УДК 513.88

Б. В. ГОДУН, М. И. КАДЕЦ

О МНОЖЕСТВЕ ЗНАЧЕНИЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОДПРОСТРАНСТВ СОПРЯЖЕННОГО ПРОСТРАНСТВА

Пусть X — пространство Банаха и X^* — его сопряженное. Подпространство $\Gamma \subset X^*$ называется тотальным на X, если

$$\Gamma^\perp \cap \pi(X) = \{0\},$$

где π — естественное вложение X в X^{**} и $\Gamma^\perp = \{F \in X^{**} : F(f) = 0$ для всех $f \in \Gamma\}$, и нормирующим, если сумма $\Gamma^\perp + \pi(X)$ замкнута по норме. Характеристикой Γ называется величина [6]

$$r(\Gamma) = \inf_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \sup_{f \in \Gamma} \frac{|f(x)|}{\|f\| \cdot \|x\|} = \frac{1}{\|P_\Gamma\|},$$

где P_Γ — проектор из $\Gamma^\perp \oplus \pi(X)$ на $\pi(X)$ параллельно $\Gamma^\perp$. Для широкого класса банаховых пространств в сопряженном пространстве существует собственное подпространство характеристики 1 (таковыми, в частности, являются все сопряженные пространства и пространства непрерывных функций на бикомпакте с равномерной нормой). Кроме того, известны пространства (например, пространство c_0 [3]), для которых значения характеристики всех собственных подпространств сопряженного пространства не больше 1/2. В связи с этим возникает вопрос об описании множества значений характеристики всех собственных подпространств пространства, сопряженного к данному. Другой, представляющий интерес вопрос — это возможность такой эквивалентной перенормировки данного пространства, чтобы в новой норме (подобно пространству c_0) значения характеристики всех собственных подпространств сопряженного пространства были равномерно отграничены от 1.

Если $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ — базис X, то мы будем рассматривать следующие последовательности операторов:

$$S_h(x) = \sum_{k=1}^{h} x_k^*(x)\, x_k; \quad R_h = I - S_h, \ T_h = S_h - R_h.$$

Напомним, что нормой базиса называется величина $\nu_{\{x_k\}} = \sup_h \|S_h\|$.

Базис называется монотонным, если его норма равна 1. Для подмножества $A \subset X$ будем обозначать $[A]$ подпространство, порожденное A. Очевидно, характеристика каждого не тотального подпространства $\Gamma \subset X^*$ равна нулю. Поэтому всюду в дальнейшем мы будем говорить о множестве значений характеристики лишь тотальных подпространств X^*.

Начнем с теоремы, которая показывает, что множество значений характеристики собственных подпространств X^* всегда связно.

Теорема 1. *Если X не рефлексивно и для некоторого $\alpha \in (0, 1]$ существует такое подпространство $G \subset X^*$, что $r(G) \geqslant \alpha$, то для любого $\beta \in (0, \alpha)$ найдется подпространство $\Gamma \subset X^*$ такое, что $r(\Gamma) = \beta$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольно выбранный функционал $F \in G^{\perp} \subset X^{**} \backslash \pi(X)$ и элемент $x \in X$, $\|x\| = \|F\| = 1$. Зададимся $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \alpha$) и положим $F_\varepsilon = \varepsilon F + x \in Y = [F] \oplus \pi(X)$. Пусть P — проектор из Y на $\pi(X)$ параллельно $[F]$ и P_ε — проектор из Y на $\pi(X)$ параллельно $[F_\varepsilon]$. Нетрудно видеть, что

$$\|P\| \leqslant \frac{1}{\alpha}; \quad \|P_\varepsilon\| \geqslant \frac{1}{\varepsilon}. \tag{1}$$

Определим на интервале $[0, 1]$ числовую функцию $\varphi(\lambda)$, полагая для каждого $\lambda \in [0, 1]$:

$$\varphi(\lambda) = \|P_\lambda\|^{-1},$$

где $P_\lambda = \lambda P + (1 - \lambda) P_\varepsilon$. Так, определенная функция $\varphi(\lambda)$, очевидно, непрерывна на $[0, 1]$ и согласно (1) $\varphi(0) \leqslant \varepsilon$, $\varphi(1) \geqslant \alpha$. Значит, для каждого $\beta \in [\varepsilon, \alpha]$ найдется такое $\lambda_\beta \in [0, 1]$, что $\varphi(\lambda_\beta) = \beta$. Отметим, что при каждом фиксированном λ оператор P_λ является проектором из Y на $\pi(X)$. Пусть теперь $\Gamma_\beta = \Phi^{-1}(0)$, где $\Phi \in \operatorname{Ker} P_{\lambda_\beta}$. Тогда на основании предыдущего замечания и определения функции $\varphi(\lambda)$

$$r(\Gamma_\beta) = \frac{1}{\|P_{\lambda_\beta}\|} = \varphi(\lambda_\beta) = \beta.$$

Так как $\varepsilon > 0$ было выбрано нами произвольно, то для любого $\beta \in (0, \alpha)$ существует такая гиперплоскость $\Gamma = \Phi^{-1}(0), \Phi \in X^{**} \setminus \pi(X)$, что $r(\Gamma) = \beta$.

Следствие 1. *Если X не рефлексивно, то множество значений характеристики собственных тотальных подпространств X^* содержит интервал* $(0, 1/2)$.

Доказательство. В $X^{**} \setminus \pi(X)$ всегда существует элемент «почти» ортогональный $\pi(X)$. Точнее, для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $F \in X^{**} \setminus \pi(X)$ такой, что проектор P из $[F] \oplus \pi(X)$ на $[F]$ параллельно $\pi(X)$ имеет норму $\|P\| \leqslant 1 + 4\varepsilon(1 - 2\varepsilon)^{-1}$. Тогда для дополнительного проектора $Q = I - P$, $\|Q\| \leqslant 2(1 - 2\varepsilon)^{-1}$. Значит, если $G = F^{-1}(0)$, то

$$r(G) = \frac{1}{\|Q\|} \geqslant \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

Следовательно, по теореме 1 множество значений характеристики собственных подпространств X^* содержит интервал $(0, 1/2 - \varepsilon)$, а в силу произвольности $\varepsilon > 0$ — и интервал $(0, 1/2)$.

Следствие 2. *Если $\operatorname{dens} X < \operatorname{dens} X^*$, то значения характеристики собственных тотальных подпространств X^* (в любой эквивалентной норме на X) заполняют интервал* $[0, 1]$.

Доказательство. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ($\operatorname{card} I = \operatorname{dens} X$) — плотное в единичном шаре X множество и $\Gamma = [f_\alpha] \subset X^*$, где f_α — тот функционал на единичной сфере X^*, на котором x_α достигает нормы. Нетрудно видеть, что $r(\Gamma) = 1$ и так как $\operatorname{dens}\Gamma = \operatorname{dens} X < \operatorname{dens} X^*$, то Γ — собственное подпространство X^*. В силу теоремы 1 множество значений характеристики собственных подпространств X^* содержит интервал $(0, 1]$. Поскольку $\operatorname{dens} X < \operatorname{dens} X^*$, то X не может быть квазирефлексивным, и по [2] в X^* существует тотальное подпространство характеристики нуль. Таким образом, значения характеристики тотальных подпространств X^* заполняют весь интервал $[0, 1]$.

Следствие 2 показывает, что для сепарабельного X точка 1 может не принадлежать множеству значений характеристики собственных подпространств X^* (возможно, в некоторой эквивалентной норме на X) лишь в том случае, когда X^* сепарабельно. По этому поводу имеется следующая теорема И. Зингера и Д. ван Дульста.

Теорема [4]. *Если X^* сепарабельно, то существует такая эквивалентная норма $|||\cdot|||$ на X, что в новой норме $r_{|||\cdot|||}(\Gamma) < 1$ для каждого собственного подпространства $\Gamma \subset X^*$.*

В некоторых случаях мы сможем уточнить этот результат.

Лемма. *Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — монотонный натягивающий базис не рефлексивного пространства X. Тогда*

$$r(\Gamma) < {}^1/_2 \lim_{h\to\infty} \| T_h \| \tag{2}$$

для каждого собственного подпространства $\Gamma \subset X^*$.

Доказательство. Для произвольного фиксированного функционала $F \in X^{**} \setminus \pi(X)$ имеем

$$\begin{aligned} r(F^{-1}(0)) &= \inf_{x\in X} \sup_{f\in F^{-1}(0)} \frac{|f(x)|}{\|f\|\cdot\|x\|} \leqslant \\ &\leqslant \lim_{h\to\infty} \sup_{f\in F^{-1}(0)} \frac{|f(S_h^{**}(F) - {}^1/_2 F)|}{\|f\|\cdot\|S_h^{**}(F)\|} \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2}\lim_{h\to\infty} \frac{\|2S_h^{**}(F) - F\|}{\|S_h^{**}(F)\|} \leqslant \frac{1}{2}\lim_{h\to\infty} \frac{\|T_h^{**}\|\cdot\|F\|}{\|S_h^{**}(F)\|}. \end{aligned} \tag{3}$$

Отметим, что, согласно известной теореме Джеймса [5, с. 122], $\lim_{h\to\infty} \|S_h^{**}(F)\| = \|F\|$ и так как $\|T_h^{**}\| = \|T_h\|$, то из (3) $r(F^{-1}(0) \leqslant \leqslant \frac{1}{2}\lim_{h\to\infty}\|T_h\|$. Так как функционал $F \in X^{**}\setminus\pi(X)$ был нами выбран произвольно и, очевидно, каждое тотальное подпространство $\Gamma \subset X^*$ содержится в некоторой гиперплоскости $\Gamma \subset \Phi^{-1}(0)$, $\Phi \in X^{**}\setminus\pi(X)$, то неравенство (2) выполняется для каждого собственного подпространства $\Gamma \subset X^*$.

Теорема 2. *Пусть* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— безусловный натягивающий базис не рефлексивного пространства* X. *Тогда существует такая эквивалентная норма* $|||\cdot|||$ *на* X, *что в новой норме* $r_{|||\cdot|||}(\Gamma) \leqslant {}^1/_2$ *для каждого собственного подпространства* $\Gamma \subset X^*$.

Доказательство. Определим новую норму на X, полагая для каждого $x \in X$

$$|||x||| = \sup_{\lambda_k=0,\pm 1} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k^*(x)\, x_k \right\|.$$

Известно [5, с. 125], что $|||\cdot|||$ — норма на X, эквивалентная исходной, в новой норме базис монотонен и $|||T_h||| = 1$ для всех $h = 1, 2, \ldots$. Тогда в силу леммы $r_{|||\cdot|||}(\Gamma) \leqslant {}^1/_2$ для каждого собственного подпространства $\Gamma \subset X^*$.

Следствие 3. *Если* X *— не рефлексивное пространство Банаха с безусловным натягивающим базисом, то существует такая эквивалентная исходной норма на* X, *что в новой норме каждый не натягивающий базис* X *имеет норму* $\nu_{\{x_k\}} \geqslant 2$.

Доказательство. Введем на X новую норму, как в теореме 2. Если $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — не натягивающий базис X, то $[x_k^*] \neq X^*$ и, значит, согласно теореме 2 и [4]

$$\nu_{\{x_k\}} \geqslant \frac{1}{r([x_k^*])} \geqslant 2.$$

Напомним, что расстоянием Банаха — Мазура между двумя изоморфными пространствами X и Y называется величина $d(X, Y) = \inf(\|T\| \cdot \|T^{-1}\|)$, где нижняя грань берется по всем изоморфизмам $T: X \to Y$. Если X и Y не изоморфны, то полагаем $d(X, Y) = \infty$.

Теорема 3. *Если* X *не рефлексивно и* $r(\Gamma) \leqslant 1 - \delta$ $(\delta > 0)$ *для каждого собственного подпространства* $\Gamma \subset X^*$, *то*

$$d(X, [F] \oplus \pi(X)) \geqslant \frac{1}{1-\delta}$$

для каждого $F \in X^{**} \setminus \pi(X)$.

Доказательство. Зафиксируем $F \in X^{**} \setminus \pi(X)$ и положим $Y = [F] \oplus \pi(X)$; $G = \pi_{X^*}(X^*)|_Y \subset Y^*$. Мы обозначаем $\mathcal{F}|_Y$ сужение функционала $\mathcal{F} \subset X^{***}$ на подпространство $Y \subset X^{**}$. Покажем, что G — собственное подпространство Y^* и $r(G) = 1$. Действительно, по теореме Хана — Банаха существует такой функционал $\mathcal{F} \in X^{***}$, что $\mathcal{F}(F) = 1$ и $\mathcal{F}(\pi(x)) = 0$ для всех $x \in X$. Тогда $y^* = \mathcal{F}|_Y \in Y^* \setminus G$ и тем самым $G \neq Y^*$. Для произвольного $y \in Y$ имеем

$$1 = \sup_{x^* \in X^*} \frac{|y(x^*)|}{\|x^*\| \cdot \|y\|} = \sup_{x^* \in X^*} \frac{|y(\pi_{X^*}(x^*)|Y)|}{\|\pi_{X^*}(x^*)|Y\| \cdot \|y\|} =$$

$$= \sup_{g \in G} \frac{|g(y)|}{\|g\| \cdot \|y\|}$$

и, следовательно, $r(G)=1$. Пусть теперь $T: X \to Y$ — произвольный изоморфизм. Воспользовавшись определением сопряженного оператора и равенством $\|T\| = \|T^*\|$, получим

$$r(T^*(G)) = \inf_{x \in X} \sup_{f \in T^*(G)} \frac{|(f, x)|}{\|f\| \cdot \|x\|} = \inf_{y \in Y} \sup_{g \in G} \frac{|(T^*(g), T^{-1}(y))|}{\|T^*(g)\| \cdot \|T^{-1}(y)\|} =$$

$$= \inf_{y \in Y} \sup_{g \in G} \frac{|(g, y)|}{\|T^*(g)\| \cdot \|T^{-1}(y)\|} \geqslant \frac{r(G)}{\|T\| \cdot \|T^{-1}\|}.$$

Так как $r(G)=1$ и по условию теоремы $r(T^*(G)) \leqslant 1-\delta$, то для любого изоморфизма $T: X \to Y$ $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \geqslant (1-\delta)^{-1}$. Значит, $d(X, Y) \geqslant (1-\delta)^{-1}$ и теорема доказана.

Из теоремы 3 вытекает следующий известный факт [1].

Следствие 4. $d(c_0, c) \geqslant 2$.

Действительно, по теореме 2 (так как естественный базис пространства c_0 безусловный, натягивающий и монотонный) $r(\Gamma) \leqslant 1/2$ для любого собственного подпространства $\Gamma \subset c_0^* = l_1$. Очевидно, для функционала $F = (1, 1, 1, \ldots) \in l_\infty \setminus \pi(c_0)$ пространство $Y = [F] \oplus \pi(c_0)$ изометрично c. В силу теоремы 3 $d(c_0, Y) = d(c_0, c) \geqslant 2$.

Непосредственно из теорем 2 и 3 получаем

Следствие 5. *Если X — не рефлексивное пространство с безусловным натягивающим базисом, то существует такая эквивалентная норма на X, что в новой норме $d(X, [F] \oplus \pi(X)) \geqslant 2$ для каждого $F \in X^{**} \setminus \pi(X)$.*

Теперь мы применим изложенные выше результаты для доказательства некоторых свойств пространства Джеймса. Определение пространства Джеймса J и его основные свойства (см., например [5, с. 123]).

Теорема 4. *Для любого $\varepsilon > 0$ на пространстве J существует такая эквивалентная норма $|||\cdot|||$, что в новой норме $r_{|||\cdot|||}(\Gamma) \leqslant 1/2 + \varepsilon$ для каждого собственного подпространства $\Gamma \subset J^*$.*

Доказательство. Известно [5, с. 123], что естественные орты образуют монотонный натягивающий базис J. Для данного $\varepsilon > 0$ определим на J новую норму, полагая для каждого $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in J$;

$$|||x||| = (\|x\|^2 + A \cdot \|x\|_{c_0}^2)^{1/2},$$

где $\|x\|_{c_0} = \sup_i |x_i|$ и $A \geqslant \frac{2-\varepsilon(1+\varepsilon)}{\varepsilon(1+\varepsilon)}$. Нетрудно видеть, что $|||\cdot|||$ — норма на J, эквивалентная исходной, и в новой норме базис по-прежнему монотонен. Теперь для каждого $h = 1, 2, \ldots$ оценим норму $|||T_h|||$. Для фиксированного h, произвольного $x \in J$ и $\sigma = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_m)$ рассмотрим два возможных случая:

1) существует такое $1 \leqslant k \leqslant m$, что $i_k \leqslant h \leqslant i_{k+1}$;
2) $i_m < h$ либо $i_1 > h$.

В первом случае

$$p_\sigma^2(T_h(x)) = (-x_{i_1} - x_{i_m})^2 + \sum_{j=1}^{k-1}(-x_{i_{j+1}} + x_{i_j})^2 +$$

$$+ (x_{i_{k+1}} + x_{i_k})^2 + \sum_{j=k+1}^{m-1}(x_{i_{j+1}} - x_{i_j})^2 = p_\sigma^2(x) +$$

$$+ 4(|x_{i_1}| \cdot |x_{i_m}| + |x_{i_{k+1}}| \cdot |x_{i_k}|) \leqslant p_\sigma^2(x) + 8\|x\|_{c_0}^2.$$

Во втором случае, как нетрудно видеть, $p_\sigma^2(T_h(x)) = p_\sigma^2(x)$. Следовательно, для любого $x \in J$

$$\|T_h(x)\|^2 = \operatorname{snp}_\sigma p_\sigma^2(T_h(x)) \leqslant \sup_\rho p_\sigma^2(x) + 8\|x\|_{c_0}^2 =$$

$$= \|x\|^2 + 8\|x\|_{c_0}^2.$$

Так как, очевидно, $\|x\| \geqslant \|x\|_{c_0}$, то для каждого $x \in J$ и $h = 1, 2 \ldots$ имеем

$$\frac{|||T_h(x)|||^2}{|||x|||^2} = \frac{\|T_h(x)\|^2 + A\|x\|_{c_0}^2}{|||x|||^2} \leqslant \frac{\|x\|^2 + 8\|x\|_{c_0}^2 + A\|x\|_{c_9}^2}{|||x|||^2} =$$

$$= \frac{|||x|||^2 + 8\|x\|_{c_0}^2}{|||x|||^2} = 1 + \frac{8\|x\|_{c_9}^2}{\|x\|^2 + A\|x\|_{c_0}^2} \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \frac{8}{1+A} \leqslant (1+2\varepsilon)^2.$$

Таким образом, $|||T_h||| \leqslant 1 + 2\varepsilon$ для всех $h = 1, 2 \ldots$ и в силу леммы $r_{|||\cdot|||}(\Gamma) \leqslant < {}^1/_2 + \varepsilon$ для каждого собственного подпространства $\Gamma \subset J^*$.

Хотя в естественной норме пространство J изометрично своему второму сопряженному, но так как J имеет коразмерность 1 в J^{**}, из теорем 3 и 4 получаем

Следствие 6. *Для любого $\varepsilon > 0$ на J существует такая эквивалентная норма, что в новой норме $d(J, J^{**}) \geqslant 2 - \varepsilon$.*

Отметим также, что в естественной норме на J существует проектор единичной нормы из J^{**} на $\pi(J)$. Однако справедливо следующее

Следствие 7. *Для любого $\varepsilon > 0$ на J существует такая эквивалентная норма $|||\cdot|||$, что в новой норме не существует проектора из J^{**} на $\pi(J)$ с нормой $|||P||| < 2 - \varepsilon$.*

Доказательство. Для заданного $\varepsilon > 0$ введем на J новую норму как в теореме 4 $\left(\text{заменяя там } \varepsilon \text{ на } \varepsilon^1 = \frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}\right)$. Пусть P — проектор из J^{**} на $\pi(J)$ с нормой $|||P||| < 2 - \varepsilon$.

Тогда для $\Gamma = F^{-1}(0)$, где $F \in \operatorname{Ker} P$:

$$r(\Gamma) = \frac{1}{|||P|||} > \frac{1}{2-\varepsilon} = \frac{1}{2} + \varepsilon^1,$$

что противоречит теореме 4.

И, наконец, отметим, что, подобно следствию 3, выполняется

Следствие 8. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *на* J *существует такая эквивалентная норма, что в новой норме каждый не натягивающий базис* J *имеет норму* $\nu_{\{x_k\}} \geqslant 2 - \varepsilon$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гурарий В. И. Геометрические свойства некоторых пространств последовательностей и решение одной задачи Банаха.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 2, Харьков, 1966, с. 86—97.
2. Davis W. J. and Lindenstrauss J. On total nonnorming subspaces.— «Pros. Amer. Math. Soc.», 1971, vol. 315, p. 109—111.
3. Diximier J. Sur un theoreme de Banach.— «Duke Math. J.», 1948, vol. 15, p. 1057—1071.
4. Van Dulst D. and Singer I. On Kadeo — Klee norms on Banach spaces.— «Studia Math.», 1975, vol. 54, p. 205—211.
5. Дэй М. М. Нормированные линейные пространства.— М., ИЛ, 1961. 232 с.
6. Singer I. Weak bases in conjugate Banach spaces. II.— «Rev. math. pur. at. appl.», 1963, vol. 8, № 4, p. 575—585.

Поступила 8 декабря 1975 г.