

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АРТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЧЕЛОВЕКА

О.К. Зенин, Н.Н. Кизилова, Е.Н. Филиппова
Донецкий медицинский университет, Украина
Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразина, Украина
nnk@bk.ru

На основе результатов детальных морфометрических исследований системных и внутриорганных артерий человека построена обобщенная модель, содержащая порядка тысячи внеорганных артерий. Топология и геометрия внутриорганных и внутримышечных артериальных русел изучены на коррозионных препаратах. Путем статистического анализа выявлены закономерности строения артериальных русел. Разработан алгоритм, позволяющий генерировать внутриорганные русла, основываясь на параметрах питающей артерии органа. Построена математическая модель течения крови в артерии как суммы стационарного и волнового течений вязкой жидкости в податливой трубке. В местах бифуркаций сосудов заданы условия непрерывности. В результате получен программный комплекс, позволяющий в реальном времени генерировать модель артериального русла пациента и проводить расчеты давлений и скорости кровотока, распространения и отражения пульсовых волн, планировать хирургические операции, индивидуальную терапию и реабилитационные мероприятия.

Построение математической модели сердечно-сосудистой системы человека, которая позволяла бы проводить расчеты параметров гемодинамики, моделировать патологии кровообращения, нарушения микроциркуляции, рассчитывать результат сосудистых операций и воздействие терапии, составляет актуальную задачу и относится к приоритетному международному проекту «Virtual physiological human». Использование кластеров и техники параллельных вычислений делает возможным проводить в реальном времени расчеты на моделях, насчитывающих сотни тысяч кровеносных сосудов.

Первая модель системного артериального русла, содержащая 55 артерий, описываемых как вязкоупругие трубки с заданными длинами L , диаметрами d , толщинами h и модулями упругости E стенки была предложена в 1969 г. [1]. Морфометрические данные были получены на трупном материале и соответствуют состоянию максимальной вазодилатации. Дистальные трубки в модели оканчивались терминальными элементами, моделирующими внутриорганные русла. В качестве терминальных элементов использовалась нульмерная модель упругой камеры Франка (Windkessel element), параметры которой подбирались таким образом, чтобы расчетные кривые давления $P(t)$ и скорости $U(t)$ кровотока соответствовали результатам измерений *in vivo*. Впоследствии эта модель была дополнена до 87 системных артерий, а в качестве терминальных элементов было предложено использовать бинарные деревья [2], в которых диаметры трубок в бифуркациях соответствовали оптимальным ветвящимся руслам [3]. Построенная модель хорошо описывает особенности кровотока в аорте [4].

В данной работе представлены результаты детальных измерений параметров внеорганных артерий. Один массив данных был получен на 5 трупах в ходе вскрытия (порядка 800-900 артерий в каждом случае). Измерялись значения d , L , h отдельных артериальных сегментов. Второй массив был получен с помощью УЗИ на пяти добровольцах (78 артерий в каждом случае). Измерялись значения d , L и фиксировались кривые $U(t)$. Кроме этого, были проведены морфометрические измерения на коррозионных препаратах внутренних органов и мышц. В каждом случае построен граф внутриорганного русла и измерены значения d , L каждого сегмента (ребра графа).

Статистический анализ данных выявил достоверные закономерности, описывающие строение внеорганных и внутриорганных русел. Результаты исследования русла коронарных артерий были опубликованы ранее [5]. Зависимости между диаметрами материнской d_0 дочерних $d_{1,2}$ артерий в бифуркациях в среднем близки к оптимальным, соответствующим закону Мюррея $d_0^3 = d_1^3 + d_2^3$. Во всех случаях обнаружена зависимость $d_0(\min\{d_1, d_2\})$. Коэффициенты в регрессионных зависимостях $d_0(\min\{d_1, d_2\})$ и $L_0(d_0)$ различны для разных органов. На основе полученных зависимостей был предложен алгоритм генерации моделей внутриорганных русел, которые можно использовать в качестве терминальных элементов в модели русла системных артерий. Для русел, содержащих несколько или множество петель (анастомозов), также предложены соответствующие алгоритмы. Модели, построенные на основе данных первого и второго массивов, изображены на рис. 1,2 соответственно.

Расчеты коэффициентов $G = (Y_0 - Y_1 - Y_2)/(Y_0 + Y_1 + Y_2)$ отражения волн в бифуркациях сосудов, где $Y_{0,1,2}$ – волновые проводимости материнского и дочерних сосудов, показали, что в состоянии максимальной дилатации (первый массив данных) на большинстве ветвлений $G \sim 0$, то есть артериальное дерево является идеальным ветвящимся волноводом. У всех испытуемых *in vivo* коэффициенты отражения волн сильно варьировали, принимая значения из диапазона $G \in [-0.28; 0.61]$, однако средние для каждого испытуемого значения G близки к нулю, то есть положительные и

отрицательные отражения волн взаимно компенсируются. Следует заметить, что отрицательное отражение волн обеспечивает подсосывающий эффект и свойственно для внутриорганных русел, которые, таким образом, не являются пассивными элементами сопротивления кровотоку и распространению волн.

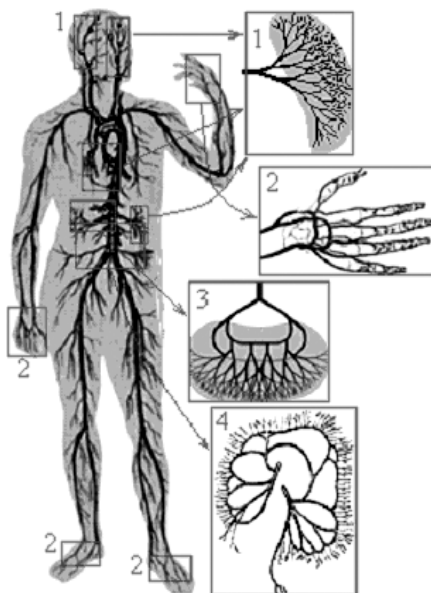


Рис.1. Модель из 850 трубок с терминальными элементами в виде бинарного дерева (1), систем с 1-2 (2,3) и более (4) петлями.

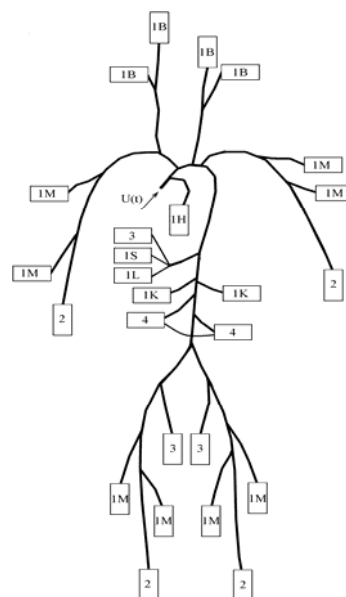


Рис.2. Модель из 78 трубок с соответствующими терминальными элементами: В – мозг, S – селезенка, I – кишечник, К – почки, М - мышцы.

Численные расчеты проводились на основе одномерной нелинейной модели течения вязкой жидкости в упругой трубке (обобщенная модель Эйлера). На бифуркациях трубок задавались условия непрерывности давления и расхода. Решение задачи для каждой трубки проводилось методом характеристик. Расчеты проводились на кластере (Imperial College London, UK) в рамках совместного проекта. Для сопоставления проводились аналогичные расчеты на основе двумерной линеаризованной модели, описывающей распространение волн в вязкоупругих трубках.

1. Westerhof N., Bosman F., DeVries C., Noordegraaf A. Analog studies of the human systemic arterial tree, *J. Biomech.*, 1969, 2, p.121-143.
2. Olufsen M.S. Structured tree outflow condition for blood flow in larger systemic arteries, *Am.J.Physiol.*, 1999, 276(1), p.257-268.
3. Kizilova N.N. Computational approach to optimal transport network construction in biomechanics. // *Lecture Notes in Computer Science*, 2004, 3044, p.476-485.
4. Ottesen J.T., Olufsen M.S., Larsen J.K. *Applied mathematical models in human physiology*, Roskilde Univ. Press, 2003.
5. Zenin O.K., Kizilova N.N., Philippova E.N. *Studies on the Structure of Human Coronary Vasculature*, *Biophysics*, 2007, 52(5), p.499–503.

MATHEMATICAL MODELING OF HUMAN ARTERIAL SYSTEM

Zenin O.K., Kizilova N.N., Philippova E.N.
 Donetsk Medical University, Ukraine
 V.N.Karazin Kharkov National University, Ukraine

A general model containing some thousand extraorgan arteries based on results of the detailed morphometric study of human systemic and intraorgan arteries is built. Topology and geometry of the intraorgan arterial vasculatures are studied on the plastic casts. Statistical analysis revealed a number of regularities in construction of the arterial vasculatures. A mathematical algorithm allowing generation of the intraorgan bed basing on the parameters of the corresponding feeding artery has been elaborated. A mathematical model of the blood flow in an artery as a sum of the steady and pulsatile viscous flows in a compliant tube has been elaborated. The continuity conditions have been applied at the arterial bifurcations. The developed mathematical model allows the real time generation of the individual arterial vasculature of the patient and carrying out numerical computations of the pressure and flow patterns and the pulse wave propagation and reflection, the surgical operation planning, individual therapy and rehabilitation assignment.