

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра фундаментальної математики

Кваліфікаційна робота

освітньо-кваліфікаційний рівень: *магістр*

на тему *«Деякі нелінійні диференціальні
рівняння з частинними похідними у просторі
КОПОЛІНОМІВ»*

Виконав: студент групи М162 VI курсу
(другий магістерський рівень),
спеціальності 111
“Математика”
освітньо-професійної програми
“Математика”
Богославська В.В.

Керівник: кандидат фіз.-мат. наук,
доцент кафедри
фундаментальної математики
Гефтер С.Л.

Рецензент: доцент кафедри
прикладної математики
Макаров О.А.

Анотації

Богославська В.В. Деякі нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними у просторі кополіномів.

Робота присвячена вивченню нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними у кільці $F[x]'[[t]]$ формальних степеневих рядів з кополіноміальними коефіцієнтами. З операцією множення кополіномів векторний простір $F[x]'$ розглядається як комутативне кільце. Результати роботи можливо будуть цікавими для теорії нелінійних диференціальних рівнянь.

Bohoslavska V.V. Differential equations with partial derivatives in the space of copolynomials.

This work is dedicated to study of nonlinear partial differential equations within the ring $F[x]'[[t]]$ of formal power series with copolynomial coefficients. In this context, F represents a field (such as real or complex numbers), x is a formal variable, and t is an independent time variable.

With the multiplication of copolynomials, the vector space $F[x]'$ is considered as a commutative ring, that is, the multiplication of elements in this space is well-defined and follows algebraic rules.

This findings hold potential significance for advancing the theory of nonlinear differential equations, providing a framework for understanding solutions in terms of formal power series.

Зміст

Анотації	2
Вступ	4
1 Попередні відомості	5
2 Множення кополіномів	11
3 Деякі нелінійні еволюційні рівняння з частинними похідними у кіль- ці $F[x]'[[t]]$	14
3.1 Квазілінійне рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} = P(u)$	14
3.2 Нелінійне рівняння першого порядку	16
3.3 Нелінійне рівняння m -го порядку	21
4 Формальний степенний ряд від кополінома	26
Список використаних джерел	28

Вступ

В класичній математичній фізиці досліджуються лінійні диференціальні рівняння з частинними похідними (див. [3]). Розв'язки різних задач для лінійних рівнянь можна шукати в різних класах, як звичайних, так і узагальнених функцій. При вивченні нелінійних рівнянь у просторах узагальнених функцій з'являються суттєві проблеми, що пов'язані з проблемою множення узагальнених функцій. Як відомо, операція множення в класичних просторах узагальнених функцій не є коректно визначеною. Французький математик Жан-Франсуа Коломбо побудував нову теорію узагальнених функцій, яка дала можливість перемножати узагальнені функції (див. книгу [5]). При цьому він суттєво розширив простір об'єктів, які він назвав новими узагальненими функціями. Є і деякі інші підходи до множення узагальнених функцій (див. [6]).

У представленій дипломній роботі розглядається суто алгебраїчний підхід до вивчення нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Алгебраїчним аналогом простору узагальнених функцій є спряжений простір до кільця поліномів з коефіцієнтами у довільному полі нульової характеристики. У роботах Гефтера С.Л., Півня А.Л. та Стулової Т.Є. (див. [1], [2]) такі алгебраїчні аналоги узагальнених функцій були названі формальними узагальненими функціями, або кополіномами. Введена Гефтером С.Л. та Півнем А.Л. (див. [7]) операція множення кополіномів дає чисто алгебраїчну можливість вивчення деяких нелінійних рівнянь з частковими похідними.

Основними результатами дипломної роботи є теореми 4.2, 4.3 про існування та єдиність існування розв'язку першого та m -го порядку. Крім того, у роботі наведені змістовні приклади нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, що будують загальну теорію (див. приклади 4.4, 4.5, 4.7).

Розділ 1

Попередні відомості

Нехай F є довільним полем нульової характеристики, і $F[x]$ – простір поліномів з коефіцієнтами з поля F .

Означення 1.1. *Кополіномом над полем F будемо називати лінійний функціонал у векторному просторі $F[x]$.*

Всі кополіноми створюють новий векторний простір, а саме, спряжений простір до простору $F[x]$. Будемо його позначати за $F[x]'$.

Якщо $T \in F[x]'$ і $p \in F[x]$, то для значення лінійного функціоналу T на векторі p будемо використовувати позначення (T, p) , або $(T(x), p(x))$.

Природнім чином вводиться операція множення кополінома на поліном.

Означення 1.2. Нехай $T \in F[x]'$ і $q \in F[x]$. Покладемо $(qT, p) = (T, qp)$, $p \in F[x]$.

Очевидно, що $qT \in F[x]'$. Таким чином векторний простір $F[x]'$ над полем F є водночас і модулем над простором поліномів $F[x]$.

Означення 1.3. Похідна T' кополінома $T \in F[x]'$ визначається як і у класичній ситуації, формулою: $(T', p) = -(T, p')$, $p \in F[x]$.

Для похідної k -го порядку маємо: $(T^{(k)}, p) = (-1)^k (T, p^{(k)})$, $p \in F[x]$.

$$\text{Тому } (T^{(k)}, p) = 0, \text{ якщо } k > \deg p. \quad (1.1)$$

Для добутку кополінома на поліном є правильною звичайна формула Лейбниця.

Лема 1.1. Нехай $T \in F[x]'$ і $p \in F[x]$. Тоді $(pT)' = p'T + pT'$.

Доведення. Для довільного полінома $q \in F[x]$ маємо: $((pT)', q) = -(pT, q') = -(T, pq') = -(T, (pq)' - qp') = -(T, (pq)') + (T, p'q) = (T', pq) + (p'T, q) = (pT', q) + (p'T, q) \Rightarrow (pT)' = p'T + pT'$ \square

Теорема 1.1. (КРИТЕРІЙ ІСНУВАННЯ ПЕРВІСНОЇ)

Щоб для кополінома $T \in F[x]'$ існувала первісна необхідно і достатньо, щоб $(T, 1) = 0$.

Доведення. Необхідність: Нехай $S \in F[x]'$ — первісна для T :

$$(T, 1) = (S', 1) = (-1)(S, 1') = (-1)(S, 0) = 0$$

. Достатність: Нехай $S \in F[x]'$.

$$\begin{aligned} (S, 1) &= (S, x') = -(S', x), \\ (S, x) &= \frac{1}{2}(S, (x^2)') = -\frac{1}{2}(S', x^2), \\ &\dots \\ (S, x^n) &= \frac{1}{n+1}(S, (x^{n+1})') = -\frac{1}{n+1}(S', x^{n+1}) \end{aligned}$$

Нехай $T = S'$, тоді

$$\begin{aligned} (S, 1) &= -(T, x), \\ (S, x) &= -\frac{1}{2}(T, x^2), \\ &\dots \\ (S, x^n) &= -\frac{1}{n+1}(T, x^{n+1}), \end{aligned}$$

тобто кополіном S можливо задати через T . Оскільки лінійний функціонал від 0 завжди дорівнює 0, тому має виконуватись наступна умова: $(S, 0) = (S, 1') = -(S', 1) = -(T, 1) = 0$. \square

Розглянемо деякі приклади.

Приклад 1.1. Нехай $\delta : F[x] \rightarrow F$, $(\delta, p) = p(0)$, $p \in F[x]$. Кополіном δ має назву δ -функції. Маємо: $(\delta^{(k)}, p) = (-1)^k(\delta, p^{(k)}) = (-1)^k p^{(k)}(0)$, $p \in F[x]$.

Приклад 1.2. Покажемо, що загальний розв'язок рівняння $xT = 0$ має вигляд $c\delta(x)$, де $c \in F$.

Відмітимо, що кополіном $c\delta(x)$ задовольняє це рівняння. Для будь-якого $p \in F[x]$ маємо $(xT, p) = (T, xp)$. Але за умовою рівняння $xT = 0$, ліва частина рівності дорівнює 0 для будь-якого полінома p . Отже, маємо $(T, xp) = 0$ для всіх $p \in F[x]$. Це означає, що кополіном T діє як нульовий функціонал на усіх поліномах xp , зокрема $(T, x^n) = 0, n > 0$.

Нехай тепер $c = (T, 1)$. Тоді $(T, 1) = (c\delta, 1)$. Тому $(T, x^n) = (c\delta, x^n)$ для всіх $n \geq 0$. Тому $T = c\delta$.

Приклад 1.3. Покажемо, що диференціальне рівняння $xT' = \delta(x)$ має єдиний розв'язок $T = -\delta$.

Оскільки $(x\delta', x^n) = (\delta', x^{n+1}) = -(\delta, (n+1)x^n) = [\text{лінійність}] = -(n+1)(\delta, x^n) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n \geq 0, \\ -1, & \text{якщо } n < 0. \end{cases}$
 $= -(\delta, x^n) = (-\delta, x^n)$ для всіх $n \geq 0$, то $x\delta' = -\delta$, або $x(-\delta)' = \delta$, тобто кополіном $-\delta$ задовольняє розглянуте рівняння.

Нехай тепер $xT' = \delta$. Тоді $(T, 1) = -(T', x) = -(xT', 1) = -(\delta, 1) = (-\delta, 1)$, і $(T, x^n) = -(T', \frac{x^n}{n+1}) = -\frac{1}{n+1}(T', x^{n+1}) = -\frac{1}{n+1}(xT', x^n) = -\frac{1}{n+1}(\delta, x^n) = 0 = (-\delta, x^n)$, якщо $n \geq 1$. Тому $(T, x^n) = (-\delta, x^n)$ для всіх $n \geq 0$, тобто $T = -\delta$.

Приклад 1.4. Покажемо, що диференціальне рівняння $T' = \delta(x)$ не має розв'язків, тобто δ -функція не має первісної як кополіном над полем F .

Доведення. З Теорема 1.1. випливає, що достатньо перевірити дію δ на 1: $(\delta, 1) = 1$. Отже не виконується необхідна умова існування первісної. \square

Приклад 1.5. Покажемо, що диференціальне рівняння $T' = 0$ має тільки нульовий розв'язок. Для будь-якого полінома $p \in F[x]$ $(T', p) = -(T, p') = 0$. Оскільки будь-який поліном має первісну і похідну у просторі, то для будь-якого $q \in F[x]$ виконується $(T, q) = 0$, тому $T = 0$.

Приклад 1.6. Припустимо, що $F = \mathbb{R}$ і $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - це функція, яка є інтегровною за Лебегом така, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x^k f(x)| dx < +\infty, \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

Тоді функція f утворює кополіном:

$$(f, p) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) f(x) dx, \quad p \in \mathbb{R}[x].$$

У цьому випадку, на відміну від класичної теорії, всі кополіноми є регулярними, але ненульова функція f може породжувати нульовий кополіном [1, Розділ 2].

Означення 1.4. Збіжність послідовності $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ до T в $F[x]'$ означає, що для кожного полінома $p \in F[x]$ існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $(T_n, p) = (T, p)$ для $n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$

Теорема 1.2. [1]. Нехай $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ буде послідовністю в F та нехай $T \in F[x]'$. Тоді ряд $\sum_{n=0}^{\infty} B_n T^{(n)}$ збігається в $F[x]'$ та $(\sum_{n=0}^{\infty} B_n T^{(n)})' = \sum_{n=0}^{\infty} B_n T^{(n+1)}$.

Доведення. Розглянемо довільний поліном $p \in F[x]$ та використавши лінійність кополіномів маємо: $(\sum_{n=0}^{\infty} B_n T^{(n)}, p) = \sum_{n=0}^{\infty} (B_n T^{(n)}, p) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (T^{(n)}, p) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (-1)^n (T, p^{(n)})$. Виявиться, що ця сума буде стабільною після певного n , оскільки усі члени ряду стають нульовими для $k > n_0$, де $k = \deg p$.

Тепер покажемо, що $(\sum_{n=0}^{\infty} B_n T^{(n)})' = \sum_{n=0}^{\infty} B_n T^{(n+1)}$.

$$\begin{aligned} \text{Для будь-якого } p \in F[x], ((\sum_{n=0}^{\infty} B_n T^{(n)})', p) &= (-1) (\sum_{n=0}^{\infty} B_n T^{(n)}, p') = \\ &= (-1) \sum_{n=0}^{\infty} B_n (T^{(n)}, p') = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (-1) (T^{(n)}, p') = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (T^{(n+1)}, p) = \\ &= (\sum_{n=0}^{\infty} B_n T^{(n+1)}, p). \end{aligned}$$

□

Теорема 1.3. Ми зауважуємо, що для будь-якого кополінома $T \in F[x]'$

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (T, x^n) \frac{\delta^{(n)}}{n!}. \quad (1.2.)$$

Доведення. З Теорема 1.2, ряд справа виразу (1.2.) збігається в $F[x]'$ та

$$(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (T, x^n) \frac{\delta^{(n)}}{n!}, x^k) = (-1)^k (T, x^k) (\frac{\delta^{(k)}}{k!}, x^k) = (T, x^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

□

Приклад 1.7. [2]. Припустимо, що $F = \mathbb{R}$ і $a \in \mathbb{R}$, де $a > 0$. Покажемо, що в просторі кополіномів сума ряду $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^n \delta^{(n)}$ - це наступний регулярний

кополіном, та

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^n \delta^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} e^{-x/a}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Доведення. Для цього ми зауважуємо, що

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{a}} x^k dx = k! a^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Нехай $p \in \mathbb{R}[x]$ та

$$p(x) = \sum_{k=0}^m \frac{p^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Якщо

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} e^{-x/a}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases},$$

тоді

$$\begin{aligned} (f, p) &= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{a}} p(x) dx = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^m \frac{p^{(k)}(0)}{k!} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{a}} x^k dx = \sum_{k=0}^m a^k p^{(k)}(0) \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^k a^k (\delta^{(k)}, p) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a^k \delta^{(k)}, p \right) \end{aligned}$$

□

Позначимо тепер за $F[x]'[[t]]$ простір формальних рядів зі змінною t з коефіцієнтами з простору $F[x]'$.

Означення 1.5. Для ряду $u(t, x) \in F[x]'[[t]]$, $u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) t^n$, де коефіцієнти $u_n(x)$ є кополіномами, ми вводимо часткові похідні наступним чином:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} n u_n(x) t^{n-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x) t^n$$

.

Введемо поняття зсуву кополінома.

Для будь-якого $h \in F$ та $p \in F[x]$ ми визначимо поліном $p(x+h) \in F[x]$ за допомогою формули Тейлора: $p(x+h) = \sum_{n=0}^m \frac{p^{(n)}(x)}{n!} h^n$, де $m = \deg p$.

Означення 1.6. Для $T \in F[x]'$ ми вводимо кополіном $T(x+h)$ за допомогою виразу $(T(x+h), p) = (T, p(x-h))$. Очевидно, що операції зсуву та диференціювання

комутують: $(T(x+h))' = T'(x+h)$.

Ми наємо, що $p(x-h) = \sum_{n=0}^m \frac{p^{(n)}(x)}{n!} (-h)^n = \sum_{n=0}^m \frac{p^{(n)}(x)}{n!} (-1)^n h^n$.

$(T(x+h), p) = (T, p(x-h)) = (T, \sum_{n=0}^m \frac{p^{(n)}(x)}{n!} (-1)^n h^n) = \sum_{n=0}^m (-1)^n \frac{h^n}{n!} (T, p^{(n)}) = \sum_{n=0}^m (-1)^n \frac{h^n}{n!} (-1)^n (T^{(n)}, p) = \sum_{n=0}^m (\frac{T^{(n)} h^n}{n!}, p)$. Тобто, $(T(x+h), p) = \sum_{n=0}^m (\frac{T^{(n)} h^n}{n!}, p)$.

Це виконується для будь якого полінома. Тоді $T(x+h) = \sum_{n=0}^m \frac{T^{(n)} h^n}{n!}$.

У $F[x]'[[t]]$ ми розглядаємо транспортне рівняння:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = a \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}, \quad u(0, x) = u_0(x),$$

яке має єдиний розв'язок, і цей розв'язок має вигляд: $u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{u_0^{(n)}(x)}{n!} t^n$.

Розділ 2

Множення кополіномів

Означення 2.1. Нехай $T \in F[x]'$. Перетворенням Коші кополінома T будемо називати наступний формальний ряд Лорана:

$$C(T)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T, x^n)}{z^{n+1}} \quad (2.1)$$

.

Лема 2.1. З означення перетворення Коші можемо зробити висновок, що $C(T_1 + T_2) = C(T_1) + C(T_2)$.

Доведення. $C(T_1 + T_2)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T_1 + T_2, x^n)}{z^{n+1}}$, використавши лінійність кополіномів, маємо: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T_1, x^n) + (T_2, x^n)}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T_1, x^n)}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T_2, x^n)}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T_1, x^n)}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T_2, x^n)}{z^{n+1}} = C(T_1) + C(T_2)$. \square

Лема 2.2. Для $\alpha \in F$ $C(\alpha T) = \alpha C(T)$.

Доведення. $C(\alpha T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha T, x^n)}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha \frac{(T, x^n)}{z^{n+1}} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T, x^n)}{z^{n+1}} = \alpha C(T)$. \square

Приклад 2.1. Покажемо, що $C(\delta)(z) = \frac{1}{z}$.

$(\delta, p) = p(0)$, тому для $n=0$ $(\delta, 1) = p(0) = 1$, а для $n \geq 1$ маємо: $(\delta, x^n) = 0^n = 0$. Тому $C(\delta)(z) = \frac{1}{z}$.

Очевидно, що кополіном T повністю визначається своїм перетворенням Коші. Крім того, перетворення Коші природно пов'язане з операцією диференціювання.

Теорема 2.1. Якщо $T \in F[x]'$, тоді $C(T') = C(T)'$.

Доведення. $C(T')(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T', x^n)}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1) \frac{(T, (x^n)')}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{(T, nx^{n-1})}{z^{n+1}}$
 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{n(T, x^{n-1})}{z^{n+1}} = [n = k+1] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-(k+1)(T, x^k)}{z^{k+2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(T, x^k)}{z^{k+1}} \right)'_z = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T, x^k)}{z^{k+1}} \right)'_z = C(T)'.$ \square

Оскільки формальні ряди Лорана виду (2.1) можна перемножувати, то це дає можливість перемножувати і кополіноми.

Означення 2.2. Нехай $T_1, T_2 \in F[x]'$. Добутком кополіномів T_1 і T_2 будемо називати такий кополіном T , що $C(T) = C(T_1)C(T_2)$.

Приклад 2.2. Покажемо, що $\delta^2 = -\delta'$.

Розглянемо $\delta^2 = \delta \cdot \delta$. Використаємо результат з Прикладу 2.1. та визначення добутку кополіномів, отримаємо наступне: $C(\delta) \cdot C(\delta) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z^2} = \left(-\frac{1}{z}\right)' = (C(-\delta))' = [\text{Теорема 2.1.}] = C(-\delta')$. Отже, $\delta^2 = -\delta'$.

Наслідок 2.1. $\delta^{(n)} = (-1)^n n! \delta^{n+1}$ або $\delta^{n+1} = \frac{(-1)^n \delta^{(n)}}{n!}$.

Доведення. Будемо доводити за індукцією. Для $n = 1$ уже перевірено: Приклад 2.2. $\delta' = -\delta^2$.

Перевіримо $n=2$. $\delta'' = (-\delta^2)' = -2\delta\delta' = -2\delta(-\delta^2) = 2\delta^3 = (-1)^2 2! \delta^{2+1}$.

$(n-1) \rightarrow n$

Отже, нам відомо $\delta^{(n-1)} = (-1)^{n-1} (n-1)! \delta^n$.

Тепер розглянемо $\delta^{(n)} = \delta^{(n-1)'} = ((-1)^{n-1} (n-1)! \delta^n)' = (-1)^{n-1} (n-1)! (\delta^n)' = (-1)^{n-1} (n-1)! n \delta^{n-1} \delta' = (-1)^n n! \delta^{n-1} (-\delta^2) = (-1)^n n! \delta^{n+1}$. \square

Для добутку кополіномів також є правильним звичайна формула Лейбниця.

Теорема 2.2. Нехай $T_1, T_2 \in F[x]'$. Тоді $(T_1 T_2)' = T_1' T_2 + T_1 T_2'$.

Доведення. $C((T_1 T_2)') = [\text{Теорема 2.1.}] = (C(T_1 T_2))' = (C(T_1)C(T_2))' = C(T_1)'C(T_2) + C(T_1)C(T_2)' = [\text{Теорема 2.1.}] = C(T_1')C(T_2) + C(T_1)C(T_2') = [\text{Лема 2.1.}] = (T_1' T_2 + T_1 T_2')$, отже маємо: $C((T_1 T_2)') = (T_1' T_2 + T_1 T_2')$, тому $(T_1 T_2)' = T_1' T_2 + T_1 T_2'$. \square

Нехай $P \in F[y]$, $P(0) = 0$, тобто $P(y) = a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_m y^m$, де $a_i \in F$, $m \in \mathbb{N}$.

Наслідок 2.2. Нехай $T \in F[x]'$ та $P(T) = a_1 T + a_2 T^2 + \dots + a_m T^m$. Тоді $P(T) \in F[x]'$ та $(P(T))' = P'(T)T' = a_1 T' + 2a_2 T T' + \dots + m a_m T^{m-1} T'$.

Доведення. Оскільки вже задано множення кополіномів, то для того щоб довести $P(T) \in F[x]'$ достатньо показати, що сума лінійних функціоналів є лінійний функціонал. Нехай L_1 та L_2 – лінійні функціонали на векторному просторі $F[x]$, a та b – довільні скаляри. Треба довести, що функціонал $aL_1 + bL_2$ також є лінійним.

1. Адитивність: $(aL_1 + bL_2, x+y) = a(L_1, x+y) + b(L_2, x+y) = a(L_1, x) + a(L_1, y) + b(L_2, x) + b(L_2, y) = (a(L_1, x) + b(L_2, x)) + (a(L_1, y) + b(L_2, y)) = ((aL_1, x) + (bL_2, x)) + ((aL_1, y) + (bL_2, y)) = (aL_1 + bL_2, x) + (aL_1 + bL_2, y)$ Отже, властивість аддитивності виконується.

2. Однорідність: $(aL_1 + bL_2, cx) = a(L_1, cx) + b(L_2, cx) = ac(L_1, x) + bc(L_2, x) = ac(L_1, x) + bc(L_2, x) = (acL_1 + bcL_2, x)$ Отже, властивість однорідності також виконується.

Оскільки $aL_1 + bL_2$ задовольняє обидві лінійні властивості, він також є лінійним функціоналом, тому $P(T) \in F[x]'$.

Тепер треба довести наступне твердження: $(P(T))' = P'(T)T'$.

З огляду на лінійність похідної, достатньо довести, що $(T^m)' = mT^{m-1}T'$.

Будемо доводити за індукцією:

$$m = 2, (T^2)' = (T \cdot T) = [\text{Теорема 2.2.}] = T'T + TT' = 2T \cdot T' = 2TT'$$

Індукційний перехід: $m - 1 \rightarrow m$.

$$\begin{aligned} \text{Відомо } (T^{m-1})' &= (m-1)T^{m-2}T'. \text{ Розглянемо: } (T^m)' = (T^{m-1} \cdot T)' = [\text{Теорема 2.2.}] = \\ &= (T^{m-1})'T + T^{m-1}T' = (m-1)T^{m-2}T'T + T^{m-1}T' = (m-1)T^{m-1}T' + T^{m-1}T' = mT^{m-1}T'. \end{aligned}$$

□

Розділ 3

Деякі нелінійні еволюційні рівняння з частинними похідними у кільці

$$F[x]'[[t]]$$

Після того як у розділі 2 була введена операція множення кополіномів, ми можемо розглядати векторний простір $F[x]'$, як комутативне кільце.

3.1 Квазілінійне рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} = P(u)$

.

Теорема 3.1. Нехай $P \in F[y]$, $P(0) = 0$ та $u_0 \in F[x]'$. Тоді задача Коші

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = P(u) \\ u_0(0, x) = u_0 \end{cases} \quad (3.1.)$$

у кільці $F[x]'[[t]]$ має єдиний розв'язок.

Доведення. Нехай $P(y) = a_1y + a_2y^2 + \dots + a_my^m$. Будемо шукати розв'язок задачі (3.1.) у вигляді $u(t, x) = u_0 + u_1t + u_2t^2 + u_3t^3 + \dots$ з невідомими коефіцієнтами $u_1, u_2, \dots \in F[x]'$.

Підставимо $u(t, x) = u_0 + u_1t + u_2t^2 + u_3t^3 \dots$ в (3.1.):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_1 + 2u_2t + 3u_3t^2 + 4u_4t^3 \dots;$$

$$P(u) = a_1(u_0 + u_1t + u_2t^2 + u_3t^3 + \dots) + a_2(u_0 + u_1t + u_2t^2 + u_3t^3 + \dots)^2$$

$$+ a_3(u_0 + u_1t + u_2t^2 + u_3t^3 + \dots)^3 + \dots + a_m(u_0 + u_1t + u_2t^2 + u_3t^3 + \dots)^m.$$

$$\text{Маємо: } \begin{cases} u_1 = a_1u_0 + a_2u_0^2 + a_3u_0^3 + \dots = P_0(u_0), \text{ де } P_0 = P \\ 2u_2 = a_1u_1 + 2a_2u_0u_1 + 3a_3u_0^2u_1 + 4a_4u_0^3u_1 \dots = P_1(u_0, u_1) \\ 3u_3 = a_1u_2 + a_2(u_1^2 + 2u_0u_2) + a_3(3u_0^2u_2 + 3u_0u_1^2) = P_2(u_0, u_1, u_2) \\ \dots \\ nu_n = P_{n-1}(u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = a_1u_0 + a_2u_0^2 + a_3u_0^3 + \dots = P_0(u_0), \text{ де } P_0 = P \\ 2u_2 = a_1u_1 + 2a_2u_0u_1 + 3a_3u_0^2u_1 + 4a_4u_0^3u_1 \dots = P_1(u_0, P_0(u_0)) = \bar{P}_1(u_0) \\ 3u_3 = a_1u_2 + a_2(u_1^2 + 2u_0u_2) + a_3(3u_0^2u_2 + 3u_0u_1^2) = P_2(u_0, P_0(u_0), \frac{\bar{P}_1(u_0)}{2}) = \bar{P}_2(u_0) \\ \dots \\ 4u_4 = P_3(u_0, P_0(u_0), \frac{\bar{P}_1(u_0)}{2}, \frac{\bar{P}_2(u_0)}{3}) = \bar{P}_3(u_0) \\ nu_n = P_{n-1}(u_0, P_0(u_0), \frac{\bar{P}_1(u_0)}{2}, \frac{\bar{P}_2(u_0)}{3}, \dots, \frac{\bar{P}_{n-2}(u_0)}{n-1}) = \bar{P}_{n-1}(u_0) \\ \dots \end{cases}$$

Оскільки розв'язок знаходиться однозначно, тоді єдиність доведена. \square

Приклад 3.1. Розглянемо лінійне рівняння, як частковий випадок нелінійного рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} = u$ та $u(0, x) = u_0$.

Будемо шукати розв'язок задачі Коші у вигляді $u(t, x) = u_0 + u_1t + u_2t^2 + u_3t^3 + \dots$ з коефіцієнтами $u_1, u_2, \dots \in F[x]'$. Підставимо у рівняння. $u_1 + 2u_2t + 3u_3t^2 + 4u_4t^3 + \dots = u_0 + u_1t + u_2t^2 + u_3t^3 + \dots$

$$\text{Маємо: } \begin{cases} u_0 = u_1 \\ u_1 = 2u_2 \\ u_2 = 3u_3 \\ u_3 = 4u_4 \\ \dots \\ u_{m-1} = mu_m \\ \dots \end{cases} = \begin{cases} u_1 = u_0 \\ u_2 = \frac{u_1}{2} = \frac{u_0}{2} = \frac{u_0}{2!} \\ u_3 = \frac{u_2}{3} = \frac{u_0}{2 \cdot 3} = \frac{u_0}{3!} \\ u_4 = \frac{u_3}{4} = \frac{u_0}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{u_0}{4!} \\ \dots \\ u_m = \frac{u_{m-1}}{m} = \frac{u_0}{m!} u_{m+1} = \frac{u_m}{m+1} = \frac{u_0}{(m+1)!} \\ \dots \end{cases}.$$

Тобто $u(t, x) = u_0 + u_0t + \frac{u_0}{2!}t^2 + \frac{u_0}{3!}t^3 + \frac{u_0}{4!}t^4 + \dots + \frac{u_0}{m!}t^m + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_0}{n!}t^n = e^t u_0$.

Приклад 3.2. $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = u^2(x,t)$ та $u(0,x) = u_0$.

Будемо шукати розв'язок задачі у вигляді $u(t,x) = u_0 + u_1t + u_2t^2 + u_3t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_1 + 2u_2t + 3u_3t^2 + 4u_4t^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n u_n t^{n-1}.$$

$$u^2(t,x) = (u_0 + u_1t + u_2t^2 + u_3t^3 + \dots)^2 = (\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 t^{2n} + \sum_{0 \leq k < m} u_k u_m t^{k+m}.$$

Маємо наступну рівність: $\sum_{n=1}^{\infty} n u_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 t^{2n} + \sum_{0 \leq k < m} 2u_k u_m t^{k+m}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = u_0^2 \\ 2u_2 = 2u_0 u_1 \\ 3u_3 = u_1^2 + 2u_0 u_2 \\ 4u_4 = 2(u_0 u_3 + u_1 u_2) \\ 5u_5 = u_2^2 + 2(u_0 u_4 + u_1 u_3) \\ \dots \\ 2n u_{2n} = 2 \sum_{0 \leq k < m, k+m=2n-1} u_k u_m t^{k+m} \\ (2n+1) u_{2n+1} = u_n^2 + 2 \sum_{0 \leq k < m, k+m=2n} u_k u_m t^{k+m} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} u_1 = u_0^2 \\ 2u_2 = 2u_0 u_0^2 = 2u_0^3 \\ 3u_3 = u_1^2 + 2u_0 u_2 = (u_0^2)^2 + 2u_0 u_0^3 = 3u_0^4 \\ 4u_4 = 2(u_0 u_3 + u_1 u_2) = 2(u_0 u_0^4 + u_0^2 u_0^3) = 4u_0^5 \\ 5u_5 = u_2^2 + 2(u_0 u_4 + u_1 u_3) = (u_0^3)^2 + 2(u_0 u_0^5 + u_0^2 u_0^4) = 5u_0^6 \\ \dots \\ n u_n = n u_0^{n+1} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} u_1 = u_0^2 \\ u_2 = u_0^3 \\ u_3 = u_0^4 \\ u_4 = u_0^5 \\ u_5 = u_0^6 \\ \dots \\ u_n = u_0^{n+1} \end{array} \right.$$

Отже, маємо: $u(t,x) = u_0 + u_1t + u_2t^2 + u_3t^3 + u_4t^4 + u_5t^5 + \dots + u_n t^n + \dots = u_0 + u_0^2 t + u_0^3 t^2 + u_0^4 t^3 + u_0^5 t^4 + u_0^6 t^5 + \dots + u_0^{n+1} t^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u_0^{n+1} t^n = (1 - u_0 t)^{-1} u_0$.

3.2 Нелінійне рівняння першого порядку

Нехай тепер P - поліном з двома змінними, тобто $P(x,y) \in F[x,y]$ та $P(0,0) = 0$, тобто відсутній вільний член полінома.

Теорема 3.2. Нехай $u_0 \in F[x]'$. Тоді задача Коші

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = P(u, \frac{\partial u}{\partial x}) \\ u_0(0, x) = u_0 \end{cases} \quad (3.2.)$$

у кільці $F[x]'[[t]]$ має єдиний розв'язок.

Доведення. Нехай $P(x, y) = \sum_{i+j=1}^{i=n, j=m} a_{ij} x^i y^j$. Будемо шукати розв'язок задачі (3.2.)

у вигляді $u(t, x) = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + u_3 t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n$, $u_n \in F[x]'$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_1 + 2u_2 t + 3u_3 t^2 + 4u_4 t^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n u_n t^{n-1}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_0 + u'_1 t + u'_2 t^2 + u'_3 t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n t^n.$$

Оскільки $P(u, \frac{\partial u}{\partial x}) = \sum_{i,j=0}^{i=n, j=m} a_{ij} u^i (\frac{\partial u}{\partial x})^j$, то маємо наступну систему:

$$\begin{cases} u_1 = \sum_{i+j=1}^{i=n, j=m} a_{ij} u_0^i u_0'^j \\ 2u_2 = \sum_{i+j=1}^{i=n, j=m} a_{ij} (u_0^i j u_0'^{j-1} u'_1 + u_0'^j i u_0^{i-1} u_1) \\ 3u_3 = \sum_{i+j=1}^{i=n, j=m} a_{ij} (u_0^i j u_0'^{j-1} u'_2 + u_0'^j i u_0^{i-1} u_2) + \sum_{i+j=1}^{i=n, j=m} a_{ij} (C_i^2 u_0^{i-2} u_1^2) (C_j^2 u_0'^{j-2} u_1'^2) \\ \dots \end{cases}$$

З системи видно, що ми знаємо u_1 , так як нам відомий кополіном u_0 . Знайшовши u_1 , зможемо знайти u_2 . Після знаходження u_2 , знайдемо u_3 і так далі. Оскільки розв'язок знаходиться однозначно, то єдиність доведена. \square

Приклад 3.3. $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_0(0, x) = u_0$, $a \in F$.

Шукаємо розв'язок у вигляді: $u(t, x) = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + u_3 t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n u_n t^{n-1} = a \sum_{n=0}^{\infty} u'_n t^n.$$

$$\text{Маємо: } \begin{cases} u_1 = a u'_0 \\ 2u_2 = a u'_1 \\ 3u_3 = a u'_2 \\ \dots \\ n u_n = a u'_{n-1} \\ \dots \end{cases}$$

Ми знаємо чому дорівнює u_0 з початкових умов. Тому можемо знайти u_1 . Знайшовши

$$u_1, \text{ знайдемо } u_2, \dots: \left\{ \begin{array}{l} u_1 = au'_0 \\ 2u_2 = a^2 u''_0 \\ 3u_3 = a^3 \frac{u'''_0}{2} \\ 4u_4 = a^4 \frac{u''''_0}{2 \cdot 3} \\ \dots \\ nu_n = a^n \frac{u^{(n)}_0}{(n-1)!} \\ \dots \end{array} \right.$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u_1 = au'_0 \\ u_2 = a^2 \frac{u''_0}{2!} \\ u_3 = a^3 \frac{u'''_0}{3!} \\ u_4 = a^4 \frac{u''''_0}{4!} \\ \dots \\ u_n = a^n \frac{u^{(n)}_0}{n!} \\ \dots \end{array} \right.$$

Отже, $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n u^{(n)}_0}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{(n)}_0}{n!} (at)^n = u_0(x + at)$ (Означення 2.6.).

Приклад 3.4. $\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$, $u_0(0, x) = u_0(x) = \delta(x)$.

Будемо шукати розв'язок у наступному вигляді: $\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nu_n t^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u'_n t^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} u'^2_n t^{2n} + \sum_{0 \leq i < j}^{\infty} 2u'_i u'_j t^{i+j}.$$

$$\text{Маємо: } \left\{ \begin{array}{l} u_1 = u'^2_0 \\ 2u_2 = 2u'_0 u'_1 \\ 3u_3 = u'^2_1 + 2u'_0 u'_2 \\ 4u_4 = 2u'_0 u'_3 + 2u'_1 u'_2 \\ \dots \\ 2ku_{2k} = 2 \sum_{0 \leq i < j, i \neq k}^{i+j=2k-1} u'_i u'_j \\ (2k+1)u_{2k+1} = u'^2_k + 2 \sum_{0 \leq i < j, i \neq k}^{i+j=2k} u'_i u'_j \\ \dots \end{array} \right. =$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
u_1 = u_0'^2 \\
2u_2 = 2u_0'2u_0'' = 4u_0'^2u_0'' \\
3u_3 = (2u_0'u_0'')^2 + 2u_0'(4u_0'u_0''^2 + 2u_0'^2u_0''') = 4u_0'^2u_0''^2 + 8u_0'^2u_0''^2 + 4u_0'^3u_0''' = 12u_0'^2u_0''^2 + 4u_0'^3u_0''' \\
4u_4 = 2u_0'(8u_0'u_0''^3 + 8u_0'^2u_0''u_0''' + 4u_0'^2u_0''u_0''' + \frac{4}{3}u_0'^3u_0^{(4)}) + 4u_0'u_0''(4u_0'u_0''^2 + 2u_0'^2u_0''') \\
= 24u_0'^3u_0''u_0''' + 32u_0'^2u_0''^3 + \frac{8}{3}u_0'^4u_0^{(4)} \\
\dots \\
2ku_{2k} = 2 \sum_{0 \leq i < j, i \neq j}^{i+j=2k-1} u_i'u_j' = 2ku_0'^{2k+1} \\
(2k+1)u_{2k+1} = u_k'^2 + 2 \sum_{0 \leq i < j, i \neq j}^{i+j=2k} u_i'u_j' = (2k+1)u_0'^{2k+2} \\
\dots \\
\left\{ \begin{array}{l}
u_1 = u_0'^2 \\
u_2 = 2u_0'^2u_0'' \\
u_3 = 4u_0'^2u_0''^2 + \frac{4}{3}u_0'^3u_0''' \\
u_4 = 6u_0'^3u_0''u_0''' + 8u_0'^2u_0''^3 + \frac{2}{3}u_0'^4u_0^{(4)} \\
\dots \\
u_n = P_n(u_0', u_0'', \dots, u_0^{(n)}) \\
\dots
\end{array} \right.
\end{array} \right. =$$

З системи очевидно, що кожну u_n можливо знайти через попередні $u_0, u_1 \dots$ та їх похідні. Оскільки u_0 - відомо, то ми знайдемо усі u_n .

Тепер підставимо нашу початкову умову $u_0(x) = \delta(x)$.

$$\left\{ \begin{array}{l}
u_1 = (-\delta^2)^2 = \delta^4 \\
u_2 = 2(-\delta^2)^2 2(\delta)^3 = 4\delta^7 \\
u_3 = 24\delta^{10} \\
u_4 = 152\delta^{13} \\
\dots \\
u_n = a_n \delta^{3n+1}
\end{array} \right. .$$

Гіпотеза: $u_n = a_n \delta^{\alpha(n)}$, де $a_n \in \mathbb{Z}$

Приклад 3.5. (Рівняння Ейлера-Хопфа)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_0(0, x) = u_0(x) = \delta(x).$$

Шукатимемо розв'язок наступним чином: $\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n u_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} u'_n t^n$$

Тепер розглянемо коефіцієнти при відповідних степенях t та отримаємо систему.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = u_0 u'_0 \\ 2u_2 = u_0 u'_1 + u'_0 u_1 \\ 3u_3 = u'_0 u_2 + u_1 u'_1 + u_0 u'_2 \\ 4u_4 = u'_0 u_3 + u'_1 u_2 + u_1 u'_2 + u_3 u'_0 \\ 5u_5 = u'_0 u_4 + u'_1 u_3 + u'_2 u_2 + u'_3 u_1 + u_4 u'_0 \\ \dots \\ nu_n = \sum_{i,j=0}^{i+j=n-1} u'_i u_j \\ \dots \end{array} \right. =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = u_0 u'_0 \\ 2u_2 = u_0 u'_1 + u'_0 u_1 = u_0 (u_0 u'_0)' + u'_0 u_0 u'_0 = u_0 (u'_0 u'_0 + u_0 u''_0) + u'_0 u_0 u'_0 = 2u_0 u'^2_0 + u_0^2 u''_0 \\ 3u_3 = u'_0 u_2 + u_1 u'_1 + u_0 u'_2 \\ \dots \\ nu_n = \sum_{i,j=0}^{i+j=n-1} u'_i u_j \\ \dots \end{array} \right. =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = u_0 u'_0 \\ u_2 = u_0 u'^2_0 + \frac{1}{2} u_0^2 u''_0 \\ 3u_3 = u'_0 (u_0 u'^2_0 + \frac{1}{2} u_0^2 u''_0) + u_0 u'_0 (u_0 u'_0)' + u_0 (u_0 u'^2_0 + \frac{1}{2} u_0^2 u''_0)' \\ \dots \\ nu_n = \sum_{i,j=0}^{i+j=n-1} u'_i u_j \\ \dots \end{array} \right.$$

Порахуємо $3u_3 = u'_0 (u_0 u'^2_0 + \frac{1}{2} u_0^2 u''_0) + u_0 u'_0 (u_0 u'_0)' + u_0 (u_0 u'^2_0 + \frac{1}{2} u_0^2 u''_0)' = u_0 u'^3_0 + \frac{1}{2} u_0^2 u'_0 u''_0 +$

$$u_0 u_0' (u_0'^2 + u_0 u_0'') + u_0 (u_0'^3 + 2u_0 u_0' u_0'' + u_0 u_0' u_0'' + \frac{1}{2} u_0^2 u_0''') = u_0 u_0'^3 + \frac{1}{2} u_0^2 u_0' u_0'' + u_0 u_0'^3 + u_0^2 u_0' u_0'' +$$

$$u_0 u_0'^3 + 2u_0^2 u_0' u_0'' + u_0^2 u_0' u_0'' + \frac{1}{2} u_0^3 u_0''' = 3u_0 u_0'^3 + \frac{9}{2} u_0^2 u_0' u_0'' + \frac{1}{2} u_0^3 u_0'''. \text{ Аналогічно знайдемо } u_4.$$

Послідовно для кожного $n \in \mathbb{N}$ можна буде виразити u_n через кополіном u_0 та його

похідні різних порядків.

$$\text{Отже, маємо: } \begin{cases} u_1 = u_0 u_0' \\ u_2 = u_0 u_0'^2 + \frac{1}{2} u_0^2 u_0'' \\ u_3 = u_0 u_0'^3 + \frac{9}{6} u_0^2 u_0' u_0'' + \frac{1}{6} u_0^3 u_0''' \\ u_4 = u_0 u_0'^4 + 3u_0^2 u_0'^2 u_0'' + \frac{4}{6} u_0^3 u_0' u_0''' + \frac{2}{4} u_0^3 u_0''^2 + \frac{1}{24} u_0^4 u_0^{(4)} \\ \dots \\ u_n = \bar{P}(u_0, u_0', u_0'', \dots, u_0^{(n)}) \\ \dots \end{cases}$$

Нам відомо, що $u_0' = \delta' = -\delta^2$, тому: $u_0 = \delta$, $u_0' = \delta' = -\delta^2$, $u_0'' = (-\delta^2)' = -2\delta\delta' = 2\delta^3$,

$$u_0''' = -6\delta^4 \dots, u_0^{(n)} = (-1)^n \delta^{n+1}.$$

$$\begin{cases} u_1 = \delta(-\delta^2) = -\delta^3 \\ u_2 = \delta(-\delta^2)^2 + \frac{1}{2} \delta^2 2\delta^3 = 2\delta^5 \\ u_3 = \delta(-\delta^2)^3 + \frac{9}{6} \delta^2 (-\delta^2) 2\delta^3 + \frac{1}{6} \delta^3 (-6\delta^4) = -5\delta^7 \\ u_4 = u_0 u_0'^4 + 3u_0^2 u_0'^2 u_0'' + \frac{4}{6} u_0^3 u_0' u_0''' + \frac{2}{4} u_0^3 u_0''^2 + \frac{1}{24} u_0^4 u_0^{(4)} = 13\delta^9 \\ \dots \end{cases}$$

Як і в попередньому прикладі можна сформулювати гіпотезу.

Гіпотеза: $u_n = b_n \delta^{\beta(n)}$, де $b_n \in \mathbb{Z}$.

3.3 Нелінійне рівняння m -го порядку

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x^m}), \quad u(0, x) = u_0, \text{ де } P \in F[y_0, y_1, \dots, y_m] \text{ і } p(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Теорема 3.3. Задача Коші $\frac{\partial u}{\partial t} = P(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x^m}), \quad u(0, x) = u_0$ має єдиний розв'язок.

Доведення. Нехай $P(y_0, \dots, y_m) = \sum_{i=0}^{p_i} y^{k_0} y^{k_1} \dots y^{k_m}$.

Будемо шукати розв'язок у наступному вигляді: $\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n$. Підставимо у наше рівняння: $\sum_{n=0}^{\infty} n u_n t^{n-1} = \sum_{i=0}^{k_i=p_i} (\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n)^{k_0} (\sum_{n=0}^{\infty} u'_n t^n)^{k_1} \dots (\sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(m)} t^n)^{k_m}$.

Отримаємо систему:

$$\begin{cases} u_1 = \sum_{i=0}^{k_i=p_i} u_0^{k_0} u_0'^{k_1} \dots (u_0^{(m)})^{k_m} = P(u_0, u_0', \dots u_0^{(m)}) \\ 2u_2 = \sum_{i=0}^{k_i=p_i} \sum_{j=0}^m C_{k_j}^{k_j-1} u_1^{(j)} (u_0^{(j)})^{k_j-1} u_0^{k_0} \dots (u_0^{(j-1)})^{k_{j-1}} (u_0^{(j+1)})^{k_{j+1}} \dots (u_0^{(m)})^{k_m} \\ 3u_3 = \sum_{i=0}^{k_i=p_i} (\sum_{j=0}^m C_{k_j}^{k_j-2} (u_1^{(j)})^2 (u_0^{(j)})^{k_j-2} u_0^{k_0} \dots (u_0^{(j-1)})^{k_{j-1}} (u_0^{(j+1)})^{k_{j+1}} \dots (u_0^{(m)})^{k_m} + \\ + \sum_{l=0}^m C_{k_l}^{k_l-1} u_2^{(l)} (u_0^{(l)})^{k_l-1} u_0^{k_0} \dots (u_0^{(l-1)})^{k_{l-1}} (u_0^{(l+1)})^{k_{l+1}} \dots (u_0^{(m)})^{k_m}) \\ \dots \end{cases}$$

З системи видно, що u_1 виражається через кополіном u_0 та його похідні, u_2 виражається через кополіном u_0 та u_1 з їх похідними...

Отже, ми знайдемо усі u_n знайдуться однозначно, тому єдиність очевидна. \square

Приклад 3.6. $m=2$ (Рівняння теплопровідності) Розглянемо задачу Коші

для одновимірного рівняння теплопровідності. $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(0, x) = u_0(x) = \delta(x)$.

Шукаємо розв'язок у вигляді $u(t, x) = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + u_3 t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n$

Маємо: $\sum_{n=1}^{\infty} n u_n t^{n-1} = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} u_n'' t^n$

Порівняємо коефіцієнти при відповідних степенях t та отримаємо наступну систему:

$$\begin{cases} u_1 = a^2 u_0'' \\ 2u_2 = a^2 u_1'' \\ 3u_3 = a^2 u_2'' \\ \dots \\ n u_n = a^2 u_{n-1}'' \\ \dots \end{cases}$$

$$\text{Ми знаємо } u_0 \text{ з початкових умов. Тому: } \begin{cases} u_1 = a^2 u_0'' \\ 2u_2 = a^4 u_0'''' \\ 3u_3 = a^6 \frac{u_0^{(6)}}{2} \\ \dots \\ n u_n = a^{2n} \frac{u_0^{(2n)}}{(n-1)!} \\ \dots \end{cases}$$

$$= \begin{cases} u_1 = a^2 u_0'' \\ u_2 = a^4 \frac{u_0^{(4)}}{2!} \\ u_3 = a^6 \frac{u_0^{(6)}}{3!} \\ \dots \\ u_n = a^{2n} \frac{u_0^{(2n)}}{n!} \\ \dots \end{cases}$$

$$\text{Отримали } u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} \frac{u_0^{(2n)}(x)}{n!} t^n.$$

Нехай тепер $F = \mathbb{R}, b > 0$ і $u_0 = \delta$. Покажемо, що в просторі $\mathbb{R}[x]'$ для кожного $t > 0$ сума ряду має вигляд $\sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{\delta^{(2n)}(x)}{n!} t^n = \frac{1}{\sqrt{4\pi bt}} e^{-\frac{x^2}{4bt}}$. Для цього спочатку заува-

$$\text{жимо, що } \frac{1}{\sqrt{4\pi bt}} \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{4bt}} dx = \begin{cases} \frac{(2n)!}{n!} b^n t^n, & \text{якщо } k = 2n, \\ 0, & \text{якщо } k = 2n + 1. \end{cases}$$

Отже,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{\delta^{(2n)}(x)}{n!} t^n, x^k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \left(\frac{\delta^{(2n)}}{n!}, x^k \right) t^n = \begin{cases} \frac{(2n)!}{n!} b^n t^n, & \text{якщо } k = 2n, \\ 0, & \text{якщо } k = 2n + 1. \end{cases}$$

$$\text{Отже, дійсно } \sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{\delta^{(2n)}(x)}{n!} t^n = \frac{1}{\sqrt{4\pi bt}} e^{-\frac{x^2}{4bt}}.$$

Тепер підставимо наші початкові умови: $u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} \frac{\delta^{(2n)}(x)}{n!} t^n$. в цьому випадку у нас $b = a^2$, тому $u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$.

Приклад 3.7. Розглянемо задачу Коші для рівняння Бюргера:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial x} \\ u(0, x) = 4\delta(x) \end{cases}.$$

Нехай $u(t, x) = u_0(x) + u_1(x)t + u_2(x)t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_1 + 2u_2 t + 3u_3 t^2 + 4u_4 t^3 + 5u_5 t^4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n u_n t^{n-1}.$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial x} = u''_0 + u'_1 t + u''_2 t^2 + u'_3 t^3 + u''_4 t^4 + \dots + (u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + u_3 t^3 + u_4 t^4 + \dots)(u'_0 + u'_1 t + u'_2 t^2 + u'_3 t^3 + u'_4 t^4 + \dots)$. Прирівняємо коефіцієнти при t з відповідним степенем:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = u''_0 + u_0 u'_0 \\ 2u_2 = u''_1 + u_0 u'_1 + u'_0 u_1 = u''_1 + (u_0 u_1)' \\ 3u_3 = u''_2 + u_0 u'_2 + u'_0 u_2 + u_1 u'_1 = u''_2 + u_1 u'_1 + (u_0 u_2)' \\ 4u_4 = u''_3 + u_0 u'_3 + u'_0 u_3 + u'_1 u_2 + u_1 u'_2 = u''_3 + (u_0 u_3 + u_1 u_2)' \\ \dots \\ (2k)u_{2k} = u''_{2k-1} + \sum_{i,j=0}^{2k-1} u_i u'_j = u''_{2k-1} + (\sum_{0 \leq i < j}^{2k-1} u_i u_j)' \\ (2k+1)u_{2k+1} = u''_{2k} + \sum_{i,j=0}^{2k} u_i u'_j = u''_{2k} + u_k u'_k + (\sum_{0 \leq i < j, i \neq j}^{2k} u_i u_j)' \end{array} \right.$$

Тепер підставимо наші початкові умови: $u_0 = 4\delta$. З Наслідку 2.1. нам відомо: $\delta^{(n)} = (-1)^n n! \delta^{n+1}$. А тому, $(4\delta)^{(n)} = 4\delta^{(n)} = 4(-1)^n n! \delta^{n+1}$. Тому $u'_0 = (4\delta)' = 4(-1)\delta^2 = -4\delta^2$, $u''_0 = 8\delta^3$, $u'''_0 = -24\delta^4$, $u^{(4)}_0 = 96\delta^5$.

Підставимо у нашу систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = 8\delta^3 + 4\delta(-4)\delta^2 = 8\delta^3 - 16\delta^3 = -8\delta^3 \\ 2u_2 = -96\delta^5 + (4\delta(-8)\delta^3)' = -96\delta^5 + (-32\delta^4)' = -96\delta^5 + 128\delta^5 = 32\delta^5 \\ 3u_3 = 480\delta^7 - 192\delta^7 - 384\delta^7 = -96\delta^7 \\ 4u_4 = -1792\delta^9 + 2048\delta^9 = 256\delta^9 \\ \dots \\ u_1 = -8\delta^3 = -2^3\delta^3 \\ u_2 = 16\delta^5 = 2^4\delta^5 \\ u_3 = -32\delta^7 = -2^5\delta^7 \\ u_4 = 64\delta^9 = 2^6\delta^9 \\ \dots \\ u_n = (-1)^n 2^{n+2} \delta^{2n+1} \end{array} \right.$$

Отже, отримали наступний єдиний розв'язок задачі Коші: $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{n+2} \delta^{2n+1} t^n$.

Цей кополіноміальний розв'язок відповідає класичному раціональному розв'язку

рівняння Бюргерса $u(t, x) = \frac{4x}{x^2 + 2t}$ (див. [8], 5.1.5)

Приклад 3.8. Якщо розглянути задачу Коші:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4u \frac{\partial u}{\partial x} \\ u(0, x) = \delta(x) \end{cases}.$$

Нехай $u(t, x) = u_0(x) + u_1(x)t + u_2(x)t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_1 + 2u_2t + 3u_3t^2 + 4u_4t^3 + 5u_5t^4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nu_nt^{n-1}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4u \frac{\partial u}{\partial x} = u_0'' + u_1''t + u_2''t^2 + u_3''t^3 + u_4''t^4 + \dots + 4(u_0 + u_1t + u_2t^2 + u_3t^3 + u_4t^4 + \dots)(u_0' + u_1't + u_2't^2 + u_3't^3 + u_4't^4 + \dots).$$

Прирівняємо коефіцієнти при t :

$$\begin{cases} u_1 = u_0'' + 4u_0u_0' \\ 2u_2 = u_1'' + 4u_0u_1' + 4u_0'u_1 = u_1'' + 4(u_0u_1)' \\ 3u_3 = u_2'' + 4u_0u_2' + 4u_0'u_2 + 4u_1u_1' = u_2'' + 4u_1u_1' + 4(u_0u_2)' \\ \dots \\ (2k)u_{2k} = u_{2k-1}'' + 4 \sum_{i,j=0}^{2k-1} u_iu_j' = u_{2k-1}'' + 4(\sum_{0 \leq i < j}^{2k-1} u_iu_j)' \\ (2k+1)u_{2k+1} = u_{2k}'' + 4 \sum_{i,j=0}^{2k} u_iu_j' = u_{2k}'' + 4u_ku_k' + 4(\sum_{0 \leq i < j, i \neq j}^{2k} u_iu_j)' \end{cases}$$

Тепер з наших початкових умов: $u_0 = \delta$. Завдяки Наслідку 2.1. маємо: $\delta^{(n)} = (-1)^n n! \delta^{n+1}$. А тому, $(4\delta)^{(n)} = 4\delta^{(n)} = 4(-1)^n n! \delta^{n+1}$. Тому $u_0' = (\delta)' = -1\delta^2 = -\delta^2$, $u_0'' = 2\delta^3$, $u_0''' = -6\delta^4$, $u_0^{(4)} = 24\delta^5$.

Підставимо у нашу систему:

$$\begin{cases} u_1 = 2\delta^3 + 4\delta(-1)\delta^2 = 2\delta^3 - 4\delta^3 = -2\delta^3 \\ 2u_2 = -24\delta^5 + 4(-2\delta^4)' = -24\delta^5 + 32\delta^5 = 8\delta^5 \\ 3u_3 = -24\delta^7 \\ 4u_4 = 64\delta^9 \\ \dots \\ u_1 = -2\delta^3 \\ u_2 = 4\delta^5 \\ u_3 = -8\delta^7 \\ u_4 = 16\delta^9 \\ \dots \\ u_n = (-2)^n \delta^{2n+1} \end{cases}$$

Бачимо, що система має єдиний розв'язок $u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{2n+1} (-2t)^n$, який відповідає класичному розв'язку $u(t, x) = \frac{x}{x^2+2t}$ (див. [8], 5.1.5).

Розділ 4

Формальний степенний ряд від кополінома

Нехай $g(y)$ – формальний степенний ряд з коефіцієнтами з поля F , $g(y) := g_1y + g_2y^2 + g_3y^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} g_ny^n$.

Теорема 4.1. Нехай $T \in F[x]$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} g_nT^n$ збігається у просторі $F[x]'$.

Доведення. Покажемо, що $\forall p \in F[x], \exists n_p \in \mathbb{N}, \forall n > n_p : (T^n, p) = 0$. Правильність цієї умови буде впливати з наступної леми.

Лема 4.1. Нехай $T_1, T_2, \dots, T_n, T_{n+1}, T_{n+2} \in F(x)'$. Тоді $(T_1T_2 \cdots T_{n+1} \cdot T_{n+2}, x^n) = 0$.

Доведення леми:

$C(T_1T_2 \cdots T_{n+1} \cdot T_{n+2})(z) = C(T_1)(z)C(T_2)(z) \cdots C(T_{n+1})(z)C(T_{n+2})(z)$. Ми отримали формальний ряд Лорана, що починається з доданку $\frac{a_{n+2}}{z^{n+2}}$. Тому $(T_1T_2 \cdots T_{n+1} \cdot T_{n+2}, x^j) = 0$ для всіх $j \leq n$.

Продовжуємо доведення теореми:

Нехай $p \in F$ і $\deg p = k$. Беремо $n_p = k + 1$. Якщо тепер $n > n_p$, тоді $n \geq k + 2$. Тому $(T^n, x^k) = (T^{k+2} \cdot T^{n-(k+2)}, x^k) = (T^{k+1}(TT^{n-(k+2)}), x^k) = 0$, згідно з лемою. \square

Приклад 4.1. Нехай тепер $F = \mathbb{R}, a > 0$ і $u_0 = \delta$.

Знайдемо суму ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} \frac{(2n)!}{n!} \delta^{2n+1} t^n$. Оскільки $\delta^{2n+1} = \frac{\delta^{(2n)}}{(2n)!}$ (див. Наслідок 2.1.), то $\sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} \frac{(2n)!}{n!} \delta^{2n+1} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} \frac{(2n)!}{n!} \frac{\delta^{(2n)}}{(2n)!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} \frac{1}{n!} \delta^{(2n)} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a^2)^n \frac{\delta^{(2n)}}{n!} t^n$. З

Прикладу 3.6. маємо суму ряду: $\sum_{n=0}^{\infty} (a^2)^n \frac{\delta^{(2n)}(x)}{n!} t^n = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$. Тому $\sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} \frac{(2n)!}{n!} \delta^{2n+1} t^n = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$.

Розглянемо тепер квазілінійне рівняння виду $\frac{\partial u}{\partial t} = g(u)$, де $g \in F[[y]]$ і $g(0) = 0$.

Теорема 4.2. Задача Коші виду:
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g(u) \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$
 має єдиний розв'язок.

Доведення. Нехай $g(y) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k y^k$, де $g_k \in F$. u будемо шукати розв'язок у вигляді $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) t^n$. Підставимо у нашу задачу.

$\sum_{n=1}^{\infty} n u_n t^{n-1} = g(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) t^n) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k (\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) t^n)^k$. Отримаємо систему:

$$\begin{cases} u_1 = g_1 u_0 + g_2 u_0^2 + g_3 u_0^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} g_k u_0^k \\ 2u_2 = g_1 u_1 + g_2 2u_0 u_1 + g_3 3u_0^2 u_1 + g_4 4u_0^3 u_1 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} g_k k u_0^{k-1} u_1 = u_1 \sum_{k=1}^{\infty} g_k k u_0^{k-1} \\ 3u_3 = g_1 u_2 + g_2 (u_1^2 + 2u_0 u_2) + g_3 (3u_0^2 u_2 + 3u_0 u_1^2) + g_4 (4u_0^3 u_2 + 6u_0^2 u_1^2) + g_5 (5u_0^4 u_2 + 10u_0^3 u_1^2) + \dots \\ 4u_4 = g_1 u_3 + g_2 (2u_0 u_3 + 2u_1 u_2) + g_3 (3u_0^2 u_3 + 6u_0 u_1 u_2 + u_1^3) + g_4 (4u_0^3 u_3 + 12u_0^2 u_1 u_2 + 4u_0 u_1^3) + \dots \\ 5u_5 = g_1 u_4 + g_2 (2u_0 u_4 + 2u_1 u_3 + u_2^2) + g_3 (3u_0^2 u_4 + 6u_0 u_1 u_3 + 3u_0 u_2^2 + 3u_1^2 u_2) + \dots \\ \dots \\ n u_n = g_1 u_{n-1} + \sum_{k=2}^{\infty} g_k P_k(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) \\ \dots \end{cases}$$

З системи видно, що кожний наступний кополіном визначається попередніми, а кополіном u_0 нам відомий з початкових умов, тому кополіном u_1 визначено. Оскільки розв'язок будується однозначно, тому розв'язок єдиний. \square

Бібліографія

- [1] S.L. Gefter, A.L. Piven', Linear Partial Differential Equations in Module of Formal Generalized Functions over Commutative Ring, J. Math. Sci., **257**, № 5, 579–596 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05505-0>
- [2] S.L. Gefter, T.E. Stulova, Fundamental Solution of the Simplest Implicit Linear Differential Equation in a Vector Space, J. Math. Sci., **207**, № 2, 166–175 (2015).
- [3] Vladimirov V.S. . Equations Mathematical Physics. MARCEL DEKKER, INC., New York, 1971, p 518
- [4] L. Hörmander ee,, The Analysis of Linear Partial Differential Operators II, Springer-Verlag, Berlin (1983). Berlin (1983).
- [5] J.F. Colombeau, Multiplication of distributions. A tool in mathematics, numerical engineering and theoretical physics, Springer-Verlag, Berlin (1992).
- [6] P. Antosik, J. Mikusinski, and R. Sikorski, Theory of distributions. The sequential approach, Elsevier Science Publ. Co., Amsterdam; PWN, Warsaw (1973).
- [7] S. Gefter, A. Piven', Partial differential equations in the module of copolynomials in several variables over a commutative ring // Book of abstracts of the 6-th International Conference “Differential Equations and control Theory”, October 11–13, 2023, P. 15–16.
- [8] A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, Second Edition, Taylor & Francys Group (2012).