КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

И. Л. Иванова

Предметом настоящей статьи являются случайные процессы, корреляционные функции которых принадлежат некоторым квазианалитическим классам, а также некоторые случайные процессы, определяемые рядами или интегралами Фурье.

Хорошо известна связь между дифференциальными свойствами или аналитичностью случайного процесса и соответствующими свойствами его корреляционной функции.

Например (см. [1] и [2]):

1. Если корреляционная функция $B(t, s)$ случайного процесса $f(t, \omega)$ имеет непрерывные производные порядка $(2n+1)$ и непрерывные симметричные производные порядка $(2n+2)$ при $s=t$, то случайный процесс $f(t, \omega)$ почти наверное дифференцируем n раз.

Отсюда следует, что если корреляционная функция случайного процесса неограниченное число раз дифференцируема (при $s=t$) и производные ограничены в совокупности, то случайный процесс почти наверное дифференцируем неограниченное число раз. *

2. Для того, чтобы случайный процесс $f(t, \omega)$ был аналитичен в среднем квадратичном, необходимо и достаточно, чтобы корреляционная функция $B(t, s)$ процесса была аналитична при $s=t$.

3. Случайный процесс $f(t, \omega)$, аналитичный в среднем квадратичном, почти наверное аналитичен, если совокупность значений его производных при $t=0$ ограничена.

Представляет интерес изучить также связь между квазианалитичностью случайного процесса и его корреляционной функции.

В статье будут рассмотрены некоторые специальные квазианалитические классы функций и получены условия квазианалитичности случайных процессов, представимых рядами и интегралами Фурье.

Автор выражает искреннюю благодарность Н. С. Ландкофу за постановку вопроса и внимание, проявленное при выполнении этой работы.

§ 1. Случайные процессы с квазианалитическими корреляционными функциями

Определение 1. *Будем называть классом $C_s(m_n)$, отвечающим последовательности чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$ множество всех бесконечно дифференцируемых случайных процессов, почти все выборочные функции которых удовлетворяют неравенству:*

$$|f^{(n)}(t, \omega)| < r^n m_n \quad (n=0, 1, \ldots),$$

где $r = r(\omega)$ является случайной величиной.

---

* В этих формулировках достаточно даже требовать существование и непрерывность производных только на диагонали $t=s$.

Определение 2. *Случайный процесс $f(t, \omega)$ назовем квазианалитическим, если для почти всех его выборочных функций из равенства $(f^n)(t_0, \omega) = 0$; $(n = 0, 1, \dots)$ следует $f(t, \omega) \equiv 0$.*

Пусть $f(t, \omega)$ — стационарный случайный процесс и $B(\tau)$ — его корреляционная функция.

Ниже мы увидим, что квазианалитичность случайного процесса $f(t, \omega)$ связана с ограничениями, накладываемыми только на четные производные корреляционной функции $B(\tau)$. В связи с этим полезно ввести следующее определение.

Определение 3. *Функцию $B(\tau)$ назовем принадлежащей классу $C_2(l_{2n})$, если*

$$|B^{(2n)}(\tau)| \leqslant r^n l_{2n} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Заметим, что из принадлежности функции $B(\tau)$ классу $C_2(l_{2n})$ следует принадлежность ее классу $C(m_k)$, где

$$m_k = \begin{cases} l_{2n} & \text{при } k = 2n \\ \infty & \text{при } k = 2n+1 \end{cases} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

В этом случае $C_2(l_{2n}) \equiv C(m_k)$.

Лемма 1. *Для квазианалитичности класса $C_2(l_{2n})$ необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\sqrt{l_{2n}}\}$ удовлетворяла условию Карлемана.*

Доказательство. Выше мы видели, что $C_2(l_{2n}) = C(m_k)$, где

$$m_k = \begin{cases} l_{2n} & \text{при } k = 2n \\ \infty & \text{при } k = 2n+1 \end{cases} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Необходимое и достаточное условие квазианалитичности класса $C(m_k)$ дает известная теорема Карлемана (см. [3]). Оно состоит в том, что

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(x)}{x^2}\,dx = \infty, \tag{*}$$

где $T(x) = \sup\limits_k \dfrac{x^k}{m_k}$.

Очевидно, что

$$\sup_n \frac{x^k}{m_k} = \sup_n \frac{x^{2n}}{l_{2n}} = \sup_n \left(\frac{x^n}{\sqrt{l_{2n}}}\right)^2 = \left[\sup_n \frac{x^n}{\sqrt{l_{2n}}}\right]^2.$$

Если положить $\hat{T}(x) = \sup \dfrac{x^n}{\sqrt{l_{2n}}}$, то $T(x) = \hat{T}^2(x)$ и расходимость интеграла (*) равносильна условию $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln \hat{T}(x)}{x^2} = \infty$.

Это и значит, что квазианалитичность класса $C_2(l_{2n})$ эквивалентна тому, что последовательность $\{\sqrt{l_{2n}}\}$ удовлетворяет условию Карлемана.

Теорема 1. *Если корреляционная функция $B(\tau)$ стационарного случайного процесса $f(t, \omega)$ принадлежит квазианалитическому классу $C_2(l_{2n})$, то случайный процесс квазианалитичен и принадлежит классу $C_s(\sqrt{l_{2n}})$.*

Доказательство. По условию теоремы $|B^{(2n)}(\tau)| < r^n l_{2n}$ $(n = 0, 1 \dots)$. Не ограничивая общности, можно считать $r > 1$. Из леммы 1 следует, что последовательность $\{\sqrt{l_{2n}}\}$ удовлетворяет условию Карлемана.

Таким образом, нам достаточно показать, что для почти всех выборочных функций случайного процесса $f(t, \omega)$ имеет место неравенство

$$|f^{(n)}(t, \omega)| < r_1^n(\omega) \sqrt{l_{2n}} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Используя неравенство Чебышева, получим: $P\{|f^{(n)}(t, \omega) > r^n \sqrt{l_{2n}}$ для хотя бы одного

$$n > n_0\} \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} P\{|f^{(n)}(t, \omega)| > r^n \sqrt{l_{2n}}\} \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{M|f^{(n)}(t, \omega)|^2}{r^{2n} l_{2n}} =$$

$$= \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{B^{(2n)}(0)}{r^{2n} l_{2n}} \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{r^n l_{2n}}{r^{2n} l_{2n}} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{r^n} < \infty.$$

Отсюда следует, что для почти всех ω существует такое $n_0(\omega)$, что для всех $n > n_0(\omega)$ выполняется неравенство $|f^{(n)}(t, \omega)| < r^n \sqrt{l_{2n}}$.

За счет увеличения r при каждом ω можно обеспечить выполнение последнего неравенства и для $n < n_0(\omega)$, т. е. для почти всех ω

$$|f^{(n)}(t, \omega)| < r_1^n(\omega) \sqrt{l_{2n}} \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь нестационарный процесс $f(t, \omega)$ с корреляционной функцией $B(t, s)$.

Следуя Мацаеву и Ронкину (см. [4]), введем следующие определения и лемму.

Определение 3. *Класс функций двух переменных $B(t, s)$ называется квазианалитическим, если из равенства* $\left.\frac{\partial^{p+q} B(t, s)}{\partial t^p \partial s^q}\right|_{\substack{t=t_0 \\ s=s_0}} = 0$ $(p, q = 0, 1, \ldots)$ *следует* $B(t, s) = 0$.

Определение 4. *Функцию $B(t, s)$ назовем принадлежащей классу $M_2(m_n)$, если*

$$\left|\frac{\partial^{2n} B(t, s)}{\partial t^n \partial s^n}\right| < r^n m_n \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Лемма 2. *Для квазианалитичности класса $M_2(m_n)$ необходимо, чтобы последовательность $\{\sqrt{m_n}\}$ порождала квазианалитический класс $C(\sqrt{m_n})$ функций одной переменной.*

Доказательство.

Для доказательства воспользуемся следующей теоремой (см. [4]):

Если функция $\alpha(x, y)$ является монотонно растущей функцией от $|x|$ и $|y|$ и удовлетворяет условию $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|\alpha(x, x)|}{1 + x^2} dx < \infty$, то существует целая функция конечной степени $B(t, s)$, удовлетворяющая условию:

$$\lim_{x^2+y^2 \to \infty} \alpha(x, y) B(x, y) = 0.$$

Пусть последовательность $\{\sqrt{m_n}\}$ порождает неквазианалитический класс функций одной переменной. Тогда $\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln T(x)}{x^2} dx < \infty$, где $T(x) = \sup\limits_n \frac{x^n}{\sqrt{m_n}}$.

Поэтому функция $T^2(1 + |x| + |y|)(1 + x^2 + y^2)^2$ удовлетворяет условиям цитированной теоремы.

Следовательно, существует целая функция конечной степени $B(t, s)$, для которой

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} B(x, y)\, T^2(1+|x|+|y|)(1+x^2+y^2)^2 = 0. \qquad (**)$$

Так как функция $T(x)$ возрастает, то

$$T(\sqrt{xy}) \leqslant T(1+|x|+|y|).$$

Покажем, что функция $\tilde{B}(t, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} B(x, y)\, e^{itx+isy} dx\, dy$ принадлежит классу $M_2(m_n)$.

Действительно, используя (**), получим следующую цепочку неравенств:

$$\left|\frac{\partial^{2n}\tilde{B}(t, s)}{\partial t^n \partial s^n}\right| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x^n y^n B(x, y)|\, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant A \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|x^n y^n|\, dx\, dy}{T^2(1+|x|+|y|)(1+x^2+y^2)^2} \leqslant$$

$$\leqslant A \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|x^n y^n|\, dx\, dy}{T^2(\sqrt{xy})(1+x^2+y^2)^2} \leqslant B \sup_{x, y} \frac{|x^n y^n|}{T^2(\sqrt{xy})} \leqslant C m_n.$$

Последнее неравенство в цепочке следует из того, что $T^2(\sqrt{xy}) = \sup\limits_n \frac{|x^n y^n|}{m_n}$ и, значит, $m_n \geqslant \frac{|x^n y^n|}{T^2(\sqrt{xy})}$.

В то же время функция $\tilde{B}(t, s)$, как преобразование Фурье целой функции конечной степени, равна нулю вместе со всеми своими производными на целом интервале, не будучи равной нулю тождественно.

Таким образом, класс $M_2(m_n)$ не является квазианалитическим. Лемма доказана.

Теорема 2. *Если корреляционная функция $B(t, s)$ случайного процесса $f(t, \omega)$ принадлежит квазианалитическому классу $M_2(m_n)$, то случайный процесс $f(t, \omega)$ квазианалитичен и принадлежит классу $C(\sqrt{m_n})$.*

С использованием леммы 2 доказательство этой теоремы по сути дела повторяет доказательство теоремы 1.

§ 2. Квазианалитические случайные процессы, определяемые тригонометрическими рядами

Рассмотрим теперь некоторые другие квазианалитические классы.

Определение 5. *Класс C функций, заданных на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$ называется квазианалитическим I, если всякие две функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ этого класса, совпадающие на некотором интервале (α, β) отрезка $a \leqslant t \leqslant b$, совпадают на всем отрезке, то есть, если из соотношения*

$$f_1(t) = f_2(t), \quad \alpha < t < \beta$$

следует

$$f_1(t) = f_2(t), \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Случайный процесс $f(t, \omega)$ назовем квазианалитическим I на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$, если для почти всех выборочных функций процесса из соотношения

$$f(t, \omega) = 0, \ a < \alpha < t < \beta < b$$

следует

$$f(t, \omega) = 0, \ a \leqslant t \leqslant b.$$

В дальнейшем мы будем использовать следующую теорему Левинсона (см. [6]).

Если $f(t) \in L(-\pi, \pi)$ и $f(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, причем $c_n = O(e^{-\theta(n)})$, $n \to +\infty$, где $\int\limits_1^{\infty} \frac{\theta(u)}{u^2} du = \infty$, то $f(t)$ не может обращаться в нуль на множестве положительной меры, не будучи тождественно равной нулю.

Рассмотрим случайный процесс $f(t, \omega) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n(\omega) e^{int}$, являющийся суммой тригонометрического ряда на отрезке $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ с независимыми случайными коэффициентами.

О коэффициентах $c_n(\omega)$ сделаем следующие предположения:

1) $M[c_n(\omega)] = 0$; 2) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} M\{|c_n(\omega)|^2\} < \infty$.

Последнее условие гарантирует с вероятностью единица принадлежность случайного процесса $f(t, \omega)$ классу $L(-\pi, \pi)$ (см. [5]).

Лемма 3. *Если $\{x_n\}$ — независимые случайные величины, $Mx_n = 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M\{|x_n|^p\}$ сходится при некоторых p, $0 < p \leqslant 2$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится с вероятностью единица.*

Доказательство. Как следует из [8], с вероятностью единица сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - Mx_n'), \text{ где } x_n' = \begin{cases} x_n, & \text{если } |x_n| \leqslant 1 \\ 0, & \text{если } |x_n| > 1. \end{cases}$$

Таким образом, достаточно доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Mx_n'$ сходится. Обозначим $x_n'' = x_n - x_n'$, $x_n'' = \begin{cases} 0 & \text{если } |x_n| \leqslant 1 \\ x_n, & \text{если } |x_n| > 1. \end{cases}$ Так как $Mx_n = 0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Mx_n' = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} Mx_n''$. Сходимость же последних рядов следует из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M\{|x_n|^p\}$ и из следующих неравенств:

$$|Mx_n'| \leqslant M\{|x_n'|^p\} \leqslant M\{|x_n|^p\}, \text{ если } 0 < p \leqslant 1,$$
$$|Mx_n''| \leqslant M\{|x_n''|^p\} \leqslant M\{|x_n|^p\}, \text{ если } 1 < p \leqslant 2.$$

Теорема 3. *Если $M\{|c_n(\omega)|^p\} = O(e^{-\theta_1(n)})$, $n \to +\infty$, где $0 < p \leqslant 2$, $\theta_1(u) > 0$ и $\int\limits_1^{\infty} \frac{\theta_1(u)}{u^2} du = \infty$, то случайный процесс $f(t, \omega) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\omega) e^{int}$, $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$, I-квазианалитичен на отрезке $[0, \pi]$.*

Доказательство. Положим $x_n = c_n(\omega) e^{\theta(n)}$, где $\theta(n) = \frac{\beta}{p}\theta_1(n)$, $0 < \beta < 1$. Для этих случайных величин оказываются выполненными условия доказанной леммы.

Из этого следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(\omega) e^{\theta(n)}$ сходится с вероятностью единица.

Значит, с вероятностью единица $c_n(\omega) = O(e^{-\theta(n)})$, $n \to +\infty$, где функция $\theta(u) = \frac{\beta}{p}\theta_1(u)$ удовлетворяет условиям: $\theta(u) > 0$, $\int\limits_1^{\infty} \frac{\theta(u)}{u^2} du = \infty$.

Отсюда, в силу теоремы Левинсона, следует наше утверждение.

Из доказанной теоремы, как частный случай, получаем следующее условие I-квазианалитичности случайного процесса.

Если $M\{|c_n(\omega)|^p\} = O(e^{-\delta n})$, $n \to \infty$, где $\delta > 0$, $0 < p \leqslant 2$, то случайный процесс $f(t, \omega) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\omega) e^{int}$, $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ с вероятностью единица I-квазианалитичен на отрезке $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$.

§ 3. Квазианалитические процессы, определяемые случайным интегралом Фурье

Рассмотрим семейство вещественных функций множества $\mu(E;\ \omega)$, где E — произвольное борелевское множество на оси, а ω — точка вероятностного пространства.

Предположим следующее:

1) Для почти всех ω $\mu(E;\ \omega)$ является вполне аддитивной функцией на σ-поле всех борелевских множеств вещественной оси.

2) Для любой непрерывной функции $f(x)$, равной нулю вне некоторого конечного интервала,

$$\xi(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mu(x;\ \omega)$$

является случайной величиной.

Из 2) легко следует, что при любом фиксированном борелевском множестве E $\mu(E;\ \omega)$, а также полная вариация $|\mu|(E;\ \omega)$ будут также случайными величинами.

При выполнении этих условий будем называть $\mu(E;\ \omega)$ случайным зарядом, оставляя термин случайная мера за тем случаем, когда $\mu(E;\ \omega) \geqslant 0$.

Подчиним случайный заряд $\mu(E;\ \omega)$ еще следующим ограничениям.

3) $|\mu|((-\infty, +\infty);\ \omega) < \infty$ (полная конечность заряда).

4) При любом E дисперсия $D|\mu|(E;\ \omega) < \infty$.

5) При $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ случайные величины $|\mu|(E_1;\ \omega)$ и $|\mu|(E_2;\ \omega)$ независимы.

Рассмотрим теперь случайный процесс

$$f(t, \omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\mu(x;\ \omega),$$

где $\omega(E;\ \omega)$ — случайный заряд, удовлетворяющий условиям 3) — 5), и поставим вопрос о нахождении достаточных условий I-квазианалитичности этого процесса.

Положим еще $a_n(\omega) = |\mu|([n, n+1); \omega)$, $b_n = Ma_n^2(\omega)$.

Условия квазианалитичности процесса $f(t, \omega)$ дает следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть положительная функция* $\theta(u)$ *удовлетворяет условиям:* $u\theta'(u) > \alpha\theta(u)$, $\theta(1) > \frac{2}{\alpha}$, *где* $\alpha > 0$ — *постоянная, и* $\int\limits_1^\infty \frac{\theta(u)}{u^2} du = \infty$. *Если* $b_n = O(e^{-\theta(n)})$ *при* $n \to +\infty$, *то функция* $f(t, \omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\mu(x; \omega)$ *квазианалитична* I.

Доказательство. Покажем, во-первых, что из условий теоремы следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\theta(n)}$.

Действительно, интегрируя неравенство $\frac{\theta'(u)}{\theta(u)} > \frac{\alpha}{u}$, получим $\theta(u) > Cu^\alpha$, где $C > 0$ — постоянная. Тогда $e^{-\theta(n)} < e^{-Cu^\alpha}$, откуда и следует утверждение.

Пусть теперь $b_n = O(e^{-\theta(n)})$. Это значит, что сходится ряд $\sum\limits_{n-1}^{\infty} b_n e^{\theta_1(n)}$. Здесь $\theta_1(n) = \beta\theta(n)$, где β — фиксированное число $(0 < \beta < 1)$, выбранное настолько близко к единице, чтобы $\theta(1) > \frac{2}{\alpha\beta}$.

Но тогда с вероятностью единица сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(\omega)\, e^{\frac{1}{2}\theta_1(n)}$. Для этого, как известно, достаточно проверить сходимость двух рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\{a_n(\omega)\, e^{\frac{1}{2}\theta_1(n)}\} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} D\{a_n(\omega)\, e^{\frac{1}{2}\theta_1(n)}\}.$$

Заметим, во-первых, что $\sqrt{b_n} = O(e^{-\frac{1}{2}\theta(n)})$ и, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{b_n} e^{\frac{1}{2}\theta_1(n)}$ сходится. Кроме того, в силу неравенства Шварца $Ma_n(\omega) \leqslant \sqrt{b_n} = \sqrt{Ma_n^2(\omega)}$. Поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\{a_n(\omega)\, e^{\frac{1}{2}\theta_1(n)}\} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{2}\theta_1(n)} Ma_n(\omega) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{2}\theta_1(n)} \sqrt{b_n} < \infty.$$

Далее,

$$\sum_{n=1}^{\infty} D\{a_n(\omega)\, e^{\frac{1}{2}\theta_1(n)}\} = \sum_{n=1}^{\infty} M\{a_n(\omega)\, e^{\frac{1}{2}\theta_1(n)}\}^2 - \sum_{n=1}^{\infty} M^2\{a_n(\omega)\, e^{\frac{1}{2}\theta_1(n)}\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{\theta_1(n)} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} [e^{\frac{1}{2}\theta_1(n)} Ma_n(\omega)]^2 < \infty.$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(\omega)\, e^{\frac{1}{2}\theta_1(n)}$ сходится почти наверное.

Отсюда следует, что с вероятностью единица

$$a_n(\omega) = |\mu|([n, n+1);\ \omega) = O\left(e^{-\frac{\beta}{2}\theta(n)}\right).$$

Рассмотрим теперь случайную функцию

$$A(n,\ \omega) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k(\omega) = \int_n^{\infty} d|\mu|(x;\ \omega).$$

Как было только что доказано, с вероятностью единица

$$A(n,\ \omega) < C(\omega) \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\frac{\beta}{2}\theta(k)} < C(\omega) \int_{n-1}^{\infty} e^{-\frac{\beta}{2}\theta(x)}\, dx.$$

Интегрируя неравенство $\frac{\theta'(x)}{\theta(x)} > \frac{\alpha}{x}$, получаем $\theta(x) > \theta(1)\ x^{\alpha}$.

Предполагая, что $0 < \alpha < 1$, получим следующую цепочку неравенств:

$$\int_{n-1}^{\infty} e^{-\frac{\beta}{2}\theta(x)}\, dx < \int_{n-1}^{\infty} e^{-\frac{\beta}{2}\theta(x)} \frac{\theta'(x)}{\alpha\theta(x)} \cdot x dx < \int_{n-1}^{\infty} e^{-\frac{\beta}{2}\theta(x)} \frac{\theta'(x)\, x^{1-\alpha}}{\alpha\theta(1)}\, dx <$$

$$< \frac{1}{\alpha\theta(1)} \int_{n-1}^{\infty} e^{-\frac{\beta}{2}\theta(x)}\, \theta'(x) \cdot x dx = \frac{1}{\alpha\theta(1)} \left[-\frac{2}{\beta} x e^{-\frac{\beta}{2}\theta(x)} \Big|_{n-1}^{\infty} + \frac{2}{\beta} \int_{n-1}^{\infty} e^{-\frac{\beta}{2}\theta(x)}\, dx \right].$$

Отсюда

$$\left(1 - \frac{2}{\alpha\beta\theta(1)}\right) \int_{n-1}^{\infty} e^{-\frac{\beta}{2}\theta(x)}\, dx < \frac{2}{\alpha\beta\theta(1)} (n-1)\, e^{-\frac{\beta}{2}\theta(n-1)}.$$

В силу соотношения $\theta(1) > \frac{2}{\alpha\beta}$ получим

$$\int_{n-1}^{\infty} e^{-\frac{\beta}{2}\theta(x)}\, dx < \frac{2}{\alpha\beta\theta(1) - 2} (n-1)\, e^{-\frac{\beta}{2}\theta(n-1)}.$$

Таким образом, с вероятностью единица

$$A(n,\ \omega) < \frac{2C(\omega)}{\alpha\beta\theta(1) - 2} (n-1)\, e^{-\frac{\beta}{2}\theta(n-1)}.$$

Но тогда с вероятностью единица оказываются выполненными условия следующей теоремы Берлинга (см. [7]).

Пусть функция $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\, d\mu(x)$, где $\mu(x)$ ограниченный заряд на оси. Положим $A(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} d|\mu|(x)$, $\lambda > 0$. Если $\int_1^{\infty} \frac{\ln A(u)}{u^2}\, du = -\infty$ то из равенства нулю функции $f(t)$ на множестве положительной меры следует, что функция $f(t)$ тождественно равна нулю.

Действительно, с вероятностью единица

$$\int_3^\infty \frac{\ln A(u,\omega)}{u^2}du = \sum_{n=3}^\infty \int_n^{n+1} \frac{\ln A(u,\omega)}{u^2}du < \sum_{n=3}^\infty \ln A(n,\omega)\int_n^{n+1}\frac{du}{u^2} < \sum_{n=3}^\infty C_1(\omega) \times$$
$$\times \int_n^{n+1}\frac{du}{u^2} + \sum_{n=3}^\infty \ln(n-1)\int_n^{n+1}\frac{du}{u^2} - \frac{\beta}{2}\sum_{n=3}^\infty \theta(n-1)\int_n^{n+1}\frac{du}{u^2}.$$

Так как первые два ряда сходятся, то достаточно обнаружить, что

$$\sum_{n=3}^\infty \theta(n-1)\int_n^{n+1}\frac{du}{u^2} > +\infty.$$

Но

$$\sum_{n=3}^\infty \theta(n-1)\int_n^{n+1}\frac{du}{u^2} = \sum_{n=3}^\infty \theta(n-1)\int_{n-2}^{n-1}\frac{du}{(u+2)^2} > \sum_{n=3}^\infty \int_{n-2}^{n-1}\frac{\theta(u)}{(u+2)^2}\times$$
$$\times du > \int_3^\infty \frac{\theta(u)}{(u+2)^2}du = +\infty.$$

При $\alpha \geqslant 1$ расходимость интеграла $\int_3^\infty \frac{\ln A(u)}{u^2}du$ легко следует из неравенства $\theta(u) > Cu^\alpha$.

Таким образом, с вероятностью единица случайный процесс $f(t,\omega) = \int_{-\infty}^\infty e^{itx}d\mu(x,\omega)$ квазианалитичен I, что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы, как частный случай, следует предложение. Если $b_n = O(e^{-\delta n})$, $n \to +\infty$, $\delta > 0$, то случайный процесс $f(t,\omega) = \int_{-\infty}^\infty e^{itx}d\mu(x,\omega)$ с вероятностью единица квазианалитичен I.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Бартлетт. Введение в теорию случайных процессов. Изд-во иностр. лит., М., 1958.
2. Ю. К. Беляев. Аналитические случайные процессы. Теория вероятностей и ее применения, т. IV, в. 4, 1959.
3. С. Мандельбройт. Квазианалитические классы функций. ОНТИ, 1937.
4. В. И. Мацаев, Л. И. Ронкин. Квазианалитические классы функций от нескольких переменных. «Зап. физ.-мат. ф-та ХГУ и ХМО», сер. 4, т. XXVII, 1961
5. J. P. Kahane. Series de Fourier aleatoires. Montreal, 1963.
6. Norman Levinson. Gap and Density Theorems. Amer. Math. Soc. Collogu. Publ., vol. XXVI. 1940.
7. A. Beurling. On quasianaliticity and general distributions. Mimeographed lecture notes. Princeton, 1961.
8. М. Лоэв. Теория вероятностей. Изд-во иностр. лит., М., 1962.

Поступила 10 июня 1965 г.