{w}{a_n}; p\right),$$

которая выше представлена в виде (*), имеет место асимптотическое неравенство

$$|\ln |\Phi_{r,\delta}(w_1)|| < \varepsilon r_1^{\rho(r_1)} \tag{25}$$

для $||w_1| - r| < \delta r$ и $w_1 \notin C$, где $|w_1| = r_1$ и C — множество кружков с верхней плотностью $\rho(C) < \xi$, причем ξ может быть выбрано как угодно малой положительной величиной при соответствующем подборе $\varepsilon > 0$ и $0 < \delta < \frac{1}{2}$.

Исходя из оценок (24) и (25) легко показать, что

$$|\ln |F_{\delta}(w)|| < 8\varepsilon r^{\rho(r)}$$

при $|w - z| < \delta r$, где $|z| = r$ и $w \notin C$.

Рассмотрим функцию

$$F_\delta(z, u) = \prod_{|a_n - z| < \delta r} \left(1 - \frac{z+u}{a_n}\right).$$

Зафиксируем точку z вне множества E. Тогда будет выполняться неравенство

$$|\ln|F_\delta(z, u)|| < 3\varepsilon |z+u|^{\rho(|z+u|)}, \tag{26}$$

если $z + u \notin c$, где $0 < u < \delta r$. Из неравенства (26) следует неравенство

$$|\ln|f_\delta(z+u)|| < 4\varepsilon |z+u|^{\rho(|z+u|)} \tag{27}$$

при $z \notin E$ и $z + u \in C$. Функцию $f^\delta(z+u)$ представим в виде

$$f^\delta(z+u) = \frac{f(z+u)}{f_\delta(z+u)},$$

тогда

$$\ln|f^\delta(z+u)| = \ln|f(z+u)| - \ln|f_\delta(z+u)|.$$

Используя оценку (27), получаем

$$\ln|f^\delta(z+u)| < \ln|f(z+u)| + 4\varepsilon |z+u|^{\rho(|z+u|)} \tag{28}$$

при $z \in \Omega$ и $(z+u) \notin c$, $0 < u < \delta r$.

Так как, согласно лемме 3 [1, гл. II], плотность $\rho(C) < \xi$ множества C может быть сделана как угодно малой, то при достаточно большом r в круге $|u| < \delta r$ можно выбрать окружность $|u| = \tau$ $(0 < \tau < \delta r)$, не пересекающую C-множества. На этой окружности

$$\ln|f^\delta(z)| < \ln|f(z)| + 5\varepsilon r^{\rho(r)}.$$

По известной теореме об индикаторе роста (см. [1, гл. 1, теорема 28]) справедливо асимптотическое неравенство

$$|\ln|f(\mathrm{Re}^{i\varphi})| < [H(\varphi) + \varepsilon] R^{\rho(R)}.$$

Отсюда легко получить, используя непрерывность $H(\theta)$, что на всей окружности $C_{z\tau}$ выполнено неравенство

$$\ln|f^\delta(z+u)| < [H(\theta) + 7\varepsilon] r^{\rho(r)} \quad (u \in C_\tau).$$

Так как функция $f^\delta(z+u)$ не имеет корней внутри (и на границе) окружности $C_{z\tau}$, то по принципу минимума гармонической функции получается, что это неравенство выполнено всюду внутри круга C_τ, в частности при $u = 0$, и потому

$$\ln|f^\delta(z)| < [H(\theta) + 7\varepsilon] r^{\rho(r)}. \tag{29}$$

Если в точке z выполняется, кроме того, неравенство

$$\ln|f(re^{i\theta})| > [H(\theta) - \varepsilon] r^{\rho(r)},$$

то из сопоставления с (29), (11) и (12) получаем

$$\ln\left|\frac{1}{F_\delta(z)}\right| < 8\varepsilon r^{\rho(r)}. \tag{30}$$

Подставляя оценку (30) в (3), находим, что

$$\int_0^{\delta r} \frac{n_z(t)}{t}\, dt < 9\varepsilon r^{\rho(r)}.$$

Итак, если $z \notin E$, асимптотически выполняется неравенство (5′), т. е. $CE = \Omega$. Теорема доказана.

В заключение выражаю глубокую благодарность профессору Б. Я. Левину за научное руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Физматгиз, 1960.
2. Б. Я. Левин. О росте целой функции по лучу и о распределении ее нулей по аргументам. «Матем. сб.», 2 (44); 6, 1937, 1097—1142.
3. Б. Я. Левин. О приложениях интерполяционного ряда Лагранжа в теории целых функций. «Матем. сб.», 8 (50), 1, 1940, 437—454.
4. A. Pfluger. Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speriellen klasse analytischer Funktionen J, II Comm. Math. Helv. 11, 1938, 180—213, 12, 1939, 25—69.
5. A. Pfluger. Ueber Interpolation ganzer Funktionen. Comm. Math. Helv. 16, 1942, 314—349.
6. A. Pfluger. Ueber ganze Funktionen ganzer Ordnung. Comm. Math. Helv. 18, 1946, 177—203.
7. А. Ф. Гришин. О регулярности роста субгармонических функций. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6, вып. 7, вып. 8. Изд-во Харьковск. ун-та, 1968.

Поступила 27 июля 1970 г.