УДК.519.9

М. Я. ЖИТОМИРСКИЙ

ИНВАРИАНТНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА РЯДОВ, ЛИНЕЙНО-ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫМ

Обозначим через $K[n, p]$ пространство формальных степенных рядов от n переменных без свободных членов с коэффициентами из $\mathbf{C}^p$.

Через $G_K[n, p]$ обозначим группу контактных преобразований в $K^n \times K^p$ с невырожденным линейным приближением, действующую в $K[n, p]$.

Пусть $G \subset G_K[n, p]$ — некоторая подгруппа $G_K[n, p]$, $G_0 \subset G$ — подгруппа G, состоящая из формальных рядов с единичным линейным приближением. Предположим, что для группы G_0 справедлива теорема об инвариантной нормальной форме [1, с. 29].

Зафиксируем линейное преобразование $T \in G$. Множество тех рядов $F \in K[n, p]$, для которых ряд $T.F$ имеет вещественные коэффициенты, обозначим $M_T(G)$. Множество преобразований $\Phi \in G_0$, сопряженных с преобразованием, у которого все коэффициенты вещественны, посредством линейного преобразования T будем обозначать $N_T(G)$. Тем самым, $N_T(G) = \{\Phi \in G_0, \overline{T.\Phi.T^{-1}} = T.\Phi.T^{-1}\}$.

Ответим на вопрос: при каких условиях инвариантная нормальная форма ряда $F \in M_T(G)$ относительно действия группы G_0 принадлежит $M_T(G)$, а преобразование к ней можно выбрать из $N_T(G)$?

Обозначим через $K_i[n, p]$ пространство рядов из $K[n, p]$, каждая координата которых является полиномом степени не выше i.

Пусть $R = T^{-1}\overline{T}$ (под произведением понимается результат группового действия в G). Определим оператор $W: K[n, p] \to K[n, p]$, $WF = R.\overline{F}\ (F \in K[n, p])$.

Зафиксируем в $K_i[n, p]$ скалярные произведения: $(F, H) = \sum_{|\alpha| \geq 1} \sum_{j=1}^{n} F_{j,\alpha} \cdot \overline{H}_{j,\alpha} \cdot \alpha!$ Здесь (α) — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$; $\alpha! = \alpha_1 \cdots \alpha_n$; $F = \{\sum_{|\alpha| \geq 1} F_{j,\alpha} x^\alpha\}_{j=1}^{n}$; $H = \{\sum_{|\alpha| \geq 1} H_{j,\alpha} x^\alpha\}_{j=1}^{n}$.

Теорема *Пусть ограничения оператора W на $K_i[n, p]$ унитарные операторы для $i = 1, 2, \ldots$. Тогда, если $F \in M_T(G)$, инвариантная нормальная форма F относительно действия группы G_0 также принадлежит $M_T(G)$, а преобразование к ней можно выбрать из $N_T(G)$.*

Заметим, что множество $M_T(G)$ совпадает с множеством неподвижных точек оператора W.

Введем оператор V: $G_0 \to G_0$, $V(g) = R.\bar{g}.R^{-1}$ (нетрудно проверить, что V действительно переводит G_0 в G_0). Тогда, как легко видеть, множество неподвижных точек V совпадает с $N_T(G)$.

Операторы W и V в некотором смысле согласованы.

Лемма 1. Пусть $F \in M_T(G)$, $g \in G_0$. Тогда $W(g.F) = (Vg).F$.

Действительно, $W(g.F) = R.\overline{g}.\overline{F} = R.\overline{g}.\overline{R}.F = (Vg).F$, поскольку $\overline{R} = R^{-1}$. Мы использовали равенство $WF = F$.

Введем еще несколько обозначений.

Пусть $P_i : K[n, p] \to K_i[n, p]$ — естественные проекторы; $G_0(F, H) = \{g \in G_0, g.F = H\}$; $G_{0,i} = (F, H) = \{g \in G_0;\ P_i g.F = P_i H\}$.

Лемма 2. 1) *Пусть $i \geqslant 1$, $P_i F$, $P_i H \in M_T(G)$, $G_{0,i}(F, H) \neq \varnothing$. Тогда $G_{0,i}(F, H) \cap N_T(G) \neq \varnothing$.*

2) *Пусть F, $H \in M_T(G)$, $G_0(F, H) = \varnothing$. Тогда $G_0(F, H) \cap N_T(G) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Рассмотрим ряд $P_i T.F$. Покажем, что он имеет вещественные коэффициенты. Действительно, $\overline{P_i T.F} = P_i\overline{T}.\overline{F} = \overline{T}.P_i\overline{F}$ (последнее равенство проверяется непосредственно). Поскольку $P_i\overline{F} = \overline{R}.P_i F$, то $\overline{P_i T.F} = \overline{T}.\overline{R}.P_i F = T.P_i F = P_i T.F$. Аналогично, ряд $P_i T.H$ — вещественный. Пусть $g \in G_{0,i}(F, H)$. Тогда $g_1 = T.g.T^{-1}$ принадлежит $G_{0,i}(T.F, T.H)$. Но тогда, как это следует из доказательства предложения 1.14 [1, с. 24], существует преобразование из $G_{0,i}(T.F, T.H)$ с вещественными коэффициентами. Обозначим его g_2. Пусть $g_3 = T^{-1}.g_2 T$. Покажем, что $g_3 \in G_i(F, H) \cap N_T(G)$. Действительно, $P_i g_3.F = P_i T^{-1}.g_2.T.F = T^{-1} P_i g_2.T.F = T^{-1}.P_i T.H = P_i H$, т. е. $g_3 \in G_i(F, H)$. С другой стороны, $Vg_3 = R.\overline{g}_3.R^{-1} = (\overline{T}^{-1}\overline{T}).\ \overline{T}^{-1}.g_2.\overline{(\overline{T}T^{-1}T)} = T^{-1}.g_2.T = g_3$, т. е. $g_3 \in N_T(G)$. Первое утверждение леммы доказано. Второе утверждение доказывается аналогично.

Доказательство теоремы.

Допустим $F \in M_T(G)$, H — инвариантная нормальная форма ряда F. Для того, чтобы доказать заключение теоремы, достаточно доказать следующее утверждение: для любого $j \geqslant 1$ существует ряд $H_j \in M_T(G)$, эквивалентный F и такой, что $P_j H_j = P_j H$.

В самом деле, если это утверждение будет доказано, то справедлива цепочка равенств $P_j WH = WP_j H = WP_j H_j = P_j WH_j = P_j H_j = P_j H$, откуда следует, что $H \in M_T(G)$. Преобразование же от $F \in M_T(G)$ и $H \in M_T(G)$ можно выбрать из $N_T(G)$ согласно лемме 2.

Приведенное утверждение будем доказывать индукцией по j. При $j=1$ оно тривиально — можно взять $H_1 = F$. Предположим теперь, что существует ряд $H_{i-1} \in M_T(G)$, эквивалентный ряду H и такой, что $P_{i-1}H_{i-1} = P_{i-1}H$. Необходимо показать существование такого ряда $H_i \in M_T(G)$, эквивалентного H_{i-1} и такого, что $P_iH_i = P_iH$. Предположим $U: \operatorname{Ker} P_{i-1}S(P_{i-1}H_{i-1}) \to K_i[n, p]$. $U\varphi = P_iS(P_{i-1}H_{i-1})\varphi$. Здесь $S(f)$ $(f \in K[n, p])$ — линейный оператор из алгебры Ли группы G_0 в $K[n, p]$, являющийся производной отображения $g \to g.f$ в единице группы G_0. Тогда $P_iH_{i-1} = h_1 + h_2$, где $h_1 \in \operatorname{Ker} U^*$, $h_2 \in \operatorname{Im} U$. Пусть $h_2 = U\varphi$, $\varphi \in \operatorname{Ker} P_{i-1}S(P_{i-1}H_{i-1})$.

Докажем следующее равенство: $Wh_2 = P_i(V \exp\varphi).H_{i-1} - P_iH_{i-1}$ **(1)**.

Поскольку $\varphi \in \operatorname{Ker} P_{i-1}S(P_{i-1}H_{i-1})$, то $P_i(\exp\varphi.P_{i-1}H_{i-1} - P_{i-1}H_{i-1}) = P_iS(P_{i-1}H_{i-1})\varphi$ **(2)** (см. [3], лемма 5.3, с. 17 предложение 1.9, с. 22).

Используя равенство (2) и утверждение леммы 1, имеем $Wh_2 = WP_iS(P_{i-1}H_{i-1})\varphi = WP_i(\exp\varphi.H_{i-1} - H_{i-1}) = P_iW\exp\varphi.H_{i-1} - P_iWH_{i-1} = P_iW\exp\varphi.H_{i-1} - P_iH_{i-1} = P_i(V\exp\varphi).H_{i-1} - P_iH_{i-1}$.

Тем самым, равенство (1) доказано.

Покажем, что элемент $V\exp\varphi$ принадлежит стационарной подгруппе ряда $P_{i-1}H_{i-1}$, т. е., что $P_{i-1}(V\exp\varphi).H_{i-1} = P_{i-1}H_{i-1}$ (3). Действительно, используя снова утверждение леммы (1), получим $P_{i-1}(V\exp\varphi).H_{i-1} = P_{i-1}W\exp\varphi.H_{i-1} = WP_{i-1}\exp\varphi.H_{i-1} = P_{i-1}H_{i-1}$.

Из равенства (3) следует, что $V\exp\varphi = \exp\mu$, где $\mu \in \operatorname{Ker} P_{i-1}S(P_{i-1}H_{i-1})$. Возвращаясь к равенству (1), получим $Wh_2 = P_iS(P_{i-1}H_{i-1})\mu$, т. е. $Wh_2 \in \operatorname{Im} U$.

Поскольку ограничение W на $K_i[n, p]$ — унитарный оператор, то $(Wh_1, Wh_2) = 0$, поэтому $Wh_1 \in \operatorname{Ker} U^*$.

Заметим теперь, что $P_iH_{i-1} = h_1 + h_2 = WP_iH_{i-1} = Wh_1 + Wh_2$, откуда $h_1 \in M_T(G)$, $h_2 \in M_T(G)$.

Пусть $R_0 = (\exp(-\varphi)).H_{i-1}$. Тогда $P_iR_0 = P_{i-1}H_{i-1} + h_1$, т. е. $P_iR_0 \in M_T(G)$. Согласно лемме 2, существует $\xi \in N_T(G)$, такое, что $P_iR_0 = P_i\xi.H_{i-1}$. Пусть $H_i = \xi.H_{i-1}$. Тогда ряд H_i эквивалентен ряду H_{i-1}, $P_iH_i = P_iR_0 = P_{i-1}H_{i-1} + h_1 = P_iH$. Кроме того, $H_i \in M_T(G)$, поскольку $WH_i = W(\xi.H_{i-1}) = (V\xi).H_{i-1} = \xi.H_{i-1} = H_i$. Теорема доказана.

В примерах рассмотрим следующие подгруппы группы контактных преобразований: 1) $G_r = \{\Phi(x), y\}$, $\Phi \in K[n, n]$, $\Phi'(0) = E$; 2) $G_l = \{x, \psi(y)\}$, $\psi \in K[p, p]$, $\psi'(0) = E$; 3) $G_{l,r} = \{\Phi(x), \psi(y)\}$, $\Phi \in K[n, n]$, $\Phi'(0) = E$, $\psi \in K[p, p]$, $\psi'(0) = E$; 4) $G_t = \{\Phi^{-1}(x), (\Phi')^{-1}y\}$, $\Phi \in K[n, n]$, $\Phi'(0) = E$; 5) $G_c = \{\Phi(x), \Phi(y)\}$, $\Phi \in K[n, n]$, $\Phi'(0) = E$; 6) $G_p = \{\Phi^{-1}(x), (\Phi')^t y\}$, $\Phi \in K[n, n]$, $\Phi'(0) = E$; 7) $G_{oR} = \{\Phi^{-1}(x), h(y)(\Phi')^{-1}\}$, $\Phi \in K[n, n]$, $\Phi'(0) = E$, $h \in K[n, 1]$, $h(y)y = y + \cdots$ Здесь E — единичная матрица, t — значок трансонирования. Группы G_r, G_l и G_{lr} действуют в $K[n, p]$, остальные — в $K[n, n]$. Группы G_r, G_l и $G_{l,r}$ соответствуют подстановкам ряда в ряд, G_c есть диагональ группы $G_{l,r}$. Формальная замена переменных в дифференциальных уравнениях порождает группу G_t, в дифференциальных формах — группу G_o. Два элемента $K[n, n]$ из одной орбиты группы G_{oR} являются орбитально эквивалентными.

Применяя приведенную теорему, для этих групп можно получить следующие результаты:

a) пусть G_0 — одна из групп G_l или G_r, $F \in K[n, p]$ и линейно-эквивалентен ряду с вещественными коэффициентами посредством преобразования с матрицей T. Пусть $R = T^{-1}\overline{T}$. Тогда, если R — унитарная матрица, то инвариантная нормальная форма ряда F также линейно-эквивалентна вещественному ряду с помощью линейного преобразования с матрицей T, а преобразование Φ к ней можно выбрать таким, чтобы $Tx.\Phi = H.Tx$, где H — некоторое вещественное преобразование;

b) пусть $G_0 = G_{l,r}$, $F \in K[n, p]$ и ряд F линейно-эквивалентен вещественному ряду посредством линейного преобразования с $\{T_1x, T_2y\}$. Пусть $R_1 = T_1^{-1}\overline{T}_1$; $R_2 = T_2^{-1}\overline{T}_2$. Заключение теоремы выполнено, если R_1 и R_2 — унитарные матрицы;

c) пусть $G_0 = G_t$ или $G_0 = G_c$, $F \in K[n, n]$ и ряд F линейно-эквивалентен вещественному ряду посредством линейного преобразования с матрицей T. Заключение теоремы выполнено, если матрица линейного приближения ряда F имеет нормальную форму Жордана.

Этот результат продолжает результат работы [2];

d) пусть $G_0 = G_p$, $F \in K[n, n]$ и линейная часть приведена каноническому виду [3]. Если ряд F линейно-эквивалентен ряду с вещественными коэффициентами, то имеет место заключение оказанной теоремы.

e) пусть $G_0 = G_{oR}$, $F \in K[n, n]$ и ряд F линейно-эквивалентен ряду с вещественными коэффициентами. Заключение приведенной выше теоремы справедливо, если линейное приближение ряда F имеет нормальную форму Жордана.

Список литературы: 1. *Белицкий Г. Р.* Нормальные формы, инварианты и локальные отображения.— К.: Наук. думка, 1979.— 173 с. 2. *Брюно А. Д.* Нормальная форма вещественных дифференциальных уравнений.— Мат. заметки, 1975, 18, № 2, с. 227—241. 3. *Житомирский М. Я.* Об эквивалентности дифференциальных форм.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1981, вып. 35, с. 35—41.

Поступила в редколлегию 11.01.82