УДК 517.97

И. Е. Луценко

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ J-САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

1. Антиунитарным оператором называется отображение K комплексного гильбертова пространства H на себя, удовлетворяющее условию $(Kf, Kg) = \overline{(f, g)}$ $(\forall f, g \in H)$ [1]. Если при этом $K^2 = I$ (I — единичный оператор), то K — называется инволюцией или оператором комплексного сопряжения [2] и обозначается обычно символом J.

Линейный оператор T (не обязательно ограниченный) называется K-вещественным (K-симметрическим, K-самосопряженным), если существует такой антиунитарный оператор K, что

$$KTK^{-1} = T$$

$$(KTK^{-1} \subset T^*, \ KTK^{-1} = T^*)$$

(см. [9, 10]). Если оператор T ограничен и всюду определен, то второе и третье условия эквивалентны, а удовлетворяющий этим условиям оператор T называется K-симметрическим [9]. Если, кроме того, K является инволюцией, то эти определения совпадают с обычными [2, 3, 4]. Легко проверяются утверждения:

Теорема 1. *Если T является K-вещественным оператором, то:*

1) *$KD_T = D_T$ (D_T — область определения оператора T);*

2) *T является и K^{-1}-вещественным оператором;*

3) T^* *и* T^{-1} *также являются* K*-вещественными операторами* (если они существуют).

Теорема 2. *Если* T *является* K*-самосопряженным оператором, то:*

1) T *— замкнутый оператор;*
2) T *является и* K^{-1}*-самосопряженным оператором;*
3) $KD_T = D_{T^*}$, $KD_{T^*} = D_T$;
4) T^* *также* K*-самосопряженный оператор;*
5) *если существует* T^{-1}, *то он также* K*-самосопряжен.*

2. Рассмотрим в пространстве $L^2[-a, a]$ $(0 < a < \infty)$ вещественное линейное дифференциальное выражение второго порядка

$$ly = y'' + q(x)\,y, \quad \overline{q(x)} = q(x)$$

и порождаемые им линейные дифференциальные операторы: оператор L с максимальной областью определения (т. е. без граничных условий) и операторы L_0, L_-, L_+, определенные на многообразиях

$$D_0 = \{y(-a) = y'(-a) = y(a) = y'(a) = 0\},$$
$$D_- = \{y(-a) = y'(-a) = 0\},$$
$$D_+ = \{y(a) = y'(a) = 0\}.$$

Как известно,

$$L_0^* = L, \quad L^* = L_0, \quad L_-^* = L_+, \quad L_+^* = L_-.$$

Зададим еще в $L^2[-a, a]$ две иволюции

$$J_1 f(x) = \overline{f(x)}, \quad J_2 f(x) = \overline{f(-x)}.$$

Легко проверить утверждение:

Теорема 3. *Операторы* L_0, L, L_-, L_+ *являются* J_1*-вещественными. Если функция* $q(x)$ *четная, то* L_0 *и* L *—* J_2*-вещественные, а операторы* L_-, L_+ *—* J_2*-самосопряженные.*

Целью настоящей работы является доказательство утверждения:

Теорема 5. *Для того чтобы оператор* L_- (L_+) *был* K*-самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы функция* $q(x)$ *была четной. При этом обязательно* $K = e^{i\alpha}J_2$ $(\overline{\alpha} = \alpha)$.

Эту теорему легко получить из теоремы 3 и следующих утверждений.

Лемма. *Если оператор* L_- (L_+) *с четной функцией* $q(x)$ *является* K_1*-вещественным и* K_2*-самосопряженным, то* $K_1 = e^{i\alpha}J_1$, $K_2 = e^{i\alpha}J_2$.

Теорема 4. *Если оператор* $L_-(L_+)$ *является* K*-самосопряженным, то* $q(x)$ *— четная функция.*

3. Доказательство леммы. Докажем сперва, что если L_- (L_+) является K-вещественным оператором, то и остальные три оператора $L_+(L_-)$, L_0, L также K-вещественные. Так как

$L_+ = L_-^*$, то по теореме 1 L_+ — K-вещественный оператор, причем $KD_\pm = D_\pm$. Но тогда

$$KD_0 = K[D_- \cap D_+] = D_0,$$

так что L_0, а вместе с ним и $L = L_0^*$ оказывается K-вещественным.

Таким образом, оператор L коммутирует как с K, так и с J_1 (теорема 3), а значит, и с унитарным оператором $U = KJ_1$. Но если унитарный оператор коммутирует с оператором L, у которого $q(x)$ — четная функция, то он задается выражением

$$Uf(x) = bf(x) + cf(-x),$$

где b и c — постоянные числа [8]. Кроме того, $UD_+ = D_+$, и, взяв такую функцию $f(x)$, что $f(-a) = 0$, $f(a) \neq 0$, получим $c = 0$, т. е.

$$Kf(x) = UJ_1 f(x) = bf(x) = e^{i\alpha} J_1 f(x).$$

Пусть теперь L_- является K-самосопряженным. Тогда $L_+ = L_-^*$ и в силу теоремы 2 $KD_- = D_+$, $KD_+ = D_-$, так что $KD_0 = D_0$, откуда L_0 вместе с L оказывается K-вещественным и снова унитарный оператор $U = KJ_1$ коммутирует с L, т. е. имеет вид $Uf(x) = bf(x) + cf(-x)$. Но теперь $UD_- = D_+$, так что $b = 0$, откуда

$$K_2 f(x) = c\overline{f(-x)} = e^{i\beta} J_2 f(x),$$

что полностью доказывает лемму.

4. Доказательство теоремы 4. Перейдем от пространства $L^2[-a, a]$ к пространству $L^2[0, c]$. При этом граничные условия для D_- заменяются такими: $y(0) = y'(0) = 0$; четность функции $q(x)$ сведется к условию $q(c - x) = q(x)$. Вместе с L_- оказывается K-самосопряженным и обратный оператор L_-^{-1} (теорема 2), который будем строить следующим способом (см. [7]): возьмем решение типа Коши уравнения $ly = 0$, т. е. функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_1(0) = 1, \quad \varphi_1'(0) = 0,$$

$$\varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_2'(0) = 1,$$

и положим

$$\xi(t) = \| \varphi_1(t); \ \varphi_2(t) \|; \quad j = \begin{Vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{Vmatrix}.$$

Тогда обратный оператор $L_-^{-1} = A$ задается выражением

$$Af = i \int_0^x f(t)\, \xi(t)\, dt\, \xi^*(t). \tag{1}$$

Этот оператор имеет второй ранг неэрмитовости, а его характеристическая матрица — функция может быть получена так [7]: $\omega(\lambda) = \omega(c, \lambda)$, где $\omega(x, \lambda)$ является решением системы

$$\frac{d\omega(x, \lambda)}{dx} = \frac{i}{\lambda}\omega(x, \lambda)\xi^*(x)\xi(x)j, \tag{2}$$

$$\omega(0, \lambda) = I.$$

Матрицу $\omega(x, \lambda)$ можно выразить через решения дифференциального уравнения $ly = \frac{1}{\lambda}y$, т. е. уравнения $y'' + q(x)y = \frac{1}{\lambda}y$. Запишем это уравнение в матричной форме, полагая $y_1 = y$, $y_2 = y'$:

$$[y_1;\ y_2]'_x = [y_1\ \ y_2]\begin{Vmatrix} 0; & \frac{1}{\lambda} - q(x) \\ 1; & 0 \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Введем следующие обозначения:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix};\quad B(x) = \begin{Vmatrix} 0 & -q(x) \\ 1 & 0 \end{Vmatrix};\quad Y(x) = \begin{Vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_{11} & y_{21} \end{Vmatrix}.$$

Тогда уравнение (3) примет вид

$$Y'_x = \frac{1}{\lambda}YA + YB(x). \tag{4}$$

Полагая здесь $y(x) = Z(x)U(x)$, получим

$$Z'_xU + ZU'_x = \frac{1}{\lambda}ZUA + ZUB. \tag{5}$$

Выберем $U(x)$, удовлетворяющее условиям $U'_x = UB$, $U(0) = I$. Для этого достаточно взять решение (4) при $\lambda = \infty$, поэтому $U(x)$ состоит из решений уравнения $y'' + q(x)y = 0$, т. е.

$$U(x) = \begin{Vmatrix} \varphi_1 & \varphi_1' \\ \varphi_2 & \varphi_2' \end{Vmatrix}.$$

При таком выборе $U(x)$ уравнение (5) примет вид

$$Z'_xU = \frac{1}{\lambda}ZUA$$

$$Z'_x = \frac{1}{\lambda}ZUAU^{-1}. \tag{6}$$

Но $\operatorname{Det} U(x) \equiv \operatorname{Det} U(0) = 1$, и поэтому

$$U^{-1}(x) = \begin{Vmatrix} \varphi_2'(x) & -\varphi_1'(x) \\ -\varphi_2(x) & \varphi_1(x) \end{Vmatrix},$$

откуда

$$UAU^{-1} = \begin{Vmatrix} -\varphi_1\varphi_2 & \varphi_1^2 \\ -\varphi_2^2 & \varphi_1\varphi_2 \end{Vmatrix} = i\xi^*(x)\xi(x)j.$$

Таким образом, уравнение (2) совпадает с уравнением

$$Z'_x = \frac{1}{\lambda} ZUAU^{-1};\ Z'_x(0, \lambda) \equiv I. \tag{7}$$

Если $Z(x, \lambda)$ — решение этого уравнения, то

$$Z(x, \lambda) = Y(x; \lambda) U^{-1}(x),$$

где $Y(x, \lambda)$ — решение уравнения (4) при начальных условиях $Y(0, \lambda) \equiv I$, т. е., выбирая решение уравнения $ly = \frac{1}{\lambda} y$, удовлетворяющее начальным условиям

$$c_\lambda(0) = 1, \quad c'_\lambda(0) = 0,$$

$$s_\lambda(0) = 0, \ s'_\lambda(0) = 1,$$

получим, что $Y(x, \lambda)$ есть транспонированная матрица Вронского уравнения $ly = \frac{1}{\lambda} y$:

$$Y(x, \lambda) = \begin{Vmatrix} c_\lambda(x) & c'_\lambda(x) \\ s_\lambda(x) & s'_\lambda(x) \end{Vmatrix}.$$

Теперь можно записать характеристическую матрицу-функцию оператора A в виде

$$\omega(\lambda) = Z(c, \lambda) = Y(c, \lambda) U^{-1}(c).$$

По предположению, оператор L_- является K-самосопряженным, а потому и $A = L_-^{-1}$, в силу теоремы 2, также K-самосопряженный. В работе [11] показано, что элементы любой характеристической матрицы-функции такого оператора линейно зависимы, а значит, существует линейная зависимость и между элементами матрицы-функции $Y(c, \lambda)$:

$$Bc_\lambda(c) + Cc'_\lambda(c) + Ds_\lambda(c) + Es'_\lambda(c) \equiv 0. \tag{8}$$

Используя асимптотику элементов этой матрицы при $\lambda \to 0$, покажем, что $B = -E \neq 0$, $C = D = 0$, т. е. $c_\lambda(c) \equiv s'_\lambda(c)$. Для удобства введем временно обозначение $\rho^2 = -\frac{1}{\lambda}$. Тогда (см. [6])

$$c_\lambda(x) = \cos \rho x + O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

$$s_\lambda(x) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \tag{9}$$

причем $c_\lambda(x)$ и $s_\lambda(x)$ удовлетворяют интегральным уравнениям

$$c_\lambda(x) = \cos \rho x + \frac{1}{\rho}\int_0^x \sin \rho(x-t) q(t) c_\lambda(t)\, dt,$$

$$s_\lambda(x) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \frac{1}{\rho}\int_0^x \sin \rho(x-t) q(t) s_\lambda(t)\, dt;$$

поэтому их производные удовлетворяют уравнениям

$$c'_\lambda(x) = -\rho \sin \rho x + \int_0^x \cos \rho (x-t) q(t) c_\lambda(t)\, dt,$$

$$s'_\lambda(x) = \cos \rho x + \int_0^x \cos \rho (x-t) q(t) s_\lambda(t)\, dt,$$

откуда получим следующие оценки:

$$c'_\lambda(x) = -\rho \sin \rho x + 0(1), \tag{10}$$

$$s'_\lambda(x) = \cos \rho x + 0(1).$$

Подставляя выражения (9) и (10) в (8), получим, что $C\rho \sin \rho l = 0(1)$, откуда $C=0$, так что (8) приводит к условию

$$B \cos \rho c + D \frac{\sin \rho c}{\rho} + E \cos \rho c = 0\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{11}$$

Положим здесь $c\rho_n = 2\pi n$ и тогда получим $B+E = O\left(\frac{1}{\rho_n}\right)$, откуда $B+E=0$, так что (8) примет вид

$$B\left[c_\lambda(c) - s'_\lambda(c)\right] + Ds_\lambda(c) \equiv 0, \tag{12}$$

причем $B \neq 0$, ибо в противном случае либо $s_\lambda(c) \equiv 0$, что противоречит оценке (9), либо $D=0$, что противоречит предположению (все коэффициенты в (8) не могут обращаться в нуль).

Уточним асимптотику разности $c_\lambda(c) - s'_\lambda(c)$:

$$c_\lambda(c) = \cos \rho c + \frac{1}{\rho}\int_0^c \sin \rho (c-t)\left[\cos \rho t + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] q(t)\, dt =$$

$$= \cos \rho c + \frac{\sin \rho c}{2\rho}\int_0^c q(t)\, dt + \frac{1}{2\rho}\int_0^c \sin \rho (c-2t) q(t)\, dt + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right),$$

$$s'_\lambda(c) = \cos \rho c + \int_0^c \cos \rho (c-t)\left[\frac{\sin \rho t}{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right] q(t)\, dt =$$

$$= \cos \rho c + \frac{\sin \rho c}{2\rho}\int_0^c q(t)\, dt - \frac{1}{2\rho}\int_0^c \sin \rho (l-2t) q(t)\, dt + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right),$$

откуда

$$c_\lambda(c) - s'_\lambda(c) = \frac{1}{\rho}\int_0^c \sin \rho (c-2t) q(t)\, dt + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right),$$

но в силу теоремы Римана — Лебега

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_0^c \sin \rho (c-2t) q(t)\, dt = 0,$$

поэтому $c_\lambda(c) - s'_\lambda(c) = 0\left(\frac{1}{\rho}\right)$, и соотношение (12) принимает вид

$$B \cdot o\left(\frac{1}{\rho}\right) + D\frac{\sin \rho c}{\rho} + D \cdot O\left(\frac{1}{\rho^2}\right) \equiv 0, \tag{13}$$

откуда $D=0$, так что окончательно получим

$$c_\lambda(c) \equiv s'_\lambda(c). \tag{14}$$

Докажем, что из (14) следует симметрия $q(t)$: $q(c-x)\equiv q(x)$. Для этого рассмотрим на интервале два дифференциальных выражения

$$l_1 y = y'' + q(x)\,y;\ \ l_2 y = y'' + q(c-x)\,y$$

и следующие граничные условия:

$$y'(0) = y(c) = 0\ \ (\beta_1);\ \ y'(0) = y(c) = 0\ (\beta_2);$$

$$y(0) = y(c) = 0\ \ (\alpha_1);\ \ y(0) = y(c) = 0\ (\alpha_2).$$

Очевидно, что если $y(x)$ служит решением уравнения $l_1 y + \lambda y = 0$, то $y(c-x)$ служит решением уравнения $l_2 y + \lambda y = 0$, и наоборот, так что спектр задачи (α_1) совпадает со спектром задачи (α_2), а спектр задачи (β_2) совпадает с множеством нулей функции $s'_{-\lambda-1}(c)$. Кроме того, спектр задачи (β_1) совпадает с множеством нулей функции $c_{-\lambda}^{-1}(c)$ и в силу (14) спектры задач (β_1) и (β_2) также совпадают. Но, как известно [5], оператор с дискретным спектром однозначно определяется спектрами двух краевых задач с различными граничными условиями в нуле и одним и тем же условием в точке c.

Таким образом, операторы l_1 и l_2 совпадают, т. е. $q(c-x)\equiv q(x)$, что полностью доказывает теорему 4, а вместе с тем и теорему 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вигнер Е. Теория групп. М., Изд-во иностр. лит., 1961. 443 с.
2. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов. М., Физматгиз, 1966, 543 с.
3. Гохберг И. П., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов. М., «Наука», 1967. 448 с.
4. Глазман И. М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М., Физматгиз, 1963. 339 с.
5. Марченко В. А. Некоторые вопросы теории одномерных дифференциальных операторов второго порядка. I.— «Труды Моск. мат. о-ва», 1952, № 1, с. 327—420.
6. Наймарк М. А. Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка на полуоси.— «Труды Моск. мат. о-ва», 1954, № 3, с. 181—270.
7. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М., «Наука», 1969. 287 с.
8. Луценко И. Е. Ограниченные операторы, перестановочные с линейным дифференциальным оператором второго порядка.— «Науч. докл. высшей школы. Физ.-мат. науки», 1958, № 3, с. 75—78.
9. Луценко И. Е. Линейные операторы, коммутирующие с антиунитарными.— В сб.: «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 9. Харьков, 1969, с. 85—94.
10. Асади Ш., Луценко И. Е. Антиунитарные преобразования линейных операторов.— «Вестник Харьк. ун-та. Сер. мех.-мат.», 1972, вып. 37, с. 13—20.
11. Асади Ш., Луценко И. Е. Антиунитарные преобразования операторных узлов.— «Вестник Харьк. ун-та. Сер. мех.-мат.», 1972, вып. 37, с. 21—26.