$A=U\Lambda U^*$

С.Н. Зиненко

Линейная алгебра

Линейные операторы

(сборник задач)

2016

6. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ МАТРИЦЫ В ДАННОМ БАЗИСЕ

№ 6.1. Умножить матрицу $\boldsymbol{A}$ на вектор $\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$

a. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$; ***b.*** $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

---

a. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$; ***b.*** $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

№ 6.2. Проверить линейность оператора $\mathbf{A}$. Найти его матрицу $\boldsymbol{A}$ в данных базисах $\{\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{f}\}$ Установить, что действие оператора $\boldsymbol{b}=\mathbf{A}\,\boldsymbol{a}$ сводится к умножению его матрицы $\boldsymbol{A}$ на столбец координат $\boldsymbol{x}$ вектора $\boldsymbol{a}$, получая столбец координат $\boldsymbol{y}$ вектора $\boldsymbol{b}$: $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$

a. $\mathbf{A}: \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m \ \Rightarrow\ \mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{A}$ матрица $m\times n$, канонические базисы $\{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}\}$

b. $\Omega: \mathbb{V} \to \mathbb{V} \ \Rightarrow\ \Omega\vec{r}=[\vec{\omega},\vec{r}\,]$, $\{\boldsymbol{e}\}=\{\boldsymbol{f}\}=\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\}$

c. $\mathbf{D}: \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_{n-1} \ \Rightarrow\ \mathbf{D}\boldsymbol{p}=\frac{d}{dx}p(x)$, $\{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}\}=\left\{\left\{\frac{x^0}{0!},\frac{x^1}{1!},\dots,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right\},\left\{\frac{x^0}{0!},\frac{x^1}{1!},\dots,\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\right\}\right\}$

d. $\mathbf{J}: \mathbb{P}_n^\lambda \to \mathbb{P}_n^\lambda \ \Rightarrow\ \mathbf{J}\boldsymbol{p}^\lambda=\int\limits_{-\infty}^{x} p^\lambda(t)\,dt\ (\lambda>0)$, $\{\boldsymbol{e}\}=\{\boldsymbol{f}\}=\left\{e^{\lambda x}\frac{x^0}{0!},\ e^{\lambda x}\frac{x^1}{1!},\dots,e^{\lambda x}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right\}$

---

a. $\boldsymbol{U}_\varphi: \mathbb{S} \to \mathbb{S} \ \Rightarrow$ оператор поворота плоскости на угол φ, $\{\boldsymbol{e}\}=\{\boldsymbol{f}\}=\{\vec{i},\ \vec{j}\}$

b. $\Omega: \mathbb{V} \to \mathbb{V} \ \Rightarrow\ \Omega\vec{r}=[\vec{\omega}_2,\ [\vec{\omega}_1,\ \vec{r}\,]]$, $\{\boldsymbol{e}\}=\{\boldsymbol{f}\}=\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\}$

c. $\mathbf{J}: \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_{n+1} \ \Rightarrow\ \mathbf{J}\boldsymbol{p}=\int\limits_{0}^{x} p(t)\,dt$, $\{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}\}=\left\{\left\{\frac{x^0}{0!},\frac{x^1}{1!},\dots,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right\},\left\{\frac{x^0}{0!},\frac{x^1}{1!},\dots,\frac{x^{n}}{n!}\right\}\right\}$

d. $\mathbf{D}: \mathbb{P}_n^\lambda \to \mathbb{P}_n^\lambda \ \Rightarrow\ \mathbf{D}\boldsymbol{p}^\lambda=\frac{d}{dx}p^\lambda(x)$, $\{\boldsymbol{e}\}=\{\boldsymbol{f}\}=\left\{e^{\lambda x}\frac{x^0}{0!},\ e^{\lambda x}\frac{x^1}{1!},\dots,e^{\lambda x}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right\}$

№ 6.3. Выполнить действия над матрицами $\alpha\,\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

№ 6.4. Найти непосредственно явное выражение переменных $z_1, z_2, \dots$ через переменные $x_1, x_2, \dots$. Проверить, что матрица $\boldsymbol{C}$ результирующего отображения $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}$ равна $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$, если $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{z}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{x}$

$\begin{cases} z_1=-y_1+2y_2-y_3 \\ z_2=y_1-y_2+2y_3 \\ z_3=2y_2-y_3 \\ z_4=y_1-3y_2 \end{cases}$, $\begin{cases} y_1=-x_1+2x_2 \\ y_2=x_1-x_2 \\ y_3=2x_1+x_2 \end{cases}$

$\begin{cases} z_1=y_1-3y_2 \\ z_2=-2y_1+y_2 \\ z_3=y_1+2y_2 \end{cases}$, $\begin{cases} y_1=-x_1+2x_2-x_3+x_4 \\ y_2=4x_1+x_3-3x_4 \end{cases}$

7. ЯДРО И ОБРАЗ ОПЕРАТОРА. ОБРАТНЫЙ ОПЕРАТОР

№ 7.1. Найти базис и размерность ядра $\operatorname{Ker}\mathbf{A}$ и образа $\operatorname{Ran}\mathbf{A}$ оператора $\mathbf{A}$, задаваемого в $\mathbb{R}_n$ матрицей $\boldsymbol{A}$. Проверить справедливость формулы

$$\dim\ \operatorname{Ker}\boldsymbol{A} + \dim \operatorname{Ran}\boldsymbol{A} = \dim\mathbb{R}_n = n$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -18 & 1 & -6 & -2 \\ -3 & -1 & -3 & 11 & 9 & 8 \\ -2 & -1 & -1 & 8 & 7 & 6 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 6 & 4 & 10 & 1 \\ -3 & -3 & -9 & -6 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

№ 7.2. Найти оператор, обратный к дифференциальному оператору $\mathbf{D} = \frac{d}{dx} : \mathbb{P}_n^\lambda \to \mathbb{P}_n^\lambda$

$$\mathbf{D}\boldsymbol{p}^\lambda = \frac{d}{dx}p^\lambda(x) \quad (\lambda > 0) \qquad \mathbf{D}\boldsymbol{p}^\lambda = \frac{d}{dx}p^\lambda(x) \quad (\lambda < 0)$$

№ 7.3. Проверить, что матрицы $\boldsymbol{D}_\lambda$, $\boldsymbol{J}_\lambda$ дифференциального оператора $\mathbf{D}$: $\mathbb{P}_n^\lambda \to \mathbb{P}_n^\lambda$ и интегрального оператора $\mathbf{J}$: $\mathbb{P}_n^\lambda \to \mathbb{P}_n^\lambda$ взаимно обратны

$$\mathbf{D}\boldsymbol{p}^\lambda = \frac{d}{dx}p^\lambda(x),\ \ \mathbf{J}\boldsymbol{p}^\lambda = \int\limits_{-\infty}^{x} p^\lambda(t)\,dt,\ (\lambda > 0) \qquad \mathbf{D}\boldsymbol{p}^\lambda = \frac{d}{dx}p^\lambda(x),\ \ \mathbf{J}\boldsymbol{p}^\lambda = -\int\limits_{x}^{+\infty} p^\lambda(t)\,dt,\ (\lambda < 0)$$

№ 7.4. Построить обратную матрицу $\boldsymbol{A}^{-1}$, найдя алгебраические дополнения

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

№ 7.5. Найти обратную матрицу $\boldsymbol{A}^{-1}$ методом Гаусса

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 1 & -5 \\ 2 & -5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

№ 7.6. Выразить явно переменные $x_1,\ x_2, \ldots$ через переменные $y_1,\ y_2, \ldots$ и выяснить связь между матрицами линейных преобразований $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$

$$\left[\begin{aligned} y_1 &= x_1 - 2x_2 + x_4 \\ y_2 &= x_1 - x_2 + x_4 \\ y_3 &= -2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \\ y_4 &= -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \\ y_2 &= 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 \\ y_3 &= x_1 - x_2 + 3x_3 \\ y_4 &= -x_1 + x_2 - 2x_4 \end{aligned}\right.$$

№ 7.7. Решить матричные уравнения $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{Y}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{Y}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{Z}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{Y}\cdot\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{Z}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

8. МАТРИЦА ПЕРЕХОДА К НОВОМУ БАЗИСУ

№ 8.1. Построить матрицу перехода $\boldsymbol{T}$ от старого базиса $\{\boldsymbol{e}\}$ к новому $\{\tilde{\boldsymbol{e}}\}$ в пространстве $\mathbb{P}_n$ и матрицу перехода $\tilde{\boldsymbol{T}}$ от нового базиса $\{\tilde{\boldsymbol{e}}\}$ к старому $\{\boldsymbol{e}\}$ Проверить, что

$$\tilde{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{T}^{-1}$$

$\{\boldsymbol{e}\} = \{x^0, \dots, x^{i-1}, \dots, x^{n-1}\}$, $\qquad \{\tilde{\boldsymbol{e}}\} = \{(x-x_0)^0, \dots, (x-x_0)^{j-1}, \dots, (x-x_0)^{n-1}\}$

$\{\boldsymbol{e}\} = \{x^0, \dots, x^{i-1}, \dots, x^{n-1}\}$, $\qquad \{\tilde{\boldsymbol{e}}\} = \left\{ \dfrac{x^0}{0!}, \dots, \dfrac{x^{j-1}}{(j-1)!}, \dots, \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right\}$

№ 8.2. Найти непосредственно координаты $\boldsymbol{x}$, $\tilde{\boldsymbol{x}}$ вектора $\boldsymbol{p} \in \mathbb{P}_n$ в старом и новом базисах (**№ 8.1.**). Проверить справедливость формул

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\tilde{\boldsymbol{x}}, \quad \tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}$$

№ 8.3. Найти непосредственно матрицы $\boldsymbol{D}$, $\tilde{\boldsymbol{D}}$ дифференциального оператора $\mathbf{D} = \frac{d}{dx}$ в старом и новом базисах (**№ 8.1.**). Проверить справедливость формул

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{T}\cdot\tilde{\boldsymbol{D}}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}, \qquad \tilde{\boldsymbol{D}} = \tilde{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{D}\cdot\tilde{\boldsymbol{T}}^{-1} = \boldsymbol{T}^{-1}\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{T}$$

№ 8.4. Показать, что система векторов $\{\boldsymbol{f}\} = \{\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_j, \dots, \boldsymbol{f}_n\} \in \mathbb{R}_n$ образует базис. Найти матрицу перехода $\boldsymbol{T}$ от старого (канонического) базиса $\{\boldsymbol{e}\}$ к новому $\{\boldsymbol{f}\}$ Показать, что матрица перехода $\tilde{\boldsymbol{T}}$ от нового базиса $\{\boldsymbol{f}\}$ к старому $\{\boldsymbol{e}\}$ равна $\tilde{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{T}^{-1}$

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_4$$

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_4$$

9. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОПЕРАТОРА

№ 9.1. Найти собственные векторы и соответствующие собственные значения операторов

a. $\mathbf{D} = \frac{d}{dx} : \mathbb{P}_n^{\lambda} \to \mathbb{P}_n^{\lambda}$

b. $\mathbf{J} = \int\limits_{-\infty}^{x} : \mathbb{P}_n^{\lambda} \to \mathbb{P}_n^{\lambda} \quad (\lambda > 0)$

a. $\Omega = \left[\, \vec{\boldsymbol{\omega}}, \bullet \,\right] : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$

b. $\mathbf{J} = -\int\limits_{x}^{+\infty} : \mathbb{P}_n^{\lambda} \to \mathbb{P}_n^{\lambda} \quad (\lambda < 0)$

№ 9.2. Найти собственные векторы $\{\, \boldsymbol{t}_k \,\}$ и соответствующие собственные значения $\{\, \lambda_k \,\}$ оператора $\mathbf{A}$, задаваемого в $\mathbb{R}_n$ матрицей $\boldsymbol{A}$.

Проверить непосредственно справедливость равенства $\boldsymbol{A}\boldsymbol{t}_k = \lambda_k \boldsymbol{t}_k$.

Проверить, что собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

a. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

b. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -6 & -3 \end{bmatrix}$

c. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

d. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

a. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

c. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

d. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -3 \\ -3 & -6 & 3 \\ -3 & -7 & 4 \end{bmatrix}$

10. ПРОЕКТОРЫ. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ДИАГОНАЛИЗИРУЕМОГО ОПЕРАТОРА

№ 10.1. Проверить, что оператор $\mathbf{P}$, задаваемый в $\mathbb{R}_n$ матрицей $\boldsymbol{P}$, является оператором проектирования на некоторое подпространство $\mathbb{F}$ параллельно некоторому подпространству $\mathbb{G}$ и построить проектор $\mathbf{Q}$ на подпространство $\mathbb{G}$ параллельно подпространству $\mathbb{F}$

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}\equiv\mathbf{P}^2=\mathbf{P} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{Q}=\mathbf{I}-\mathbf{P} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}\equiv\mathbf{Q}^2=\mathbf{Q} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{P}=\mathbf{0}$$

Найти

- подпространства $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ проверив, что $\mathbb{F}=\operatorname{Ran}\mathbf{P}$, $\mathbb{G}=\operatorname{Ker}\mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbb{G}=\operatorname{Ran}\mathbf{Q}$, $\mathbb{F}=\operatorname{Ker}\mathbf{Q}$
- проверить справедливость разложение пространства в прямую сумму $\mathbb{R}_n=\mathbb{F}\dot{+}\mathbb{G}$
- выяснить, что $\forall \boldsymbol{h}\in\mathbb{R}_n \;\Rightarrow\; \boldsymbol{h}=\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g},\quad \boldsymbol{f}\in\mathbb{F},\quad \boldsymbol{g}\in\mathbb{G} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{P}\boldsymbol{h}=\boldsymbol{f},\quad \boldsymbol{Q}\boldsymbol{h}=\boldsymbol{g}$

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}4 & 1 & -1\\ -6 & -1 & 2\\ 6 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}4 & 7 & -3\\ -3 & -6 & 3\\ -3 & -7 & 4\end{bmatrix}$$

№ 10.2.

Найти собственные векторы $\{\boldsymbol{t}_k\}$ и соответствующие собственные значения $\{\lambda_k\}$ оператора $\mathbf{A}$, задаваемого в $\mathbb{R}_n$ матрицей $\boldsymbol{A}$. Проверить непосредственно справедливость равенств $\boldsymbol{A}\boldsymbol{t}_k=\lambda_k\boldsymbol{t}_k$. Установить существование базиса из собственных векторов, т.е. диагонализируемость оператора (матрицы).

Найти

- матрицу $\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\ldots & \boldsymbol{t}_k & \ldots\end{bmatrix}$ перехода к базису из собственных векторов
- матрицу $\boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{diag}\begin{bmatrix}\ldots & \lambda_k & \ldots\end{bmatrix}$ оператора в этом базисе
- проверить разложение
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\Lambda}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}$$
- построить “косые” проекторы $\boldsymbol{P}_k$ на собственные подпространства параллельно сумме других; проверить, что
$$\boldsymbol{P}_j\cdot\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{P}_i\cdot\boldsymbol{P}_j=\delta_{ij}\boldsymbol{P}_j$$
- проверить справедливость “косого” разложения единицы
$$\boldsymbol{I}=\sum_k\boldsymbol{P}_k$$
- и спектрального разложения диагонализируемого оператора
$$\boldsymbol{A}=\sum_k\lambda_k\boldsymbol{P}_k$$
- вычислить значение характеристического полинома $p_A(\boldsymbol{A})$ непосредственно и используя спектральное разложение

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 6 & 4 & -2\\ -6 & -2 & 4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & -7 & 3\\ 3 & 9 & -3\\ 3 & 7 & -1\end{bmatrix}$$