

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ
«УКРАЇНСЬКА ІНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ»
ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМ. В.Н. КАРАЗІНА

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Іванов Сергій Сергійович

УДК 519.64:65

ДИСЕРТАЦІЯ
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ
ЗОБРАЖЕНЬ НА ОСНОВІ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ
ШВИДКО ОСЦИЛЮЮЧИХ ФУНКЦІЙ

Спеціальність 113 – Прикладна математика

Галузь знань 11 – Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ С.С. Іванов

Науковий керівник: Нечуйвітер Олеся Петрівна, доктор фізико-математичних наук, професор

Харків-2025

АНОТАЦІЯ

Іванов С.С. Математичне моделювання задач цифрової обробки зображень на основі чисельного інтегрування швидко осцилюючих функцій. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії з прикладної математики. – ННІ «УПА» Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків, 2025.

Дисертаційна робота присвячена математичному моделюванню задач цифрової обробки зображень з використанням нових інформаційних операторів, розробці нових методів обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій двох та трьох змінних загального виду у випадку, коли інформація про функції задається значеннями на лініях, площинах; дослідженню якості побудованих кубатурних формул.

Метою дисертаційної роботи є створення нових математичних моделей та методів для розв’язання задач цифрової обробки зображень із залученням кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій декількох змінних загального виду з використанням нових інформаційних операторів.

Об’єкт дослідження є процес математичного моделювання задач цифрової обробки зображень.

Предметом дослідження є моделі та методи інтегрування швидко осцилюючих функцій двох та трьох змінних загального виду з використанням нових інформаційних операторів.

У *вступі* обґрунтовується актуальність теми дослідження, яка безпосередньо впливає з необхідності мати нові математичні моделі, нові методи обчислень в галузі цифрової обробки сигналів та зображень. Описується проблематика чисельного інтегрування швидко осцилюючих функцій багатьох змінних в залежності від типу задання інформації про функції. Визначені мета і завдання дослідження, а також об’єкт і предмет дослідження.

У *першому розділі* наведено фундаментальну основу для дослідження, визначаючи актуальність теми, мету, завдання, об'єкт та предмет дослідження. В цьому розділі представлено огляд математичних моделей та методів розв'язання задач цифрової обробки зображень, які ґрунтуються на чисельному інтегруванні швидко осцилюючих функцій багатьох змінних, а саме на використанні кубатурних формул обчислення коефіцієнтів Фур'є функції двох та трьох змінних в залежності від типу задання вхідної інформації. Сформульовано проблематику отримання оцінок похибок наближення на класі, зокрема класі диференційовних функцій, у випадку, коли інформація по функції задається слідами функцій на лініях, площинах.

У *другому розділі* представлені математичні методи та моделі, в основі яких закладене використання оптимальних за порядком точності кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій трьох змінних загального виду. Презентується набір обчислювальних методів для чисельного інтегрування функцій трьох змінних для випадку, коли інформація про функції задається їх значеннями на лініях, площинах. Отримані оцінки похибки на класі диференційовних функцій, доведено, що запропоновані кубатурні формули мають високу точність обчислення, є оптимальними за порядком точності.

Третій розділ присвячений математичному моделюванню процесу цифрової обробки зображень на основі наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій двох змінних у випадку, коли інформація по функції задається їх значеннями на лініях. В розділі представлено кубатурні формули обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій двох змінних загального виду. Отримано оцінки похибки наближення на класі диференційовних функцій, показано, що розроблені кубатурні формули є оптимальними за порядком точності. Представлено кубатурну формулу наближеного обчислення подвійних інтегралів від швидко осцилюючих функцій загального виду, яка використовує економні схеми інтерполяції.

Кубатурна формула має високу точність наближення та використовує менше значень функції в порівнянні з класичними формулами.

Четвертий розділ зосереджений на тестуванні кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій багатьох змінних загального виду в залежності від типу задання інформації про функції. Метою тестування є перевірка теоретичних тверджень, а також дослідження потенційної спроможності запропонованих обчислювальних алгоритмів. Чисельні експерименти підтвердили теоретичні результати.

У *висновках* наведено основні результати наукової роботи щодо вирішення поставлених наукових задач дослідження.

В дисертації отримані наступні *наукові результати*:

1. *Вперше* запропоновані моделі та методи розв'язання задач цифрової обробки зображень на основі чисельного інтегрування швидко осцилюючих функцій багатьох змінних загального виду з використанням нових інформаційних операторів.

2. Вперше розглянуто математичні моделі процесу обробки зображень з використанням кубатурної формули наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій трьох змінних загального виду у випадку, коли інформація про функції задається їх значеннями на площинах. Доведено, що запропонована формула, є оптимальною за порядком точності на класі диференційовних функцій.

3. Вперше розглянуто математичні моделі процесу обробки зображень з використанням кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій двох змінних загального виду у випадку, коли інформація про функції задається їх значеннями на лініях. Доведено, що запропоновані формули, які в своїй побудові використовують кусково-сталі та кусково-лінійні сплайни в якості допоміжних функцій, є оптимальними за порядком точності на класі диференційовних функцій.

4. Вперше запропоновано математичні моделі процесу обробки зображень на основі кубатурної формули, яка забезпечує ефективне

наближення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду з точки зору кількості використаних значень.

Достовірність теоретичних дисертаційних досліджень підтверджено чисельними експериментами та тестуванням кубатурних формул щодо їх потенційної спроможності. Експериментальні результати показали високу ефективність розроблених обчислювальних методів для наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій багатьох змінних загального виду з використанням нових інформаційних операторів. Розроблені алгоритми дозволяють розширити перелік кубатурних формул для чисельного інтегрування функцій багатьох змінних, зокрема для інтегрування швидко осцилюючих функцій багатьох змінних загального виду у випадку, коли інформація про функції задається їх значеннями на площинах, лініях, а також значно підвищити точність обчислень.

Практичне значення одержаних результатів у галузі математичного моделювання задач цифрової обробки зображень полягає в наступному:

- розширено клас математичних моделей та розроблено нові методи розв’язання задач цифрової обробки зображень із залученням кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій багатьох змінних, зокрема загального виду, на випадок, коли інформація про функції задається їх значеннями на лініях, площинах;
- розроблені математичні методи та моделі, які ґрунтуються на використанні оптимальних за порядком точності кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій загального виду;
- досліджено якість кубатурних формул, які дозволяють досягати заданої точності з меншою кількістю даних, зокрема значень функцій в точках, порівняно з класичними методами, що робить їх перспективними для використання в процесі математичного моделювання задач цифрової обробки зображень.

Результати дисертаційної роботи використані в науковій роботі кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики ННІ «УПА» ХНУ імені В.Н. Каразіна (акт про впровадження 24.02.2024 р.).

Ключові слова: Математичне моделювання процесів, цифрова обробка зображень, оптимальне чисельне інтегрування, швидко осцилюючі функції, нові інформаційні оператори (інтерлінація, інтерфлетація), відновлення функцій двох та трьох змінних, суми Фур'є.

Список публікацій здобувача за темою дисертаційної роботи

Статті у періодичних наукових виданнях, що увійшли до переліку наукових фахових видань України:

Іванов С. С., Нечуйвітер О. П., Ковальчук, К. Г. Оптимальне інтегрування швидко осцилюючих функцій загального виду. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2021. Вип. 33. С. 68–72.

Особовий внесок Іванов С. Отримано оцінку знизу для похибки чисельного інтегрування швидко осцилюючих функцій (трьох змінних) загального виду на класі диференційовних функцій, у випадку, коли інформація задана слідами функцій на площинах.

Особовий внесок Нечуйвітер О. Сформульовано теоретичні основи отримання оцінки похибки чисельного інтегрування функцій (трьох змінних) загального виду на класі диференційовних функцій.

Особовий внесок Ковальчук К. Взято участь в чисельній перевірці теоретичного результату.

Іванов С. С., Нечуйвітер О. П., Ковальчук, К. Г. Нові інформаційні оператори в задачах чисельного інтегрування функцій трьох змінних. *Вісник НТУ «ХПІ»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях : зб. наук. пр. Харків : НТУ «ХПІ», 2022. № 1. С. 82-91.

Особовий внесок Іванов С. Отримано оцінку похибки наближеного обчислення потрійного інтегралу, у випадку, коли інформація задана слідами функції на лініях, на класі диференційовних функцій.

Особовий внесок Нечуйвітер О. Розроблено загальні теоретичні основи побудови кубатурних формул наближеного обчислення потрійного інтегралу, у випадку, коли інформація задана слідами функцій на площинах, лініях.

Особовий внесок Ковальчук К. Взято участь в проведенні чисельного експерименту та аналізі отриманих результатів.

Іванов С. С., Нечуйвітер О. П., Ковальчук, К. Г. Наближене обчислення подвійних інтегралів від швидко осцилюючих функцій загального виду. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2023. Вип. 37. С. 37–41.

Особовий внесок Іванов С. Побудовано та досліджено кубатурну формула наближеного обчислення подвійних інтегралів від швидко осцилюючої функцій (двох змінних) загального виду, у випадку, коли інформація задана слідами функцій на лініях; кубатурна формула в своїй побудові використовує кусково-лінійні сплайни в якості допоміжних функцій.

Особовий внесок Нечуйвітер О. Отримано оцінку знизу для чисельного інтегрування функцій (двох змінних) загального виду на класі диференційовних функцій.

Особовий внесок Ковальчук К. Взято участь в чисельній перевірці теоретичних тверджень.

Іванов С. С., Нечуйвітер О. П. Оптимальна за порядком точності кубатурна формула наближеного обчислення потрійних інтегралів від швидко осцилюючих функцій загального виду. *Кібернетика та комп'ютерні технології*. 2023. № 1. С. 59–67.

Особовий внесок Іванов С. Доведено оптимальність за порядком точності кубатурної формули наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій (трьох змінних) загального виду на класі диференційовних функцій, у випадку, коли інформація задана слідами функцій на площинах.

Особовий внесок Нечуйвітер О. Побудовано кубатурна формула наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій (трьох змінних) загального виду.

Іванов С. С., Нечуйвітер О. П., Ковальчук, К. Г. Нові інформаційні оператори в задачах чисельного інтегрування функцій трьох змінних. *Вісник НТУ «ХПІ»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків : НТУ «ХПІ», 2024. № 1 (6). С. 53-63.

Особовий внесок Іванов С. Побудовано кубатурну формулу наближеного обчислення подвійних інтегралів від швидко осцилюючої функцій (двох змінних) загального виду, у випадку, коли інформація задана слідами функцій на лініях (кубатурна формула в своїй побудові використовує кусково-сталі сплайни в якості допоміжних функцій); розроблено методику проведення чисельного експерименту, проаналізовано результати обчислень щодо підтвердження теоретичних результатів.

Особовий внесок Нечуйвітер О. Розроблено загальні теоретичні основи побудови кубатурних формул наближеного обчислення подвійного інтегралу, у випадку, коли інформація задана слідами функцій на лініях.

Особовий внесок Ковальчук К. Взято участь в проведенні чисельного експерименту.

Наукові роботи, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

Іванов С. С., Нечуйвітер О. П. Аспекти оптимального інтегрування швидко осцилюючих функцій загального виду. *Збірник тез доповідей науково-педагогічних працівників та аспірантів LIV конференції Української інженерно-педагогічної академії (м. Харків, 11-14 травня 2021 р.)*. Харків, 2021. С. 134.

Іванов С. С. Наближене обчислення подвійних інтегралів в оцінках ризиків системи управління якістю підприємства. *Збірник тез доповідей LVI студентської наукової конференції Української інженерно-педагогічної академії (м. Харків, 01-05 листопада 2021 р.)*. Харків, 2021. Т. 3. С.20.

Іванов С. С., Нечуйвітер О. П. Якість кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій. *Якість, стандартизація та метрологічне забезпечення* : [матеріали II міжнарод. наук.-практ. конф., м. Харків, 14 -15 берез. 2023 р.]. Харків : УІПА, 2023. С. 109-110.

Іванов С. С., Летута А. А. Наближене обчислення потрійних інтегралів від швидко осцилюючих функцій загального виду з використанням нових інформаційних операторів. *Студенти та молодь – для майбутнього країни* :

матеріали VII міжнар. наук.-практ. конф. здобувачів вищої освіти та молодих учених (м. Бахмут, м. Харків, 17 листоп. 2023 р.).Бахмут : ННППІ УПА, 2023. Т. 3. С. 56.

Іванов С. С., Летута А. А. Кубатурна формула наближеного обчислення потрійних інтегралів від швидко осцилюючих функцій загального виду. *Освіта та технології для розвитку суспільства* : LVIII наук.-практ. конф. здобувачів вищої освіти академії, м. Харків, 13-17 листоп. 2023 р. Харків : УПА, 2023. С. 13-14.

ABSTRACT

Ivanov S.S. Mathematical modeling of digital image processing problems based on numerical integration of rapidly oscillating functions.

Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in specialty Applied Mathematics. – UEPA, V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, 2025.

The dissertation is devoted to the mathematical modeling of digital image processing problems using new information operators, to the development of new methods for calculating integrals of rapidly oscillating functions of two and three variables of general type in the case when information about the functions is given by values on lines and planes; studying the quality of the constructed cubature formulas.

The purpose of the dissertation is to create new mathematical models and methods for solving problems of digital image processing using cubature formulas for the approximate calculation of integrals of rapidly oscillating functions of several variables of general type with the use of new information operators.

The object of research is the process of mathematical modeling of digital image processing problems.

The subject of the study is the models and methods of integration of rapidly oscillating functions of two and three variables of general type using new information operators.

The *introduction* substantiates the relevance of the research topic, which directly follows from the need to have new mathematical models and new computational methods in the field of digital signal and image processing. The problem of numerical integration of rapidly oscillating functions of many variables is described, depending on the type of information about the functions. The aim and objectives of the study, as well as the object and subject of the research are defined.

This *first* section presents an overview of mathematical models and methods for solving digital image processing problems based on the numerical integration of rapidly oscillating functions of many variables, namely, the use of cubature formulas

for calculating the Fourier coefficients of a function of two and three variables, depending on the type of input information. The problem of obtaining estimates of approximation errors on a class, in particular, the class of differentiable functions, in the case when the information on the function is given by traces of functions on lines and planes is formulated.

The *second* section presents mathematical methods and models based on the use of cubature formulas for the approximate calculation of integrals of rapidly oscillating functions of three variables of general type, which are optimal in terms of the order of accuracy. A set of computational methods for numerical integration of functions of three variables is presented for the case when information about the functions is given by their values on lines and planes. The error estimates on the class of differentiable functions are obtained, and it is proved that the proposed cubature formulas have high computational accuracy and are optimal in terms of accuracy.

The *third* chapter is devoted to the mathematical modeling of the digital image processing process based on the approximate calculation of integrals of rapidly oscillating functions of two variables in the case when the information on the function is given by their values on the lines. The section presents cubature formulas for calculating integrals of rapidly oscillating functions of two variables of general form. The estimates of the approximation error on the class of differentiable functions are obtained, and it is shown that the developed cubature formulas are optimal in terms of accuracy. The paper presents a cubature formula for the approximate calculation of double integrals of rapidly oscillating functions of general type, which uses economical interpolation schemes. The cubature formula has a high approximation accuracy and uses fewer function values compared to classical formulas.

The *fourth section* is focused on testing the cubature formulas for the approximate calculation of integrals of rapidly oscillating functions of many variables of general type, depending on the type of information about the functions. The purpose of the testing is to verify the theoretical statements and to investigate

the potential capability of the proposed computational algorithms. Numerical experiments have confirmed the theoretical results.

The *conclusions* summarize the main results of the scientific work on solving the research tasks.

The following *scientific results* were obtained in the dissertation:

1. For the first time, models and methods for solving digital image processing problems based on the numerical integration of rapidly oscillating functions of many variables of general type using new information operators are proposed.
2. For the first time, mathematical models of the image processing process are considered using the cubature formula for the approximate calculation of integrals of rapidly oscillating functions of three variables of general type in the case when information about the functions is given by their values on the planes. It is proved that the proposed formula is optimal in terms of accuracy on the class of differentiable functions.
3. For the first time, mathematical models of the image processing process are considered using cubature formulas for the approximate calculation of integrals of rapidly oscillating functions of two variables of general type in the case when information about the functions is given by their values on the lines. It is proved that the proposed formulas, which use piecewise constant and piecewise linear splines as auxiliary functions in their construction, are optimal in terms of accuracy on the class of differentiable functions.
4. For the first time, mathematical models of the image processing process based on the cubature formula are proposed, which provides an effective approximation of integrals from fast-oscillating functions of a general type in terms of the number of values used.

The reliability of the theoretical dissertation research has been confirmed by numerical experiments and testing of cubature formulas for their potential capacity. Experimental results have shown the high efficiency of the developed computational methods for the approximate calculation of integrals of rapidly oscillating functions of many variables of general type using new information operators.

The developed algorithms allow us to expand the list of cubature formulas for numerical integration of functions of many variables, in particular, for integration of rapidly oscillating functions of many variables of general type in the case when information about the functions is given by their values on planes and lines, and also significantly improve the accuracy of calculations.

The practical significance of the obtained results in the field of mathematical modeling of digital image processing problems is as follows:

- the class of mathematical models has been expanded and new methods for solving digital image processing problems have been developed using cubature formulas for the approximate calculation of integrals of rapidly oscillating functions of many variables, in particular of a general type, in the case when information about the functions is given by their values on lines and planes;
- developed mathematical methods and models based on the use of cubature formulas for the approximate calculation of integrals of rapidly oscillating functions of general type, which are optimal in terms of accuracy;
- investigated the quality of cubature formulas that allow achieving a given accuracy with less data, in particular, the values of functions at points, compared to classical methods, which makes them promising for use in the process of mathematical modeling of digital image processing problems.

The results of the dissertation were used in the scientific work of the Department of Information Computer Technologies and Mathematics of V. N. Karazin Kharkiv National University “Mathematical modeling and new computational methods”, (act of implementation on 02.24.2024).

Keywords: Mathematical modeling of processes, digital image processing, numerical integration, rapidly oscillating functions, new information operators (interlineation, interflatation,), restoration of functions of two and three variable, Fourier sums.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК ОСНОВНИХ УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ	17
ВСТУП.....	18
РОЗДІЛ 1 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ ЗОБРАЖЕНЬ МЕТОДАМИ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ	26
1.1 Елементи теорії обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій.....	27
1.2 Оптимальні за точністю та близькі до них кубатурні формули в задачах цифрової обробки зображень.....	30
1.3 Чисельні методи для математичного моделювання задач цифрової обробки зображень з використанням нових інформаційних операторів.....	34
1.4 Наближене обчислення $2D$ – коефіцієнтів Фур'є у випадку, коли інформація задана на лініях.....	38
1.5 Наближене обчислення $2D$ – коефіцієнтів Фур'є у випадку, коли інформація задана в точках.....	43
1.6 Наближене обчислення $3D$ – коефіцієнтів Фур'є у випадку, коли інформація задана на площинах.....	49
Висновки до розділу 1	52
РОЗДІЛ 2 ПОТРІЙНІ ІНТЕГРАЛИ ВІД ШВИДКО ОСЦИЛЮЮЧИХ ФУНКЦІЙ ЗАГАЛЬНОГО ВИДУ В МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ЗАДАЧ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ ЗОБРАЖЕНЬ.....	53
2.1 Оцінка знизу для похибки чисельного інтегрування на класі $H^{3,r}(M, \widetilde{M})$	53
2.2 Оптимальна за порядком точності кубатурна формула в задачах цифрової обробки зображень	58
2.3 Кубатурна формула обчислення інтегралу від функції трьох змінних на основі кусково-сталої сплайн-інтерлінації	63
Висновки до розділу 2	71
РОЗДІЛ 3 МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ ШВИДКО ОСЦИЛЮЮЧИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ У МОДЕЛЮВАННІ ЗАДАЧ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ ЗОБРАЖЕНЬ.....	73
3.1 Оцінка знизу для похибки чисельного інтегрування на класі.....	73

3.2 Оптимальні за порядком точності кубатурні формули обчислення інтегралу від функції двох змінних загального виду.....	74
3.3 Економні схеми інтерполяції при побудові кубатурних формул наближеного обчислення інтегралу від функції двох змінних загального виду.....	81
Висновок до розділу 3.....	88
РОЗДІЛ 4 ТЕСТУВАННЯ КУБАТУРНИХ ФОРМУЛ НАБЛИЖЕНОГО ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ ВІД ШВИДКО ОСЦИЛЮЮЧИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ЗАГАЛЬНОГО ВИДУ	89
4.1 Для випадку, коли інформація задана слідами функцій $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ на площинах.....	90
4.2 Для випадку, коли інформація задана слідами функцій $f(x, y)$, $g(x, y)$ на площинах.....	93
4.3 Для випадку, коли інформація про функції $f(x, y)$, $g(x, y)$ задана в точках ...	96
Висновки до розділу 4.....	98
ВИСНОВКИ.....	99
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	
Додаток А Список публікацій здобувача	
Додаток Б Акт впровадження результатів дисертаційної роботи	
Додаток В Програма 1. Обчислення $I^2(\omega)$ за формулою $\Phi^2(\omega)$ в СКМ MathCad	
Додаток С Програма 2. Обчислення $I^2(\omega)$ за формулою $\tilde{\Phi}^2(\omega)$ в СКМ MathCad	
Додаток Д Програма 3. Обчислення $I^3(\omega)$ за формулою $\Phi^3(\omega)$ в Wolfram Mathematica	

ПЕРЕЛІК ОСНОВНИХ УМОВНИХ ПОЗНАК ТА СКОРОЧЕНЬ

ОА – обчислювальний алгоритм;

ЧМ – чисельний метод;

O_M – клас обмежених функцій, що мають кусочно-неперервні перші похідні, обмежені константою M ;

$C_{2,L_1,L_2,\alpha}^2$ – клас функцій двох змінних, визначених на $[a,b] \times [c,d]$ і задовольняючих умові Гельдера з константами L_1 і L_2 і показником α , $0 < \alpha \leq 1$:

$$\left| f(X^1, X^2) - f(\tilde{X}^1, X^2) \right| \leq L_1 |X^1 - \tilde{X}^1|^\alpha, \quad \left| f(X^1, X^2) - f(X^1, \tilde{X}^2) \right| \leq L_2 |X^2 - \tilde{X}^2|^\alpha;$$

$C_{1,L,N}^2$ – клас функцій, визначених на квадраті

$\pi_2 = \left\{ X = (x^1, x^2) : 0 \leq x^i \leq 1, i = 1, 2 \right\}$, та заданих фіксованими значеннями f_ν в

вузлах фіксованої сітки X_ν , $\nu = \overline{0, N-1}$, що задовольняють умові Ліпшиця з

константою L : $\left| f(X_1) - f(X_2) \right| \leq L \|X_1 - X_2\|_1 = L \max_{i=1,2} |x_i^1 - x_i^2|$; $C_{1,L,N \times M}^2$ – клас

функцій $C_{1,L,N}^2$ з сіткою $X_{\nu_1 \nu_2}$, $\nu_1 = \overline{0, N-1}$, $\nu_2 = \overline{0, M-1}$ у випадку неточно заданої

апріорної інформації про константу L ;

$H_1^{2,r}(M, \widetilde{M})$ – клас дійсних функцій, $r \geq 1$, таких, що частинні похідні порядку r

по змінних x та y обмежені, тобто

$$\left| f^{(r,0)}(x, y) \right| \leq M, \quad \left| f^{(0,r)}(x, y) \right| \leq M, \quad \left| f^{(r,r)}(x, y) \right| \leq \widetilde{M}, \quad (x, y) \in [a, b]^2.$$

$H_1^{3,r}(M, \widetilde{M})$, $r = 1, 2$ – клас дійсних функцій, визначених на $G = [0, 1]^3$ і таких, що

$$\left| f^{(r,0,0)}(x, y, z) \right| \leq M, \quad \left| f^{(0,r,0)}(x, y, z) \right| \leq M, \quad \left| f^{(0,0,r)}(x, y, z) \right| \leq M, \quad \left| f^{(r,r,r)}(x, y, z) \right| \leq \widetilde{M};$$

$H_1^{3,r}(M, \overline{M}, \widetilde{M})$, $r = 1, 2$ – клас дійсних функцій, визначених на $G = [0, 1]^3$ і таких,

що

$$\left| f^{(r,0,0)}(x, y, z) \right| \leq M, \quad \left| f^{(0,r,0)}(x, y, z) \right| \leq M, \quad \left| f^{(0,0,r)}(x, y, z) \right| \leq M,$$

$$\left| f^{(r,r,0)}(x, y, z) \right| \leq \overline{M}, \quad \left| f^{(r,0,r)}(x, y, z) \right| \leq \overline{M}, \quad \left| f^{(0,r,r)}(x, y, z) \right| \leq \overline{M}, \quad \left| f^{(r,r,r)}(x, y, z) \right| \leq \widetilde{M}.$$

ВСТУП

Актуальність теми дослідження. Наукові результати в цифровій обробці сигналів та зображень мають важливий вплив на оборону країни, забезпечуючи нові можливості для підвищення її безпеки та ефективності. Системи обробки зображень використовуються для аналізу даних, отриманих із супутників, дронів, радарів та камер спостереження. Завдяки передовим алгоритмам обробки підвищується якість зображень, забезпечується автоматичне виявлення об'єктів, таких як військова техніка чи підозрілі рухи, розробляються системи ідентифікації осіб або технічних об'єктів. У сучасних військових технологіях системи розпізнавання зображень допомагають в автоматичному наведенні зброї на ціль. Передові методи аналізу сигналів та зображень дозволяють: прогнозувати небезпечні ситуації на полі бою, виявляти потенційні загрози, такі як запуск ракет або небезпечні переміщення військових сил.

Одним з центральних понять в математичному моделюванні задач цифрової обробки сигналів та зображень є перетворення Фур'є. Використання перетворень Фур'є дозволяє відокремити корисну інформацію (наприклад, об'єкти на полі бою) від шумів, таких як атмосферні перешкоди чи електромагнітні сигнали; алгоритми, що базуються на спектральному аналізі, дозволяють ідентифікувати об'єкти за їх просторово-частотною структурою. У випадках спотворення чи втрати частини зображення використовуються алгоритми на основі багатовимірних рядів Фур'є, які можуть відновлювати цілісну картину. Багатовимірні ряди Фур'є застосовуються для аналізу даних, отриманих із супутників, радарів, дронів або тепловізорів.

Для побудови багатовимірних рядів Фур'є виникає необхідність в обчисленні коефіцієнтів Фур'є. Задача зводиться до побудови кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій багатьох змінних. На даний час створені алгоритми обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій багатьох змінних в залежності від типу задання інформації про

функцію. Зазначені алгоритми, де в якості даних використовуються значення функцій в точках, сліди функції на лініях або площинах, зарекомендували як ефективні для моделювання систем і процесів. В основі таких алгоритмів лежить використання нових інформаційних операторів, які дозволяють отримати високу точність обробки інформації.

Однак наразі стоїть питання оптимізації запропонованих алгоритмів; побудови математичних моделей, де виникає необхідність обчислювати подвійні та потрійні інтеграли від швидко осцилюючих функцій загального виду. Така задача є більш складною, потребує більш детального вивчення та створення нових підходів до отримання значущих результатів.

Таким чином, розробка нових алгоритмів наближеного обчислення подвійних та потрійних інтегралів від швидко осцилюючих функцій загального виду, побудова оптимальних за порядком точності кубатурних формул є актуальною науково-практичною задачею, яка визначила напрям дисертаційного дослідження.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі інформаційних комп'ютерних технологій і математики ННІ «УІПА» ХНУ імені В.Н. Каразіна згідно з науково-дослідним роботами за темою «Математичне моделювання та нові обчислювальні методи» (ФН №23-01, 2022-2025pp.), де здобувач виконавець досліджень за напрямком «Наближене обчислення подвійних та потрійних інтегралів від швидко осцилюючих функцій загального виду».

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є створення нових математичних моделей та методів для розв'язання задач цифрової обробки зображень із залученням кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій декількох змінних загального виду з використанням нових інформаційних операторів.

Для досягнення цієї мети, поставлені наступні завдання:

- визначити основні принципи побудови математичних моделей задач цифрової обробки зображень в залежності від типу задання вхідної інформації;
- розробити обчислювальні алгоритми на основі використання нових інформаційних операторів для наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій багатьох змінних;
- довести оптимальність за порядком точності запропонованих кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів функцій двох та трьох змінних загального виду;
- провести експериментальне тестування розроблених кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій багатьох змінних загального виду в залежності від типу задання інформації про функції для виявлення потенційної спроможності запропонованих обчислювальних алгоритмів.

Об'єкт дослідження є процес математичного моделювання задач цифрової обробки зображень.

Предметом дослідження є моделі та методи інтегрування швидко осцилюючих функцій двох та трьох змінних загального виду з використанням нових інформаційних операторів.

Методи дослідження :

- аналітичний метод: аналіз джерел інформації та дослідницьких робіт, пов'язаних з математичним моделюванням задач цифрової обробки зображень та чисельного інтегруванням швидко осцилюючих функцій багатьох змінних;
- експериментальний метод: проведення тестування побудованих кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій багатьох змінних для підтвердження теоретичних оцінок наближення;
- статистичний метод: збір та аналіз даних, отриманих в результаті тестування кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидко

осцилюючих функцій багатьох змінних, для виявлення закономірностей, оцінки ефективності запропонованих методів;

- науково-експериментальні методи: тестування кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій багатьох змінних загального виду для виявлення потенційної спроможності алгоритмів;

- обчислювальні методи: розробка програм наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій багатьох змінних загального виду в системі комп'ютерної математики MathCad;

- методи наукового синтезу: інтеграція результатів дослідження у вигляді наукових рекомендацій та практичних застосувань.

Наукова новизна здобутих результатів:

- вперше запропоновані моделі та методи розв'язання задач цифрової обробки зображень на основі чисельного інтегрування швидко осцилюючих функцій багатьох змінних загального виду з використанням нових інформаційних операторів;

- вперше розглянуто математичні моделі процесу обробки зображень з використанням кубатурної формули наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій трьох змінних загального виду у випадку, коли інформація про функції задається їх значеннями на площинах. Доведено, що запропонована формула, є оптимальною за порядком точності на класі диференційовних функцій;

- вперше розглянуто математичні моделі та методи розв'язання задач обробки зображень з використанням кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій двох змінних загального виду у випадку, коли інформація про функції задається їх значеннями на лініях. Доведено, що запропоновані формули, які в своїй побудові використовують кусково-сталі та кусково-лінійні сплайни в якості допоміжних функцій, є оптимальними за порядком точності на класі диференційовних функцій;

– вперше запропоновано математичні моделі процесу обробки зображень на основі кубатурної формули, яка забезпечує ефективне наближення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду з точки зору кількості використаних значень.

Отримані результати розкривають нові перспективи у математичному моделюванні задач цифрової обробки зображень в залежності від типу задання вхідної інформації.

Практичне значення одержаних результатів у галузі математичного моделювання задач цифрової обробки зображень полягає в наступному:

– розширено клас математичних моделей та розроблено нові методи розв’язання задач цифрової обробки зображень із залученням кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій багатьох змінних, зокрема загального виду, на випадок, коли інформація про функції задається їх значеннями на лініях, площинах;

– розроблені математичні методи та моделі, які ґрунтуються на використанні оптимальних за порядком точності кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій загального виду;

– досліджено якість кубатурних формул, які дозволяють досягати заданої точності з меншою кількістю даних, зокрема значень функцій в точках, порівняно з класичними методами, що робить їх перспективними для використання в процесі математичного моделювання задач цифрової обробки зображень.

Авторський внесок здобувача полягає в розробці нових та вдосконаленні існуючих методів математичного моделювання задач цифрової обробки зображень, що забезпечують виконання наукових завдань, поставлених у дисертаційній роботі. Результати дисертаційної роботи отримані здобувачем особисто та в співавторстві, опубліковані у роботах [1-10] (Додаток А).

1) фахові видання України:

[1] – здобувачем отримано оцінку знизу для похибки чисельного інтегрування швидко осцилюючих функцій (трьох змінних) загального виду на класі диференційовних функцій, у випадку, коли інформація задана слідами функцій на площинах. Співавторами: Нечуйвітер О.П. сформульовано теоретичні основи отримання оцінки похибки чисельного інтегрування функцій (трьох змінних) загального виду на класі диференційовних функцій; Ковальчук К.Г. взяв участь в чисельній перевірці теоретичного результату;

[2] – здобувачем отримано оцінку похибки наближеного обчислення потрібного інтегралу, у випадку, коли інформація задана слідами функції на лініях, на класі диференційовних функцій. Співавторами: Нечуйвітер О.П. розроблено загальні теоретичні основи побудови кубатурних формул наближеного обчислення потрібного інтегралу, у випадку, коли інформація задана слідами функцій на площинах, лініях; Ковальчук К.Г. взяв участь в проведенні чисельного експерименту та аналізі отриманих результатів;

[3] – здобувачем побудовано та досліджено кубатурна формула наближеного обчислення подвійних інтегралів від швидко осцилюючої функцій (двох змінних) загального виду, у випадку, коли інформація задана слідами функцій на лініях; кубатурна формула в своїй побудові використовує кусково-лінійні сплайни в якості допоміжних функцій; Співавторами: Нечуйвітер О.П. отримано оцінку знизу для чисельного інтегрування функцій (двох змінних) загального виду на класі диференційовних функцій; Ковальчук К.Г. взяв участь в чисельній перевірці теоретичних тверджень;

[4] – здобувачем доведено оптимальність за порядком точності кубатурної формули наближеного обчислення від швидко осцилюючих функцій (трьох змінних) загального виду на класі диференційовних функцій, у випадку, коли інформація задана слідами функцій на площинах. Співавторами: Нечуйвітер О.П. побудована кубатурна формула наближеного обчислення від швидко осцилюючих функцій (трьох змінних) загального виду;

[5] – здобувачем побудовано кубатурну формулу наближеного обчислення подвійних інтегралів від швидко осцилюючої функцій (двох змінних) загального виду, у випадку, коли інформація задана слідами функцій на лініях (кубатурна формула в своїй побудові використовує кусково-сталі сплайни в якості допоміжних функцій); розроблено методику проведення чисельного експерименту, проаналізовано результати обчислень щодо підтвердження теоретичних результатів; Співавторами: Нечуйвітер О.П. розроблено загальні теоретичні основи побудови кубатурних формул наближеного обчислення подвійного інтегралу, у випадку, коли інформація задана слідами функцій на лініях; Ковальчук К.Г. взяв участь в проведенні чисельного експерименту;

2) інші публікації апробаційного характеру:

[6] – здобувачем розроблено алгоритм отримання оцінки знизу для похибки чисельного інтегрування швидко осцилюючих функцій (трьох змінних) загального виду на класі диференційовних функцій, у випадку, коли інформація задана слідами функцій на площинах. Співавтором: Нечуйвітер О.П. розроблено теоретичне підґрунтя для створення алгоритму отримання оцінки похибки чисельного інтегрування функцій (трьох змінних) загального виду на класі диференційовних функцій;

[8] – здобувачем створено алгоритм отримання оцінки якості кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій. Співавтором: Нечуйвітер О.П. теоретично обґрунтовано алгоритм отримання оцінок знизу для оптимальних за порядком точності кубатурних формул.

[9] – здобувачем проаналізовано оптимальні за точністю алгоритми обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій багатьох змінних (регулярний випадок). Співавтором Летутою А.А. взято участь у розробці методики щодо обчислення потрійних інтегралів від швидко осцилюючих функцій загального виду, які в своїй побудові використовують нові інформаційні оператори.

[10] – здобувачем висвітлено використання чисельного інтегрування функцій багатьох змінних в математичному моделюванні, зокрема інтегрування швидко осцилюючих функцій в цифровій обробці сигналів та зображень. Співавтором Летутою А. А. висвітлено алгоритм отримання оцінки похибки наближення потрійних та подвійних інтегралів від швидко осцилюючих функцій загального виду на класі Гельдера.

Апробація результатів дисертації. Основні положення дисертаційної роботи були представлені та обговорені на : Міжнародній науковій конференції «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XLVII)», присвяченій 30-річчю незалежності України (Київ, 2021 р.); LIV конференції науково-педагогічних працівників та аспірантів Української інженерно-педагогічної академії (Харків, 2021 р.); LVI студентській науковій конференції Української інженерно-педагогічної академії (Харків, 2021 р.); Міжнародній науково-практичній конференції «Якість, стандартизація та метрологічне забезпечення» (Харків, 2023 р.); Міжнародному науковому симпозиумі, присвяченому 100-річчю від дня народження академіка В.М. Глушкова, «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XLVIII)», (Київ, 2023 р.); VII Міжнародній науково-практичній конференції здобувачів вищої освіти та молодих учених (Бахмут - Харків, 2023 р.); LVIII науково-практичній конференції здобувачів вищої освіти академії «Освіта та технології для розвитку суспільства» (Харків, 2023р.).

Публікації. Основний зміст дисертації відображено у 10 наукових публікаціях, серед яких 5 статей – у наукових періодичних фахових виданнях України, 5 матеріалів апробаційного характеру.

Структура і обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з анотації двома мовами, вступу, чотирьох розділів, висновків та 5 додатків. Робота містить 130 сторінок основного тексту, серед них: 3 рисунки по тексту, 4 таблиці по тексту; 125 найменувань в списках використаних джерел; 5 додатків на 13 сторінках.

РОЗДІЛ 1

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ ЗОБРАЖЕНЬ МЕТОДАМИ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ

Сьогодні вирішення задач цифрової обробки сигналів та зображень впливає на суспільство. Цифрова обробка сигналів важлива для забезпечення кібербезпеки, оскільки розробляються методи шифрування сигналів і передачі даних, які ускладнюють перехоплення чи злам інформації противником. У сучасних військових технологіях системи розпізнавання зображень допомагають в автоматичному наведенні зброї на ціль. Алгоритми обробки сигналів використовуються для виявлення та нейтралізації сигналів противника, наприклад, систем зв'язку чи наведення ракет, створення систем глушіння та маскування, які ускладнюють ворожу розвідку; забезпечують точність навігації та зв'язку, навіть в умовах радіоелектронних перешкод. Передові методи аналізу сигналів та зображень дозволяють: прогнозувати небезпечні ситуації на полі бою, виявляти потенційні загрози, такі як запуск ракет або небезпечні переміщення військових сил.

Важливим поняттям цифрової обробки сигналів та зображень є перетворення Фур'є. Багатовимірні ряди Фур'є є основою для багатьох інновацій в обробці сигналів та зображень. Їх впровадження забезпечує перевагу в розвідці, кіберзахисті, роботі систем РЕБ, а також у розвитку автоматизованих бойових систем, що робить ці методи невід'ємною частиною сучасної оборонної стратегії. Багатовимірні ряди Фур'є застосовуються для забезпечення безпеки передачі інформації. Алгоритми обробки сигналів у частотній області можуть використовуватися для складних методів шифрування, які важко зламати. Аналіз спектра допомагає виявляти спроби перехоплення або втручання в сигнали зв'язку. Оптимізація спектру переданих сигналів робить їх менш помітними для ворожих систем перехоплення. У системах, що працюють із великими масивами даних (наприклад, 3D-сканування місцевості або спостереження за динамікою об'єктів),

багатовимірні ряди Фур'є дозволяють швидко аналізувати багатовимірні структури даних, виділяти критичні компоненти з багатовимірних сигналів, наприклад, для аналізу руху групи об'єктів у просторі, оптимізувати роботу систем спостереження через зменшення обсягу даних шляхом компресії на основі спектрального представлення.

Розв'язанню задач, які пов'язані з обчисленням інтегралів від швидко осцилюючих функцій однієї та багатьох змінних, присвячено багато досліджень [1-12].

1.1. Елементи теорії обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій

Нехай задача $P(I)$ розв'язується алгоритмом $A(X)$ на ЕОМ $C(Y)$, де I, X, Y – скінченні множини (вектори) параметрів, від яких істотно залежать відповідно P, A, C . В число компонентів вектора I можуть входити дані про апріорні властивості розв'язку задачі, наприклад, константи, що обмежують абсолютні значення ряду похідних від заданих функцій, дані про точність задання вхідних величин тощо. Серед компонентів вектора X можуть бути число ітерацій алгоритму, степінь апроксимації, крок сітки тощо. Вектор Y може містити число розрядів комірок пам'яті ЕОМ, загальний обсяг оперативної пам'яті ЕОМ, час виконання операцій ЕОМ, кількість процесорів ЕОМ, характеристики використовуваних операційних систем і трансляторів тощо.

У практиці чисельного розв'язання задач на ЕОМ склалися наступні характеристики задач, алгоритмів і ЕОМ: $E(I, X, Y)$ – повна похибка розв'язку E задачі P на ЕОМ C за допомогою алгоритму A ; $T(I, X, Y)$ – час, необхідний для отримання розв'язку задачі; $M(I, X, Y)$ – необхідна пам'ять ЕОМ.

Одним з основних критеріїв оптимальності наближеного розв'язку задач може служити вимога його максимальної точності (чи мінімальної похибки) при заданих ресурсах, які можна використовувати в процесі розв'язку. В

поняття ресурсу входять об'єм і точність вхідних даних задачі, вільна для використання пам'ять ЕОМ, ліміт часу обчислень на даній ЕОМ, наявний запас математичного забезпечення ЕОМ і т. п.

На початку дослідження в такій постановці природно розглянути питання про "потенційну спроможність" чисельних методів, тобто про ту максимальну точність розв'язку, яка може бути досягнута при даній вхідній інформації про задачу.

Кожний О.А. розв'язання конкретної задачі використовує лише скінченну кількість вхідних даних про задачу і тим самим автоматично є О.А. розв'язання класу всіх тих задач, які мають ті ж вхідні дані. На цій множині задач завжди знайдуться дві задачі, при розв'язанні яких досягаються найгірша і найкраща межа значення характеристики, що оптимізується. Тому кожний, у тому числі оптимальний, О.А. розв'язання задачі, який нас цікавить, буде мати певну "потенційну спроможність". Якщо, наприклад, існують дві задачі з тими самими вхідними даними, точні розв'язки яких x_1 і x_2 є елементами метричного простору, причому відстань між ними $\rho(x_1, x_2) \geq d > 0$, то для кожного О.А. їх розв'язку отримується розв'язок x , який має властивість

$$\max_{i=1,2} \rho(x, x_i) \geq \frac{d}{2}. \quad (1.1)$$

Це означає, що не існує О.А., який би давав розв'язок розглянутої задачі з гарантованою точністю, меншою за $d/2$. Якщо потрібно підвищити точність розв'язку задачі, необхідно залучити додаткові відомості про неї. Тоді задача буде належати новому, більш "вузькому", класу задач, О.А. розв'язання яких будуть мати нову, більш сильну, "потенційну спроможність". Аналогічні міркування справедливі у відношенні будь-якого іншого показника (характеристики) О.А. і задач.

Важливе значення має отримання непокреслених характеристик типу (1.1). В цьому випадку знак рівності буде досягатися на оптимальному О.А. і різниця між правою і лівою частинами в (1.1) для кожного О.А. буде характеристикою розриву між даним і оптимальним О.А.

Така постановка на оптимальність тим більш правомірна, що, як виявляється, максимальну точність може давати множина різних алгоритмів, серед яких потім природно шукати алгоритми, які мінімізують час їх реалізації на ЕОМ або необхідну пам'ять.

Таким чином, під оптимальним розв'язком задачі будемо розуміти розв'язок з максимально можливою точністю при даній інформації, а під оптимальним Ч.М. – метод, який дає оптимальний розв'язок.

Дамо формальне визначення оптимального за точністю О.А. Нехай замість елемента I маємо скінченновимірний вектор $I_{N,\varepsilon} \equiv (\tilde{i}_1, \tilde{i}_2, \dots, \tilde{i}_N)$, а ε характеризує точність фактичних значень N вхідних даних $I_N \equiv (i_1, i_2, \dots, i_N)$: $|i_j - \tilde{i}_j| \leq \varepsilon, j = \overline{1, N}$. Прикладом I_N може бути вектор N значень вхідної функції або N коефіцієнтів її ряду Фур'є. Позначимо через $\tilde{R} = AI_{N,\varepsilon}$ наближений розв'язок задачі $P(I, R)$, $\tilde{R} \in \mathfrak{R}$, де A – О.А., застосований до $I_{N,\varepsilon}$. Тоді абсолютною похибкою наближеного розв'язку задачі P буде $V(A, N, \varepsilon, P) = \rho_{\mathfrak{R}}(R, \tilde{R})$. Введемо величини:

$$V(A, N, \varepsilon, \Pi) = \sup_{P \in \Pi} \sup_{R \in F} V(A, N, \omega, P);$$

$$V(M, N, \varepsilon, \Pi) = \inf_{A \in M} V(A, N, \varepsilon, \Pi),$$

$$V = V(N, \varepsilon, \Pi) = \inf_A V(A, N, \varepsilon, \Pi),$$

$$V(N, \Pi) = V(N, 0, \Pi), \quad (1.2)$$

де Π і M означають відповідно заданий клас задач P , алгоритмів A , а V – нижня межа за всіма алгоритмами A . Зокрема, клас Π може співпадати з єдиною задачею P . Алгоритм A , на якому досягається $V(N, \varepsilon, \Pi)$, назовемо оптимальним за точністю О.А. У випадку, коли такий алгоритм виявляється не єдиним, уся множина оптимальних О.А. складає оптимальний чисельний метод. Якщо для алгоритму A $V(A, N, \varepsilon, \Pi) \leq V + \eta$, $\eta > 0$, то A назовемо оптимальним з точністю до η . Якщо $\eta = o[V]$ або $\eta = O[V]$, то A назовемо відповідно асимптотично оптимальним або оптимальним за порядком точності. Подібним

чином вся множина відповідних алгоритмів утворить або оптимальний з точністю до η , або асимптотично оптимальний, або оптимальний за порядком точності чисельний метод.

1.2. Оптимальні за точністю та близькі до них кубатурні формули в задачах цифрової обробки зображень

З оглядом результатів з існуючих оптимальних за точністю і близьких до них кубатурних формул обчислення інтегралів вигляду

$$I_i^n(\omega) = \underbrace{\int_a^b \dots \int_a^b}_{n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \left\{ \begin{array}{l} \sin \omega x_1 \cdot \dots \cdot \sin \omega x_n \\ \cos \omega x_1 \cdot \dots \cdot \cos \omega x_n \end{array} \right\} dx_1 \dots dx_n,$$

$i = 1, 2$, $n \geq 2$ для функцій $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ з деяких класів в припущенні, що використовується інформація про значення $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не більш ніж у $N = m^n$ вузлових точках можна ознайомитись в [12-14]. У випадку сіткового інформаційного оператора в [12-14] досліджуються класи F , F_N , $F_{N,\varepsilon}$. Наведемо деякі результати для класів: $C_{2,L_1,L_2,\alpha}^2$, $C_{1,L,N \times M}^2$, O_M^n , $C_{2,L,L,N}^2$, $C_{2,L,L,\bar{N}}^2$, $C_{1,L,N}^2$, $C_{1,L,\bar{N}}^2$.

Нехай $F = C_{2,L_1,L_2,\alpha}^2$. Розглянемо область $D = \{X : 0 \leq x_p \leq 1, p = 1, 2\}$. Всі результати, легко переносяться на випадок, коли $D = \{X : a \leq x'_p \leq b, p = 1, 2\}$, якщо застосувати перетворення $x'_p = a + (b - a)x_p$, $p = 1, 2$.

Теорема 1.1. [9, с. 242] Нехай $f(X) = f(x_1, x_2) \in C_{2,L_1,L_2,\alpha}^2$, $N = m_1 m_2$, де m_1 , m_2 — цілі, $n = 2$, $L_1 \Delta x_{1,i} < L_2 \Delta x_{2,j}$, $i = \overline{1, m_1}$, $j = \overline{1, m_2}$, $p = 1, 2$. Розглянемо інтеграл $I_1^2(\omega)$. Кубатурні формули

$$A_1^2(\omega) = \sum_{i=0}^{m_1-1} \sum_{k=0}^{m_2-1} f_{ik} \int_{x_{1,i-1/2}}^{x_{1,i+1/2}} \sin \omega x_1 dx_1 \int_{x_{2,k-1/2}}^{x_{2,k+1/2}} \sin \omega x_2 dx_2,$$

$$A_2^2(\omega) = \sum_{i=0}^{m_1-1} \sum_{k=0}^{m_2-1} f_{ik} \int_{x_{1,i}}^{x_{1,i+1}} \sin \omega x_1 dx_1 \int_{x_{2,k}}^{x_{2,k+1}} \sin \omega x_2 dx_2$$

є оптимальними за порядком точності при $m_p \geq |\omega|$, причому справедлива наступна оцінка похибки чисельного інтегрування на класі

$$V(C_{2,L_1,L_2,\alpha}^2, \omega) \geq \begin{cases} \frac{L_1 \left[L_1 m_2 (L_1^{\alpha-1} - L_2^{\alpha-1} (\alpha+1)) + L_2^\alpha m_1 (\alpha+2) \right]}{11^{\alpha+1} L_2^\alpha (\alpha+1) (\alpha+2) m_1^{\alpha+1}}, & m_1, m_2 \geq |\omega|, \\ \frac{2L_1 (L_1^\alpha + L_2^\alpha (\alpha+2) + L_1 L_2^{\alpha-1} (\alpha+1)) \pi^\alpha}{8 \cdot 24^{\alpha+1} L_2^\alpha (\alpha+1) (\alpha+2) |\omega|^\alpha}, & m_1, m_2 < |\omega|. \end{cases} \quad \text{і}$$

$$V(C_{2,L_1,L_2,\alpha}^2, A_1^2, \omega) \leq \frac{2Q^{\alpha+2}}{(\alpha+1)} \frac{(L_1 m_2^\alpha + L_2 m_1^\alpha)}{(2m_1 m_2)^\alpha}, \quad (1.3)$$

$$V(C_{2,L_1,L_2,\alpha}^2, A_2^2, \omega) \leq \frac{2Q^{\alpha+2}}{(\alpha+1)} \frac{(L_1 m_2^\alpha + L_2 m_1^\alpha)}{(m_1 m_2)^\alpha}.$$

Тут $x_{p,i \pm 1/2} = x_{p,i} \pm \frac{\Delta x_{p,i}}{2}$, $i = \overline{0, m_p - 2}$, $p = 1, 2$, $x_{p,i+1} = x_{p,i} + \Delta x_{p,i}$, $i = \overline{0, m_p - 1}$, $p = 1, 2$,

$\Delta x_{p,-1} = 0$, $x_{p,m_p+1/2} = x_{p,m_p} = 1$, $x_{p,0} = 0$, $\Delta x_{p,i} = x_{p,i+1} - x_{p,i}$, $p = 1, 2$, $\max_{\substack{1 \leq p \leq 2 \\ 0 \leq i \leq m_p - 1}} \Delta x_{p,i} = \frac{Q}{m_p}$.

Теорема 1.2. [9, с. 248] В умовах теореми 1.1 для інтегралу $I_2^2(\omega)$ справедлива наступна оцінка знизу похибки чисельного інтегрування на класі

$$V(C_{2,L_1,L_2,\alpha}^2, \omega) \geq \begin{cases} \frac{3L_1 \left[L_1 m_2 (L_1^{\alpha-1} - L_2^{\alpha-1} (\alpha+1)) + L_2^\alpha m_1 (\alpha+2) \right]}{9^{\alpha+1} L_2^\alpha (\alpha+1) (\alpha+2) m_1^{\alpha+1}}, & m_1, m_2 \geq |\omega|, \\ \frac{L_1 (L_1^\alpha + L_2^\alpha (\alpha+2) - L_1 L_2^{\alpha-1} (\alpha+1)) \pi^\alpha}{12 \cdot 48^{\alpha+1} L_2^\alpha (\alpha+1) (\alpha+2) |\omega|^\alpha}, & m_1, m_2 < |\omega|. \end{cases}$$

Кубатурні формули

$$A_3^2(\omega) = \sum_{i=0}^{m_1-1} \sum_{k=0}^{m_2-1} f_{ik} \int_{x_{1,i-1/2}}^{x_{1,i+1/2}} \cos \omega x_1 dx_1 \int_{x_{2,k-1/2}}^{x_{2,k+1/2}} \cos \omega x_2 dx_2,$$

$$A_4^2(\omega) = \sum_{i=0}^{m_1-1} \sum_{k=0}^{m_2-1} f_{ik} \int_{x_{1,i}}^{x_{1,i+1}} \cos \omega x_1 dx_1 \int_{x_{2,k}}^{x_{2,k+1}} \cos \omega x_2 dx_2$$

є оптимальними за порядком точності при $m_p \geq |\omega|$ з оцінками (1.3) відповідно.

В [9, с. 262 - 270] наведені асимптотично оптимальні кубатурні формули наближеного обчислення багатовимірного перетворення Фур'є $I_1^n(\omega)$, $I_2^n(\omega)$, де $n \geq 1$, $f(X) = f(x_1, \dots, x_n) \in O_M^n$, $F \equiv O_M^n$, де O_M^n – клас обмежених функцій, які мають кусково-неперервні часткові похідні, обмежені константою M , визначені в кубі $\Pi = \{X = (x_1, \dots, x_n) : 0 \leq x_p \leq 1, p = \overline{1, n}\}$, причому використовується інформація не більш, ніж в $N = m^n$, m – ціле, вузлових точках $\{X_i\}_0^{N-1}$ із її області визначення: $\{f_i\}_0^{N-1} = \{f(X_i)\}_0^{N-1}$ і $N < |\omega|$, $|\omega| \geq 2\pi$.

В [9, с. 314 - 316] наведені оптимальні за порядком точності (з константою, що не перевищує двійки) кубатурні формули обчислення інтегралів вигляду $I_1^2(\omega)$ у випадку, коли $f(X) \in C_{1,L,N \times M}^2$ і неточно заданої апріорної інформації про задачу. Питання побудови оптимальних за точністю і оптимальних за порядком точності кубатурних формул в інтерполяційних класах Ліпшиця для двовимірного випадку за припущенням, що відоме точне значення константи L , розглянуті вище. Коли ж відома лише деяка оцінка L , то корисно застосовувати кубатурні формули, в яких значення L не використовується.

В інтегралі $I_1^2(\omega)$ замінено підінтегральну функцію $f(x_1, x_2) \in C_{1,L,N \times M}^2$ білінійним сплайном $S(x_1, x_2)$ [9, 12], який має вигляд:

$$S(x_1, x_2) = (1-u) \left((1-t) f_{i,j} + t f_{i+1,j} \right) + u \left((1-t) f_{i,j+1} + t f_{i+1,j+1} \right), \quad (1.4)$$

де $(x_1, x_2) \in \Omega_{i,j}$, $\Omega_{i,j} = [x_{1,i}, x_{1,i+1}] \times [x_{2,j}, x_{2,j+1}]$, $t = \frac{x_1 - x_{1,i}}{x_{1,i+1} - x_{1,i}}$, $u = \frac{x_2 - x_{2,j}}{x_{2,j+1} - x_{2,j}}$, $i = \overline{1, N-1}$,
 $j = \overline{1, N-1}$.

Оскільки $S(x_1, x_2) \in C_{1,L,N \times M}^2$ [9, 12], то кубатурна формула

$$\tilde{A}(S) = \int_a^b \int_c^d S(x_1, x_2) \sin \omega x_1 \sin \omega x_2 dx_1 dx_2$$

є оптимальною за порядком точності з константою, яка не перевищує двійки. Для обчислення інтегралів $I_2^2(\omega)$, $I_3^2(\omega)$ кубатурні формули, побудовані за допомогою лінійного сплайну (1.4) мають відповідно вигляд:

$$\begin{aligned} A_5^2(\omega, S) = & \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} \frac{(f_{i,j} + f_{i+1,j+1} - f_{i,j+1} - f_{i+1,j})}{\omega^4 (x_{1,i} - x_{1,i+1})(x_{2,j} - x_{2,j+1})} (\sin \omega x_{1,i+1} - \\ & \sin \omega x_{1,i}) (\sin \omega x_{2,j+1} - \sin \omega x_{2,j}) + \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{(\sin \omega x_{1,i+1} - \sin \omega x_{1,i})}{\omega^3 (x_{1,i+1} - x_{1,i})} ((f_{i+1,1} - f_{i,1}) \cos \omega c - (f_{i+1,M} - f_{i,M}) \cos \omega d) + \\ & + \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\sin \omega x_{2,j+1} - \sin \omega x_{2,j})}{\omega^3 (x_{2,j+1} - x_{2,j})} ((f_{1,j+1} - f_{1,j}) \cos \omega a - (f_{N,j+1} - f_{N,j}) \cos \omega b) + \\ & + \frac{1}{\omega^2} (f_{1,1} \cos \omega a \cos \omega c + f_{N,M} \cos \omega b \cos \omega d - f_{1,M} \cos \omega a \cos \omega d - f_{N,1} \cos \omega b \cos \omega c); \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} A_6^2(\omega, S) = & \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} \frac{(f_{i,j} + f_{i+1,j+1} - f_{i,j+1} - f_{i+1,j})}{\omega^4 (x_{1,i} - x_{1,i+1})(x_{2,j} - x_{2,j+1})} (\cos \omega x_{1,i+1} - \\ & \cos \omega x_{1,i}) (\cos \omega x_{2,j+1} - \cos \omega x_{2,j}) + \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{(\cos \omega x_{1,i+1} - \cos \omega x_{1,i})}{\omega^3 (x_{1,i+1} - x_{1,i})} ((f_{i,1} - f_{i+1,1}) \sin \omega c - (f_{i,M} - f_{i+1,M}) \sin \omega d) + \\ & + \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\cos \omega x_{2,j+1} - \cos \omega x_{2,j})}{\omega^3 (x_{2,j+1} - x_{2,j})} \times ((f_{1,j} - f_{1,j+1}) \sin \omega a - (f_{N,j} - f_{N,j+1}) \sin \omega b) + \\ & + \frac{1}{\omega^2} (f_{1,1} \cos \omega a \cos \omega c + f_{N,M} \sin \omega b \sin \omega d - f_{1,M} \sin \omega a \sin \omega d - f_{N,1} \sin \omega b \sin \omega c) . \end{aligned} \quad (1.6)$$

Звуження класу функцій F на F_N обумовлене прагненням максимально використати апіорну інформацію про задачу, що розв'язується. Важливою обставиною при роботі з інтерполяційними класами є те, що в обчислювальній практиці зустрічається велика кількість задач з функціями досить складної структури. Для обчислення кожної функціональної характеристики (наприклад, значення функції) необхідна постановка коштовного затратного фізичного чи обчислювального експерименту.

З такими труднощами доводиться зустрічатися, наприклад, при розв'язуванні задач автоматизації проектування, де обчислення одного значення функції (скалярної чи векторної), що описує систему, яка проектується, потребує повного розрахунку варіанту системи, а також при цифровій обробці зображень, в цифровій голографії і багатьох інших задачах. Тому необхідно, з одного боку намагатись якнайкраще описати вхідну задачу, одержати якнайповніше апіорну інформацію про неї, а з іншого – зменшити число значень функції, визначення яких пов'язано з великими затратами.

1.3. Чисельні методи для математичного моделювання задач цифрової обробки зображень з використанням нових інформаційних операторів

Сучасний етап розвитку технічних наук спостерігає інтенсивне впровадження цифрових технологій, алгоритмічних підходів та методів обробки даних. Інформаційні технології значно розширили можливості збору, аналізу та інтерпретації інформації, що, у свою чергу, зумовлює необхідність розробки нових алгоритмів та чисельних методів для розв'язання актуальних науково-технічних задач. Вдосконалення методів отримання вхідних даних сприяє розвитку математичних моделей, оптимізації їх структури та підвищенню ефективності їхньої реалізації у сучасних комп'ютерних системах.

Математичне моделювання відіграє ключову роль у багатьох наукових і технічних галузях, забезпечуючи інструменти для аналізу та прогнозування складних систем і процесів. Серед різноманітних методів моделювання

особливе місце займають методи багатовимірного інтерполювання, які дозволяють точно оцінювати значення функцій на основі обмеженого набору даних. Це особливо важливо в умовах, коли прямі вимірювання або експерименти є занадто дорогими чи складними. Багатовимірна теорія інтерполяції та апроксимації дозволяє створювати моделі, які адекватно відображають реальні процеси. Досягнення в теорії нових інформаційних операторів відкривають додаткові можливості для удосконалення математичних моделей, підвищуючи їхню точність та ефективність.

Математичне моделювання є фундаментальним інструментом у багатьох наукових і технічних напрямках, оскільки забезпечує засоби для аналізу, прогнозування та оптимізації складних систем і процесів. Одним із ключових напрямів сучасного математичного моделювання є багатовимірне інтерполювання, яке дозволяє відновлювати значення функцій на основі обмеженої вибірки даних. Застосування таких методів є важливим у випадках, коли проведення безпосередніх вимірювань є затратним або складним. Використання нових інформаційних операторів дозволяє значно підвищити точність обчислень, що, своєю чергою, розширює їх можливості у вирішенні практичних задач.

Теорія нових інформаційних операторів створена лауреатом Державної премії України в галузі науки і техніки, доктором фізико-математичних наук, професором О. М. Литвином. Нові інформаційні оператори призначені для відновлення проміжних значень функцій багатьох змінних на основі відомих значень, розташованих на різних геометричних об'єктах (лінії та площини). Теорія нових інформаційних операторів сприяла досягненню значних результатів в багатьох наукових областях, зокрема в математичному моделюванні соціально-економічних і природничих процесів. Використання нових інформаційних операторів дозволяє підвищити свою ефективність в наближеному обчисленні інтегралів від швидко осцилюючих функцій багатьох змінних. Вибір алгоритму обчислення здійснюється з урахуванням специфіки задачі, залежить від типу завдання інформації про функцію та дозволяє

оптимізувати чисельні розрахунки, забезпечити їхню високу точність [15-20].

При наближенні функцій декількох змінних $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 2$, все частіше розглядаються методи, які відновлюють (можливо, наближено) функції $f(x)$ за відомими їх слідами й слідами їх частинних похідних до фіксованого порядку N на M точках m -вимірних ($0 \leq m < n$) поверхонь в \mathbb{R}^n , $M \geq 2$. В роботах [21-23] зазначається, що з метою уніфікації тверджень вважають точки нульвимірними поверхнями, а лінії – одновимірними поверхнями. У випадку $m=0$, $n \geq 1$ інформація про функцію $f(x)$ задається в M точках і такі оператори є класичними операторами наближення, які називаються операторами *інтерполяції* [21-23].

Означення 1.1. [21] У випадку $m=1$, $n \geq 2$ інформація про функцію $f(x)$ задається слідами $f(x)$ та слідами її частинних похідних

$$x \frac{\partial^{|s|} f(x)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_n^{s_n}}, \quad |s| = s_1 + \dots + s_n, \quad 1 \leq |s| \leq N,$$

на M лініях і такі оператори називають операторами *інтерлінації* (*inter* – між, *line* – лінія). У випадку $n \geq 3$, $2 \leq m < 3$ інформація про функцію $f(x)$

задається слідами та $\frac{\partial^s f(x)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_n^{s_n}}, s = s_1 + \dots + s_n, 1 \leq s \leq N$ на M поверхнях в \mathbb{R}^n

($n \geq 3$) і такі оператори наближення називають операторами *інтерфлетації* (*inter* – між, *flat* – поверхня плоска). В зарубіжній літературі для операторів *інтерлінації* та *інтерфлетації* використовується назва «*blending function interpolation*» – «мішана інтерполяція функцій» [21-23].

Зважаючи на те, що *інтерлінація* є узагальненням *інтерполяції*, у теорії *інтерлінації* застосовується така термінологія: «*інтерлінуюча функція*», «*лінії інтерлінації*», «*поверхні інтерфлетації*» тощо.

Використання операторів *інтерлінації* до наближеного обчислення

інтегралів від швидко осцилюючих функцій двох змінних були анонсовані в роботах [24, 25], а в [26] отримано перші результати, а саме оцінки похибки наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є функції двох змінних. Вагомі дослідження було проведено щодо обчислення $2D$ -коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій та висвітлені в роботах [27 – 35]. В статтях було представлено результати дослідження кубатурних формул для наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є на різних класах функцій. Формули використовували оператори інтерлінанти з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих та лінійних сплайнів. В монографіях [9, 10] вперше було висвітлено результати дослідження з точки зору нових інформаційних операторів, зроблено класифікацію кубатурних формул за типом завдання інформації про неосцилюючий множник підінтегральної функції. Директор Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, академік НАНУ Іван Васильович Сергієнко та академік НАНУ Валерій Костянтинович Задірака стали співавторами монографій. У 2010 році результати досліджень в даному напрямку було представлено на конференції «ESF-EMS-ERCOM Conference on Highly Oscillatory Problems From Theory to Applications» в місті Кембридж у Великобританії.

Застосування теорії нових інформаційних операторів до наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій трьох змінних, зокрема на прикладі $3D$ -коефіцієнтів Фур'є, представлено в роботах [36 – 43]. Було розглянуто кубатурні формули з використанням операторів інтерфлетації, інтерлінації та інтерполяції з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих та лінійних сплайнів. Нові інформаційні оператори в якості даних розглядали сліди функції на взаємно перпендикулярних площинах, лініях та значеннях функції в точках. Питання дослідження якості кубатурних формул детально викладено в монографії [11]. У 2016 році результати досліджень було представлено на 7-му Європейському конгресі математиків, у Німеччині в місті Берлін. Застосування нових інформаційних операторів до наближеного обчислення $3D$ -коефіцієнтів Фур'є доповідалося на Міжнародному

математичному конгресі в Бразилії в місті Ріо-де-Жанейро.

Перші спроби наближеного обчислення подвійних та потрійних інтегралів від швидко осцилюючих функцій загального виду з використанням теорії нових інформаційних операторів було представлено в статтях [44 – 49]. Окремим питанням розглядалося наближене обчислення інтегралів від тригонометричних функцій багатьох змінних загального виду [44].

Варто також зауважити, що питання чисельного інтегрування звичайних подвійних та потрійних інтегралів з використанням нових інформаційних операторів, в т.ч. з оптимально вибраними лініями представлено в роботах [50, 52].

В роботі [23] О.М. Литвин представив економні схеми інтерполяції на основі нових інформаційних операторів, а саме операторів інтерфлетації та інтерлінації. Запропоновані алгоритми є ефективними з точки зору кількості використаних значень функції двох чи трьох змінних.

Використання економних схем інтерполяції на основі операторів інтерфлетації та інтерлінації з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих та кусково-лінійних сплайнів для наближеного обчислення $2D$ – та $3D$ –коефіцієнтів Фур'є привело до побудови кубатурних формул, які для досягнення заданої точності вимагали меншу кількість вхідних даних порівняно з класичними алгоритмами. Результати досліджень представлено в монографіях [9, 10, 11].

1.4. Наближене обчислення $2D$ – коефіцієнтів Фур'є у випадку, коли інформація задана на лініях

Розглянемо $H_1^{2,r}(M, \widetilde{M})$, $r=1,2$ – клас дійсних функцій, $r \geq 1$, визначених на $G=[0,1]^2$ і таких, що частинні похідні порядку r по змінній x та y обмежені, тобто

$$\left| f^{(r,0)}(x,y) \right| \leq M, \quad \left| f^{(0,r)}(x,y) \right| \leq M, \quad \left| f^{(r,r)}(x,y) \right| \leq \widetilde{M}, \quad r=1,2.$$

Теорема 1.3. [11] Нехай $f(x, y) \in H_1^{2,r}(M, \widetilde{M})$ та функція задана $N = 2\ell$ слідами на системі взаємно перпендикулярних прямих $f(x_k, y)$, $k = \overline{1, \ell}$, $f(x, y_j)$, $j = \overline{1, \ell}$ в області $G = [0, 1]^2$. Справедлива наступна оцінка на класі:

$$V(H_1^{2,r}(M, \widetilde{M}), m, n) \geq \frac{\widetilde{M}(r!)^2}{144[(2r+1)!]^2} \frac{1}{6^{2r}} \frac{1}{\ell^{2r}} = \frac{\widetilde{M}(r!)^2}{144[(2r+1)!]^2} \frac{1}{3^{2r}} \frac{1}{(N^2)^r},$$

при $\ell \geq \max(2\pi m, 2\pi n)$,

$$V(H_1^{2,r}(M, \widetilde{M}), m, n) \geq \frac{\widetilde{M}(r!)^2}{4[(2r+1)!]^2} \frac{1}{24^{2r+2}} \frac{1}{(mn)^r},$$

при $\ell < \max(2\pi m, 2\pi n)$.

Означення 1.2. Під слідом функції $f(x, y)$ на лініях $x_k = k\Delta - \Delta/2$, $y_j = j\Delta - \Delta/2$, $k, j = \overline{1, \ell}$, $\Delta = 1/\ell$ розуміємо відповідно функції однієї змінної $f(x_k, y)$, $0 \leq y \leq 1$, $f(x, y_j)$, $0 \leq x \leq 1$.

Введемо позначення:

$$h_{0k}(x) = \begin{cases} 1, x \in X_k, \\ 0, x \notin X_k, \end{cases} \quad k = \overline{1, \ell}, \quad H_{0j}(y) = \begin{cases} 1, y \in Y_j, \\ 0, y \notin Y_j, \end{cases} \quad j = \overline{1, \ell},$$

$$X_k = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}], \quad Y_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}],$$

$$x_k = k\Delta - \Delta/2, \quad y_j = j\Delta - \Delta/2, \quad k, j = \overline{1, \ell}, \quad \Delta = 1/\ell.$$

Розглянемо оператор-інтерліант

$$Jf(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y) h_{0k}(x) + \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j) H_{0j}(y) - \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) h_{0k}(x) H_{0j}(y).$$

Для обчислення інтегралів $I_k^2(m, n)$, $k = 1, 2, 3$,

$$I_1^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \sin 2\pi mx \sin 2\pi ny dx dy,$$

$$I_2^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \cos 2\pi mx \cos 2\pi ny dx dy,$$

$$I_3^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{-i2\pi mx} e^{-i2\pi ny} dx dy$$

пропонуються формули:

$$\Phi_1^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 Jf(x, y) \sin 2\pi mx \sin 2\pi ny dx dy,$$

$$\Phi_2^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 Jf(x, y) \cos 2\pi mx \cos 2\pi ny dx dy,$$

$$\Phi_3^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 Jf(x, y) e^{-i2\pi mx} e^{-i2\pi ny} dx dy.$$

Теорема 1.4. [11] Нехай $f(x, y) \in H_1^{2,1}(M, \widetilde{M})$ та функція задана $N = 2\ell$ слідами $f(x_k, y)$, $k = \overline{1, \ell}$, $f(x, y_j)$, $j = \overline{1, \ell}$ на системі взаємно перпендикулярних прямих в області $G = [0, 1]^2$. Кубатурна формула

$$\Phi_1^2(m, n) = \sum_{k=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \sin 2\pi mx dx \int_0^1 f(x_k, y) \sin 2\pi ny dy +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{\ell} \int_0^1 f(x, y_j) \sin 2\pi m x dx \int_{y_j - \frac{1}{2}}^{y_j + \frac{1}{2}} \sin 2\pi n y dy - \\
& - \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) \int_{x_k - \frac{1}{2}}^{x_k + \frac{1}{2}} \sin 2\pi m x dx \int_{y_j - \frac{1}{2}}^{y_j + \frac{1}{2}} \sin 2\pi n y dy,
\end{aligned}$$

$$x_k = k\Delta - \frac{\Delta}{2}, \quad y_j = j\Delta - \frac{\Delta}{2}, \quad k, j = \overline{1, \ell}, \quad \Delta = \frac{1}{\ell}.$$

є оптимальною за порядком точності на класі $H_1^{2,1}(M, \widetilde{M})$ при $\ell \geq \max(2\pi m, 2\pi n)$, причому справедливі наступні оцінки:

$$V\left(H_1^{2,1}(M, \widetilde{M}), \Phi_1^2(m, n)\right) \leq \frac{\widetilde{M}}{16\ell^2} = \frac{\widetilde{M}}{4N^2},$$

$$V\left(H_1^{2,1}(M, \widetilde{M}), m, n\right) \geq \frac{\widetilde{M}}{186624 \cdot \ell^2} = \frac{\widetilde{M}}{46656 \cdot N^2}.$$

Нехай

$$h_{10}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_0, \\ \frac{x - x_1}{-\Delta}, & x_0 < x < x_1, \\ 0, & x \geq x_1, \end{cases} \quad H_{10}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq y_0, \\ \frac{y - y_1}{-\Delta}, & y_0 < y < y_1, \\ 0, & y \geq y_1, \end{cases}$$

$$h_{1k}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{k-1}, \\ \frac{x - x_{k-1}}{\Delta}, & x_{k-1} < x < x_k, \\ \frac{x - x_{k+1}}{-\Delta}, & x_k \leq x < x_{k+1}, \\ 0, & x \geq x_{k+1}, \end{cases} \quad k = \overline{1, \ell-1}, \quad H_{1j}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq y_{j-1}, \\ \frac{y - y_{j-1}}{\Delta}, & y_{j-1} < y < y_j, \\ \frac{y - y_{j+1}}{-\Delta}, & y_j \leq y < y_{j+1}, \\ 0, & y \geq y_{j+1}, \end{cases} \quad j = \overline{1, \ell-1},$$

$$h_{1\ell}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{\ell-1}, \\ \frac{x - x_{\ell-1}}{\Delta}, & x_{\ell-1} < x < x_{\ell}, \\ 0, & x \geq x_{\ell}, \end{cases} \quad H_{1\ell}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq y_{\ell-1}, \\ \frac{y - y_{\ell-1}}{\Delta}, & y_{\ell-1} < y < y_{\ell}, \\ 0, & y \geq y_{\ell}, \end{cases}$$

$$x_k = k\Delta, \quad y_j = j\Delta, \quad \Delta = \frac{1}{\ell}.$$

Розглянемо оператор-інтерліант

$$Pf(x, y) = \sum_{k=0}^{\ell} h_{1k}(x) f(x_k, y) + \sum_{j=0}^{\ell} H_{1j}(y) f(x, y_j) - \sum_{k=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\ell} f(x_k, y_j) h_{1j}(x) H_{1j}(y),$$

Для обчислення інтегралів $I_p^2(m, n)$, $p = 1, 2, 3$ пропонуються кубатурні формули

$$\Phi_7^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 Pf(x, y) \sin 2\pi mx \sin 2\pi ny dx dy,$$

$$\Phi_8^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 Pf(x, y) \cos 2\pi mx \cos 2\pi ny dx dy,$$

$$\Phi_9^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 Pf(x, y) e^{-i2\pi mx} e^{-i2\pi ny} dx dy.$$

Теорема 1.5. [11] Нехай $f(x, y) \in H_1^{2,1}(M, \widetilde{M})$ та функція задана $N = 2(\ell + 1)$ слідами $f(x_k, y)$, $k = \overline{0, \ell}$, $f(x, y_j)$, $j = \overline{0, \ell}$ на системі взаємно перпендикулярних прямих в області $G = [0, 1]^2$. Кубатурна формула

$$\begin{aligned} \Phi_7^2(m, n) = & \sum_{k=0}^{\ell} \int_0^1 h_{1k}(x) \sin 2\pi m x dx \int_0^1 f(x_k, y) \sin 2\pi n y dy + \\ & + \sum_{j=0}^{\ell} \int_0^1 H_{1j}(y) \sin 2\pi n y dy \int_0^1 f(x, y_j) \sin 2\pi m x dx - \\ & - \sum_{k=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\ell} f(x_k, y_j) \int_0^1 h_{1k}(x) \sin 2\pi m x dx \int_0^1 H_{1j}(y) \sin 2\pi n y dy, \end{aligned}$$

$x_k = k\Delta$, $y_j = j\Delta$, $\Delta = \frac{1}{\ell}$, де $h_{1k}(x)$, $H_{1j}(y)$, – сплайни 1-го порядку, є оптимальною за порядком точності на класі $H_1^{2,1}$ при $\ell \geq \max(2\pi m, 2\pi n)$, причому справедливі наступні оцінки:

$$V\left(H_1^{2,1}(M, \widetilde{M}), \Phi_7^2(m, n)\right) \leq \frac{\widetilde{M}}{9\ell^2}, \quad V\left(H_1^{2,1}(M, \widetilde{M}), m, n\right) \geq \frac{\widetilde{M}}{186624 \cdot \ell^2} = \frac{\widetilde{M}}{46656 \cdot N^2}.$$

1.5. Наближене обчислення $2D$ – коефіцієнтів Фур'є у випадку, коли інформація задана в точках

Розглянемо $H_1^{2,r}(M)$ – клас дійсних функцій $r = 1, 2$, визначених на $G = [0, 1]^2$ і таких, що частинні похідні порядку r по змінній x та y обмежені, тобто

$$\left| f^{(r,0)}(x, y) \right| \leq M, \quad \left| f^{(0,r)}(x, y) \right| \leq M, \quad \left| f^{(r,r)}(x, y) \right| \leq \widetilde{M}$$

та значення $f_{kj} = f(x_k, y_j)$, $k = \overline{0, m_1}$, $j = \overline{0, m_2}$ задані не більше, ніж в $N = (m_1 + 1)(m_2 + 1)$ фіксованих вузлових точках $(x_k, y_j) \in G = [0, 1]^2$.

Введемо позначення

$$X_k = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}], \quad Y_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}], \quad \tilde{X}_{\tilde{k}} = [\tilde{x}_{\tilde{k}-1/2}, \tilde{x}_{\tilde{k}+1/2}], \quad \tilde{Y}_{\tilde{j}} = [\tilde{y}_{\tilde{j}-1/2}, \tilde{y}_{\tilde{j}+1/2}],$$

$$h_{0k}(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_k, \\ 0, & x \notin X_k, \end{cases} \quad k = \overline{1, \ell}, \quad H_{0j}(y) = \begin{cases} 1, & y \in Y_j, \\ 0, & y \notin Y_j, \end{cases} \quad j = \overline{1, \ell},$$

$$\tilde{h}_{0\tilde{k}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \tilde{X}_{\tilde{k}}, \\ 0, & x \notin \tilde{X}_{\tilde{k}}, \end{cases} \quad \tilde{k} = \overline{1, \ell^2}, \quad \tilde{H}_{0\tilde{j}}(y) = \begin{cases} 1, & y \in \tilde{Y}_{\tilde{j}}, \\ 0, & y \notin \tilde{Y}_{\tilde{j}}, \end{cases} \quad \tilde{j} = \overline{1, \ell^2},$$

$$x_k = k\Delta - \frac{\Delta}{2}, \quad y_j = j\Delta - \frac{\Delta}{2}, \quad k, j = \overline{1, \ell}, \quad \Delta = \frac{1}{\ell},$$

$$\tilde{x}_{\tilde{k}} = \tilde{k}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2}, \quad \tilde{y}_{\tilde{j}} = \tilde{j}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2}, \quad \tilde{k}, \tilde{j} = \overline{1, \ell^2}, \quad \Delta_1 = \frac{1}{\ell^2}.$$

Розглянемо оператор-інтерліант

$$Jf(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y) h_{0k}(x) + \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j) H_{0j}(y) - \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) h_{0k}(x) H_{0j}(y)$$

та оператор-інтерполянт, побудований на основі сплайн-інтерліанта $Jf(x, y)$:

$$\tilde{J}f(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^2} f(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}}) h_{0k}(x) \tilde{H}_{0\tilde{j}}(y) + \sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^2} \sum_{j=1}^{\ell} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j) \tilde{h}_{0\tilde{k}}(x) H_{0j}(y) -$$

$$-\sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) h_{0k}(x) H_{0j}(y).$$

Для обчислення інтегралів $I_k^2(m, n)$, $k = 1, 2, 3$ пропонуються формули:

$$\tilde{\Phi}_1^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{f}(x, y) \sin 2\pi m x \sin 2\pi n y dx dy,$$

$$\tilde{\Phi}_2^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{f}(x, y) \cos 2\pi m x \cos 2\pi n y dx dy,$$

$$\tilde{\Phi}_3^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{f}(x, y) e^{-i2\pi m x} e^{-i2\pi n y} dx dy.$$

Теорема 1.6. [53 с. 67] Нехай $f(x, y) \in H_1^{2,1}(M)$ та значення $f_{kj} = f(x_k, y_j)$, $k = \overline{1, m_1}$, $j = \overline{1, m_2}$, задані не більше, ніж в $N = m_1 m_2$, $m_1 = m_2 = \ell^2$, $N = \ell^4$ фіксованих вузлових точках $(x_k, y_j) \in G$. Кубатурна формула $\tilde{\Phi}_1^2(m, n)$ для обчислення інтеграла $I_1^2(m, n)$ є оптимальною за порядком точності при $\ell \geq 2\pi m$, $m = n$, причому $V\left(H_1^{2,1}(M), \tilde{\Phi}_1^2(m, n)\right) \leq \frac{M}{4} \frac{1}{\ell^2} = \frac{1}{4\sqrt{N}}$. Для досягнення похибки $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ кубатурною формулою використовується не $O(\ell^4) = O(N)$ значень функції, а $O(\ell^3) = O\left(N^{\frac{3}{4}}\right)$.

Нехай $m_1 = m_2 = \ell^2$ та $N = (\ell^2 + 1)(\ell^2 + 1)$. Введемо позначення

$$h_{10}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_0, \\ \frac{x - x_1}{-\Delta}, & x_0 < x < x_1, \\ 0, & x \geq x_1, \end{cases} \quad H_{10}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq y_0, \\ \frac{y - y_1}{-\Delta}, & y_0 < y < y_1, \\ 0, & y \geq y_1, \end{cases}$$

$$h_{1k}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{k-1}, \\ \frac{x - x_{k-1}}{\Delta}, & x_{k-1} < x < x_k, \\ \frac{x - x_{k+1}}{-\Delta}, & x_k \leq x < x_{k+1}, \\ 0, & x \geq x_{k+1}, \end{cases} \quad k = \overline{1, \ell-1},$$

$$H_{1j}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq y_{j-1}, \\ \frac{y - y_{j-1}}{\Delta}, & y_{j-1} < y < y_j, \\ \frac{y - y_{j+1}}{-\Delta}, & y_j \leq y < y_{j+1}, \\ 0, & y \geq y_{j+1}, \end{cases} \quad j = \overline{1, \ell-1},$$

$$h_{1\ell}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{\ell-1}, \\ \frac{x - x_{\ell-1}}{\Delta}, & x_{\ell-1} < x < x_\ell, \\ 0, & x \geq x_\ell, \end{cases} \quad H_{1\ell}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq y_{\ell-1}, \\ \frac{y - y_{\ell-1}}{\Delta}, & y_{\ell-1} < y < y_\ell, \\ 0, & y \geq y_\ell, \end{cases}$$

$$x_k = k\Delta, \quad y_j = j\Delta, \quad \Delta = \frac{1}{\ell}.$$

$$\tilde{h}_{10}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \tilde{x}_0, \\ \frac{x - \tilde{x}_1}{-\Delta}, & \tilde{x}_0 < x < \tilde{x}_1, \\ 0, & x \geq \tilde{x}_1, \end{cases} \quad \tilde{H}_{10}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq \tilde{y}_0, \\ \frac{y - \tilde{y}_1}{-\Delta}, & \tilde{y}_0 < y < \tilde{y}_1, \\ 0, & y \geq \tilde{y}_1, \end{cases}$$

$$\tilde{h}_{1k}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \tilde{x}_{\tilde{k}-1}, \\ \frac{x - \tilde{x}_{\tilde{k}-1}}{\Delta_1}, & \tilde{x}_{\tilde{k}-1} < x < \tilde{x}_{\tilde{k}}, \\ \frac{x - \tilde{x}_{\tilde{k}+1}}{-\Delta_1}, & \tilde{x}_{\tilde{k}} \leq x < \tilde{x}_{\tilde{k}+1}, \\ 0, & x \geq \tilde{x}_{\tilde{k}+1}, \end{cases} \quad \tilde{k} = \overline{1, \ell^2 - 1},$$

$$\tilde{H}_{1\tilde{j}}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq \tilde{y}_{\tilde{j}-1}, \\ \frac{y - \tilde{y}_{\tilde{j}-1}}{\Delta_1}, & \tilde{y}_{\tilde{j}-1} \leq y < \tilde{y}_{\tilde{j}}, \\ \frac{y - \tilde{y}_{\tilde{j}+1}}{-\Delta_1}, & \tilde{y}_{\tilde{j}} \leq y < \tilde{y}_{\tilde{j}+1}, \\ 0, & y \geq \tilde{y}_{\tilde{j}+1}, \end{cases} \quad \tilde{j} = \overline{1, \ell^2 - 1},$$

$$\tilde{h}_{1\ell^2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \tilde{x}_{\ell^2-1}, \\ \frac{x - \tilde{x}_{\ell^2}}{\Delta}, & \tilde{x}_{\ell^2-1} \leq x < \tilde{x}_{\ell^2}, \\ 0, & x \geq \tilde{x}_{\ell^2}, \end{cases} \quad \tilde{H}_{1\ell^2}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq \tilde{y}_{\ell^2-1}, \\ \frac{y - \tilde{y}_{\ell^2}}{\Delta}, & \tilde{y}_{\ell^2-1} \leq y < \tilde{y}_{\ell^2}, \\ 0, & y \geq \tilde{y}_{\ell^2}, \end{cases}$$

$$\tilde{x}_{\tilde{k}} = \tilde{k}\Delta_1, \quad \tilde{y}_{\tilde{j}} = \tilde{j}\Delta_1, \quad \tilde{k}, \tilde{j} = \overline{0, \ell^2}, \quad \Delta_1 = \frac{1}{\ell^2}.$$

Розглянемо оператор-інтерліант $Pf(x, y)$,

$$Pf(x, y) = \sum_{k=0}^{\ell} h_{1k}(x) f(x_k, y) + \sum_{j=0}^{\ell} H_{1j}(y) f(x, y_j) - \sum_{k=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\ell} f(x_k, y_j) h_{1k}(x) H_{1j}(y),$$

та $\tilde{P}f(x, y)$ - оператор-інтерполянт, побудований на основі сплайн-інтерліаннта $Pf(x, y)$

$$\begin{aligned} \tilde{P}f(x, y) = & \sum_{k=0}^{\ell} \sum_{\tilde{j}=0}^{\ell^2} f(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}}) h_{1k}(x) \tilde{H}_{1\tilde{j}}(y) + \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{\tilde{k}=0}^{\ell^2} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j) \tilde{h}_{1\tilde{k}}(x) H_{1j}(y) - \\ & - \sum_{k=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\ell} f(x_k, y_j) h_{1k}(x) H_{1j}(y), \end{aligned}$$

які мають наступні властивості [21, с. 171]:

$$Pf(x_k, y) = f(x_k, y), \quad k = \overline{0, \ell}, \quad Pf(x, y_j) = f(x, y_j), \quad j = \overline{0, \ell},$$

$$|f(x, y) - Pf(x, y)| = O\left(\frac{1}{\ell^{2r}}\right) = O(\Delta^{2r}), \quad r = 1, 2,$$

$$\tilde{P}f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y) = f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y), \quad \tilde{k} = \overline{0, \ell^2}, \quad \tilde{P}f(x, \tilde{y}_{\tilde{j}}) = f(x, \tilde{y}_{\tilde{j}}), \quad \tilde{j} = \overline{0, \ell^2},$$

$$|f(x, y) - \tilde{P}f(x, y)| = O\left(\frac{1}{\ell^{2r}}\right) = O(\Delta^{2r}), \quad r = 1, 2, \quad \forall (x, y) \in G.$$

Для обчислення інтегралів $I_k^2(m, n)$, $k = 1, 2, 3$ пропонуються формули:

$$\tilde{\Phi}_7^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{P}f(x, y) \sin 2\pi mx \sin 2\pi ny dx dy,$$

$$\tilde{\Phi}_8^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{P}f(x, y) \cos 2\pi mx \cos 2\pi ny dx dy,$$

$$\tilde{\Phi}_9^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{P}f(x, y) e^{-i2\pi mx} e^{-i2\pi ny} dx dy.$$

Теорема 1.7. [11] Нехай $f(x, y) \in H_1^{2,r}(M, \widetilde{M})$, $r = 1, 2$ та значення $f_{kj} = f(x_k, y_j)$, $k = \overline{0, m_1}$, $j = \overline{0, m_2}$ задані не більше, ніж в $N = (m_1 + 1)(m_2 + 1) = (\ell^2 + 1)(\ell^2 + 1)$ фіксованих вузлових точках $(x_k, y_j) \in G = [0, 1]^2$. Справедлива наступна оцінки зверху для похибки наближення $I_1^2(m, n)$ кубатурою формулою $\tilde{\Phi}_7^2(m, n)$ при $m = n$, $\ell \geq 2\pi m$:

$$V(H_1^{2,r}(M, \widetilde{M}), \tilde{\Phi}_7^2(m, n)) \leq \left(\widetilde{M} \frac{4}{[(r+2)!]^2} + M \frac{4}{(r+2)!} \right) \frac{1}{\ell^{2r}}.$$

Зауваження 1.1. Для досягнення похибки $O\left(\frac{1}{\ell^{2r}}\right)$ кубатурною формулою $\tilde{\Phi}_7^2(m,n)$ використовується не $O(\ell^4)=O(N)$, як в класичній формулі значень функції, а $O(\ell^3)=O\left(N^{\frac{3}{4}}\right)$.

1.6. Наближене обчислення 3D – коефіцієнтів Фур'є у випадку, коли інформація задана на площинах

Розглянемо $H_1^{3,r}(M, \tilde{M})$, $r=1,2$ – клас дійсних функцій, визначених на $G=[0,1]^3$ і таких, що $|f^{(r,0,0)}(x,y,z)| \leq M$, $|f^{(0,r,0)}(x,y,z)| \leq M$, $|f^{(0,0,r)}(x,y,z)| \leq M$, $|f^{(r,r,r)}(x,y,z)| \leq \tilde{M}$.

Теорема 1.8. [11] Нехай функція $f(x,y,z) \in H_1^{3,r}(M, \tilde{M})$, $r=1,2$ та задана $N=3\ell$ слідами на системі взаємно перпендикулярних площин $x=x_\alpha, \alpha=\overline{1,\ell}$, $y=y_\beta, \beta=\overline{1,\ell}$, $z=z_\gamma, \gamma=\overline{1,\ell}$ в області $G=[0,1]^3$. Справедлива наступна оцінка для похибки обчислення інтегралів $I_\mu^3(m,n,p)$, $\mu=1,2,3$ на класі:

$$V\left(H_1^{3,r}(M, \tilde{M}), m, n, p\right) \geq \frac{\tilde{M}(r!)^3}{1728[(2r+1)!]^3} \frac{1}{2^{3r}} \frac{1}{(3\ell)^{3r}} = \frac{\tilde{M}(r!)^3}{1728[(2r+1)!]^3} \frac{1}{2^{3r}} \frac{1}{N^{3r}},$$

при $\ell \geq \max(2\pi m, 2\pi n, 2\pi p)$,

$$V\left(H_1^{3,r}(M, \tilde{M}), m, n, p\right) \geq \frac{\tilde{M}(r!)^3}{8[(2r+1)!]^3} \frac{1}{24^{3r+3}} \frac{1}{(mnp)^r},$$

при $\ell < \max(2\pi m, 2\pi n, 2\pi p)$.

Означення 1.3. Під слідами функції $f(x,y,z)$ на площинах $x_k = k\Delta - \Delta/2$, $y_j = j\Delta - \Delta/2$, $z_s = s\Delta - \Delta/2$, $k,j,s=\overline{1,\ell}$, $\Delta=1/\ell$ розуміємо відповідно функції двох

змінних $f(x_k, y, z)$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, $f(x, y_j, z)$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$,
 $f(x, y, z_s)$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Введемо позначення:

$$X_k = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}], \quad Y_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}], \quad Z_s = [z_{s-1/2}, z_{s+1/2}],$$

$$h_{1k}^0(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_k, \\ 0, & x \notin X_k, \end{cases} \quad h_{2j}^0(y) = \begin{cases} 1, & y \in Y_j, \\ 0, & y \notin Y_j, \end{cases} \quad h_{3s}^0(z) = \begin{cases} 1, & z \in Z_s, \\ 0, & z \notin Z_s, \end{cases}$$

$$x_k = k\Delta - \frac{\Delta}{2}, \quad y_j = j\Delta - \frac{\Delta}{2}, \quad z_s = s\Delta - \frac{\Delta}{2}, \quad \Delta = \frac{1}{\ell}, \quad k, j, s = \overline{1, \ell}.$$

Розглянемо оператори

$$J_1 f(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y, z) h_{1k}^0(x), \quad J_2 f(x, y, z) = \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j, z) h_{2j}^0(y),$$

$$J_3 f(x, y, z) = \sum_{s=1}^{\ell} f(x, y, z_s) h_{3s}^0(z).$$

Розглянемо оператор кусково-сталого інтерфлетації

$$Jf(x, y, z) = J_1 f(x, y, z) + J_2 f(x, y, z) + J_3 f(x, y, z) - \\ - J_1 J_2 f(x, y, z) - J_2 J_3 f(x, y, z) - J_1 J_3 f(x, y, z) + J_1 J_2 J_3 f(x, y, z),$$

для якого виконуються властивості

$$Jf(x_k, y, z) = f(x_k, y, z), \quad k = \overline{1, \ell}, \quad Jf(x, y_j, z) = f(x, y_j, z), \quad j = \overline{1, \ell},$$

$$Jf(x, y, z_s) = f(x, y, z_s), \quad s = \overline{1, \ell}.$$

Для обчислення інтегралів

$$I_1^3(m, n, p) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, z) \sin 2\pi m x \sin 2\pi n y \sin 2\pi p z dx dy dz,$$

$$I_2^3(m, n, p) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, z) \cos 2\pi mx \cos 2\pi ny \cos 2\pi pz dx dy dz ,$$

$$I_3^3(m, n, p) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, z) e^{-i2\pi mx} e^{-i2\pi ny} e^{-i2\pi pz} dx dy dz$$

пропонуються формули:

$$\Phi_1^3(m, n, p) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 Jf(x, y, z) \sin 2\pi mx \sin 2\pi ny \sin 2\pi pz dx dy dz ,$$

$$\Phi_2^3(m, n, p) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 Jf(x, y, z) \cos 2\pi mx \cos 2\pi ny \cos 2\pi pz dx dy dz ,$$

$$\Phi_3^3(m, n, p) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 Jf(x, y, z) e^{-i2\pi mx} e^{-i2\pi ny} e^{-i2\pi pz} dx dy dz .$$

Теорема 1.9. [11] Нехай $f(x, y, z) \in H_1^{3,1}(M, \widetilde{M})$, та функція задана $N = 3\ell$ слідами $f(x_k, y, z)$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, $f(x, y_j, z)$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, $f(x, y, z_s)$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ на системі взаємно перпендикулярних площин $x_k = k\Delta - \Delta/2$, $y_j = j\Delta - \Delta/2$, $z_s = s\Delta - \Delta/2$, $k, j, s = \overline{1, \ell}$, $\Delta = 1/\ell$ в області $G = [0, 1]^3$. Кубатурна формула $\Phi_1^3(m, n, p)$ обчислення $I_1^3(m, n, p)$ є оптимальною за порядком точності на класі $H_1^{3,1}(M, \widetilde{M})$ при $\ell \geq \max(2\pi m, 2\pi n, 2\pi p)$, причому справедливі наступні оцінки:

$$V(H_1^{3,1}(M, \widetilde{M}), m, n, p) \geq \frac{\widetilde{M}}{1728[(3)!]^3} \frac{1}{2^3} \frac{1}{(3\ell)^3} = \frac{\widetilde{M}}{80621568\ell^3} ,$$

$$V(H_1^{3,1}(M, \widetilde{M}), \Phi_1^3(m, n, p)) \leq \frac{\widetilde{M}}{64\ell^3} .$$

Результати щодо оптимального інтегрування швидко осцилюючих функцій можна знайти в [54-59], в [60-68] – результати застосування нових інформаційних операторів в задачах чисельного інтегрування швидко

осцилюючих функцій багатьох змінних з використанням нових інформаційних операторів, а в [69-73], застосування теорії інтерлінації та інтерфлетації в моделюванні задач цифрової обробки сигналів та зображень, зокрема комп'ютерної томографії [74-76].

Висновки до розділу 1

1. Існують оптимальні за порядком точності, асимптотично оптимальні та оптимальні за точністю квадратурні та кубатурні формули наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій однієї та багатьох змінних, які використовуються в математичному моделюванні задач цифрової обробки зображень. При побудові кубатурних формул використовуються, як правило, значення неосцилюючого множника підінтегральної функції в точках.

2. Відомі кубатурні формули наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій двох змінних, в яких при побудові формули в якості даних приймають участь сліди функції та її похідні на лініях ректангуляції. Питання моделювання задач цифрової обробки зображень з використанням кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій двох та трьох змінних у випадку, коли інформація про функцію задана її слідами на системі взаємно перпендикулярних ліній та площин відповідно досліджено на прикладі коефіцієнтів Фур'є. Ефективним апаратом при розв'язанні цієї задачі є застосування теорії інтерлінації та інтерфлетації функцій.

3. При розв'язуванні задач цифрової обробки зображень виникає необхідність обчислювати інтеграли від швидко осцилюючих функцій загального виду (іррегулярний випадок) при різних типах задання функції, зокрема, коли значення неосцилюючого множника підінтегральної функції задаються знаменнями функції на площинах або лініях. Важливо, щоб побудовані кубатурні формули, були оптимальними за порядком точності.

РОЗДІЛ 2

ПОТРІЙНІ ІНТЕГРАЛИ ВІД ШВИДКО ОСЦИЛЮЮЧИХ ФУНКЦІЙ ЗАГАЛЬНОГО ВИДУ В МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ЗАДАЧ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ ЗОБРАЖЕНЬ

Чисельне інтегрування функцій багатьох змінних широко використовується в математичному моделюванні інженерних задач [77-92], зокрема в [93-97] висвітлено сучасні проблеми цифрової обробки зображень.

Більше уваги саме інтегруванню швидко осцилюючих функцій, побудові відповідних кубатурних формул та їх дослідженню присвячені роботи [98-104].

Більш складним та менш дослідженим питанням є наближене обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій багатьох змінних в загальному вигляді.

Даний розділ має на меті представити оптимальну за порядком точності кубатурну формулу наближеного обчислення потрійного інтегралу від швидко осцилюючих функцій загального виду на класі диференційовних функцій. Інформація про функції буде задаватися слідами на системах взаємно перпендикулярних площин.

2.1 Оцінка знизу для похибки чисельного інтегрування на класі $H^{3,r}(M, \widetilde{M})$

Для наближеного обчислення інтегралу

$$I(f, g, \omega) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, z) \sin \omega g(x, y, z) dx dy dz \quad (2.1)$$

розглянемо оптимальну за порядком точності кубатурну формулу на класі диференційовних функцій, яка в своїй побудові використовує значення функції $f(x, y, z)$ та $g(x, y, z)$ на площинах

$$x_k = k\Delta_1 - \Delta_1 / 2, \quad y_j = j\Delta_1 - \Delta_1 / 2, \quad z_s = s\Delta_1 - \Delta_1 / 2, \quad k, j, s = \overline{1, \ell_1}, \quad \Delta_1 = 1 / \ell_1,$$

$$\tilde{x}_p = p\Delta_2 - \Delta_2 / 2, \quad \tilde{y}_q = q\Delta_2 - \Delta_2 / 2, \quad \tilde{z}_r = r\Delta_2 - \Delta_2 / 2, \quad p, q, r = \overline{1, \ell_2}, \quad \Delta_2 = 1 / \ell_2.$$

Нехай $f(x, y, z) \in F$, $g(x, y, z) \in G$, F , G — множини функцій, визначених в області $[a, b] \times [a, b] \times [a, b]$. Розглянемо L_N — множину всіх кубатурних формул $l_N(f, g)$, що використовують інформацію про значення функцій $f(x, y, z)$ та $g(x, y, z)$ не більше ніж на N площинах. Введемо величини

$$R_N(f, g, \omega, l_N) = |I(f, g, \omega) - l_N(f, g)|,$$

$$R_N(F, G, \omega, l_N) = \sup_{f \in F, g \in G} R_N(f, g, \omega, l_N),$$

$$R_N(F, G, \omega) = \inf_{l_N \in L_N} R_N(F, G, \omega, l_N).$$

Означення 2.1. Кубатурна формула $l_N^*(f, g)$, на якій досягається $R_N(F, G, \omega)$, називається оптимальною за точністю кубатурною формулою.

Означення 2.2. Якщо $R_N(F, G, \omega, \bar{l}_N) \leq R_N(F, G, \omega) + \eta$, $\eta > 0$, то \bar{l}_N є оптимальною за точністю формулою обчислення $I(f, g, \omega)$ з точністю до η .

Означення 2.3. Якщо $\eta = o(R_N)$ або $\eta = O(R_N)$, то \bar{l}_N називається оптимальною за порядком точності.

На класі функцій $H^{3,r}(M, \tilde{M})$ таких, що $|u^{(r,0,0)}(x, y, z)| \leq M$, $|u^{(0,r,0)}(x, y, z)| \leq M$, $|u^{(0,0,r)}(x, y, z)| \leq M$, $|u^{(r,r,r)}(x, y, z)| \leq \tilde{M}$ отримано оцінку знизу для похибки чисельного інтегрування.

Означення 2.4. Під слідом функції $f(x, y, z)$ на площинах $x_k = k\Delta_1 - \Delta_1 / 2$, $y_j = j\Delta_1 - \Delta_1 / 2$, $z_s = s\Delta_1 - \Delta_1 / 2$, $k, j, s = \overline{1, \ell_1}$, $\Delta_1 = 1 / \ell_1$ розуміємо функції двох змінних $f(x_k, y, z)$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, $f(x, y_j, z)$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, $f(x, y, z_s)$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Означення 2.5. Під слідом функції $g(x, y, z)$ на площинах

$$\tilde{x}_p = p\Delta_2 - \Delta_2 / 2, \quad \tilde{y}_q = q\Delta_2 - \Delta_2 / 2, \quad \tilde{z}_r = r\Delta_2 - \Delta_2 / 2, \quad p, q, r = \overline{1, \ell_2}, \quad \Delta_2 = 1 / \ell_2$$

розуміємо функції двох змінних $g(\tilde{x}_p, y, z)$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, $g(x, \tilde{y}_q, z)$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, $g(x, y, \tilde{z}_r)$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Теорема 2.1. Нехай $f(x, y, z)$, $g(x, y, z) \in H^{3,r}(M, \widetilde{M})$, функції $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ задані слідами на $N = 3\ell_1 + 3\ell_2$ відповідних системах взаємно перпендикулярних площин в області $G = [0, 1]^3$, тоді при $\ell_1 = \ell_2 = \ell$

$$R_N(H^{3,r}(M, \widetilde{M}), H^{3,r}(M, \widetilde{M}), \omega) \geq K \max\left\{1/\ell^{3r}, \min\left\{1, |\omega|/\ell^{3r}\right\}\right\}.$$

Доведення. Через K, K_1, K_2, K_3, K_4 позначимо константи, які залежать від r, \widetilde{M} . Нехай $\psi_r(x, b-a) = (x-a)^r (b-x)^r$, тоді $|\psi_r(x, b-a)| \leq C(r)(b-a)^r$,

$$C(r) = \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \Phi_r^{(r)}(t) \right| = r!,$$

$$\int_a^b \psi_r(x, b-a) dx = c_1(r)(b-a)^{2r+1} = \frac{r!r!}{(2r+1)!} (b-a)^{2r+1},$$

$$\Phi_r(t) = t^r (1-t)^r, \quad c_1(r) = \int_0^1 \Phi_r(t) dt.$$

Область $G = [0, 1]^3$ розіб'ємо на підобласті:

$$\left[x_0^1, x_0^1 + h \right] \times \left[y_0^1, y_0^1 + h \right] \times \left[z_0^1, z_0^1 + h \right],$$

$$\left[x_1^1, x_1^1 + h \right] \times \left[y_1^1, y_1^1 + h \right] \times \left[z_1^1, z_1^1 + h \right], \dots$$

$$\left[x_{\ell-1}^1, x_{\ell-1}^1 + h \right] \times \left[y_{\ell-1}^1, y_{\ell-1}^1 + h \right] \times \left[z_{\ell-1}^1, z_{\ell-1}^1 + h \right],$$

$$\left[x_0^2, x_0^2 + h \right] \times \left[y_0^2, y_0^2 + h \right] \times \left[z_0^2, z_0^2 + h \right],$$

$$\left[x_1^2, x_1^2 + h \right] \times \left[y_1^2, y_1^2 + h \right] \times \left[z_1^2, z_1^2 + h \right], \dots$$

$$\left[x_{\ell-1}^2, x_{\ell-1}^2 + h \right] \times \left[y_{\ell-1}^2, y_{\ell-1}^2 + h \right] \times \left[z_{\ell-1}^2, z_{\ell-1}^2 + h \right], \quad h = \frac{1}{4\ell}.$$

Розглянемо функцію

$$f^*(x, y, z) = \frac{\widetilde{M}}{\widetilde{C}(r)h^{3r}} \psi_r \left(x, x_k^1, x_k^1 + h \right) \psi_r \left(y, y_q^1, y_q^1 + h \right) \psi_r \left(z, z_s^1, z_s^1 + h \right),$$

$\widetilde{C}(r) = C^3(r)$, на тих підобластях, куди не попали площини інтегрування кубатурної формули, а на всіх інших $f^*(x, y, z) = 0$. Позначимо через $\chi(x)$ нескінченно диференційну на числовій прямій функцію. Вона приймає значення 0 при $x \leq 0$, $x \geq 1$, значення 1 при $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$, а також $0 < \chi(x) < 1$ при $0 < x < \frac{1}{4}$, $\frac{3}{4} < x < 1$.

Нехай $C_0 = \max \left\{ 1, \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \chi^{(r)}(x) \right| \right\}$, а D_1 — число, таке що $\text{sign} D_1 = \text{sign} \omega$, $0 < D_1 < 1$,

$\frac{|D_1| \widetilde{M}}{\widetilde{C}(r)4^{6r}} \leq \frac{\pi}{2}$. Число D_2 визначається наступними умовами: якщо $\frac{\widetilde{M}}{C_0^3 4^{6r}} \leq \frac{\pi}{2}$, то D_2

задовольняє співвідношенням $\text{sign} D_2 = \text{sign} \omega$, $\frac{\omega}{\ell^{3r}} D_2 = 1$, а якщо $\frac{\widetilde{M}}{C_0^3 4^{6r}} > \frac{\pi}{2}$, то маємо

$$\text{sign} D_2 = \text{sign} \omega, \quad \frac{\omega D_2 \widetilde{M}}{C_0^3} h^{3r} = \frac{\pi}{2}.$$

Визначимо функцію

$$\tau(x, y, z) = \frac{\widetilde{M} D_1}{\widetilde{C}(r)h^{3r}} \psi_r \left(x, x_k^2, x_k^2 + h \right) \psi_r \left(y, y_q^2, y_q^2 + h \right) \psi_r \left(z, z_s^2, z_s^2 + h \right),$$

при $\ell \geq |\omega|^{1/3r}$, та

$$\tau(x, y, z) = \frac{\widetilde{M}D_2}{C_0^3} h^{3r} \chi\left(\frac{x-x_k^2}{h}\right) \chi\left(\frac{y-y_q^2}{h}\right) \chi\left(\frac{z-z_s^2}{h}\right), \text{ при } \ell < |\omega|^{1/3r}$$

на тих підобластях, куди не попали площини інтегрування кубатурної формули, а на всіх інших $\tau(x, y, z) = 0$.

Позначимо

$$I_1 = I_1(\omega, f^*, \tau) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\widetilde{M} + f^*(x, y, z)}{2} e^{i\omega\tau(x, y, z)} dx dy dz,$$

$$I_2 = I_2(\omega, f^*, \tau) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\widetilde{M} - f^*(x, y, z)}{2} e^{-i\omega\tau(x, y, z)} dx dy dz.$$

Тоді $I_1 - I_2 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f^*(x, y, z) dx dy dz + i\widetilde{M} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sin(\omega\tau(x, y, z)) dx dy dz$. Маємо:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f^*(x, y, z) dx dy dz = \frac{\widetilde{M}}{\widetilde{C}(r)} \sum_{k=0}^{\ell-1} \sum_{q=0}^{\ell-1} \sum_{s=0}^{\ell-1} \frac{c_1^3(r) h^{6r+3}}{h^{3r}} = \frac{\widetilde{M} \cdot c_1^3(r)}{\widetilde{C}(r) 4^{3r+3} \ell^{3r}} = \frac{K_1}{\ell^{3r}}.$$

Нехай $\psi_{1r} = \psi_r(x, x_k^2, x_k^2 + h)$, $\psi_{2r} = \psi_r(y, y_q^2, y_q^2 + h)$, $\psi_{3r} = \psi_r(z, z_s^2, z_s^2 + h)$ і

$\max_{x_k^2 \leq x \leq x_k^2 + h} \psi_{1r} = \left(\frac{h}{2}\right)^{2r}$, $\max_{y_q^2 \leq y \leq y_q^2 + h} \psi_{2r} = \left(\frac{h}{2}\right)^{2r}$, $\max_{z_s^2 \leq z \leq z_s^2 + h} \psi_{3r} = \left(\frac{h}{2}\right)^{2r}$. Якщо $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, то

справедлива нерівність $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$.

При $\ell \geq |\omega|^{1/3r}$, $\frac{\widetilde{M}|\omega||D_1|}{\widetilde{C}(r)h^{3r}} \psi_{1r} \psi_{2r} \psi_{3r} \leq \frac{\widetilde{M}|\omega||D_1|}{\widetilde{C}(r)h^{3r}} \left(\frac{h}{2}\right)^{6r} = \frac{\widetilde{M}|\omega||D_1|h^{3r}}{\widetilde{C}(r)4^{3r}} \leq \frac{\pi}{2}$. Тому

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sin(\omega\tau(x, y, z)) dx dy dz \geq$$

$$\geq \frac{8\widetilde{M}}{\pi^3 \widetilde{C}(r)h^{3r}} |\omega||D_1| \sum_{k=0}^{\ell-1} \sum_{q=0}^{\ell-1} \sum_{s=0}^{\ell-1} \int_{x_k^2}^{x_k^2+h} \int_{y_q^2}^{y_q^2+h} \int_{z_s^2}^{z_s^2+h} \psi_{1r} \psi_{2r} \psi_{3r} dx dy dz = \frac{8\widetilde{M}}{\pi^3} |\omega||D_1| \ell^3 \frac{c_1^3(r)}{\widetilde{C}(r)} h^{3r+3} =$$

$$= \frac{\widetilde{M}}{\pi^3} |\omega| |D_1| \frac{c_1^3(r)}{\widetilde{C}(r)} \frac{1}{2 \cdot 4^{3r+1} \ell^{3r}} = K_2 \frac{|\omega|}{\ell^{3r}}.$$

Нехай $\ell < |\omega|^{1/3r}$, тоді

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sin(\omega \tau(x, y, z)) dx dy dz = \\ &= \sum_{k=0}^{\ell-1} \sum_{q=0}^{\ell-1} \sum_{s=0}^{\ell-1} \int_{x_k^2}^{x_k^2+h} \int_{y_q^2}^{y_q^2+h} \int_{z_s^2}^{z_s^2+h} \sin\left(\min\left(\frac{\widetilde{M}}{C_0^3 4^{3r}}, \frac{\pi}{2}\right) \chi_1 \chi_2 \chi_3\right) dx dy dz \geq \\ &\geq \sum_{k=0}^{\ell-1} \sum_{q=0}^{\ell-1} \sum_{s=0}^{\ell-1} \int_{x_k^2}^{x_k^2+h} \int_{y_q^2}^{y_q^2+h} \int_{z_s^2}^{z_s^2+h} \min\left(\frac{\widetilde{M}}{C_0^3 4^{3r}}, \frac{\pi}{2}\right) \chi_1 \chi_2 \chi_3 dx dy dz \geq \\ &\geq K_3 \sum_{k=0}^{\ell-1} \sum_{q=0}^{\ell-1} \sum_{s=0}^{\ell-1} \int_{x_k^2}^{x_k^2+h} \int_{y_q^2}^{y_q^2+h} \int_{z_s^2}^{z_s^2+h} dx dy dz = K_3 \ell^3 h^3 = K_3 \ell^3 \frac{1}{4^3 \ell^3} = \frac{K_3}{64}. \end{aligned}$$

Функції $\frac{\widetilde{M}+f^*(x,y,z)}{2}$, $\frac{\widetilde{M}-f^*(x,y,z)}{2}$ та $\tau(x,y,z)$, $-\tau(x,y,z)$ такі, що при обчисленні інтегралів I_1, I_2 за кубатурною формулою $I_N(f, g)$ буде отриманий один і той же результат I_0 . Оскільки $|I_1 - I_0| + |I_2 - I_0| \geq |I_1 - I_2|$, то хоча б одна з величин $|I_1 - I_0|, |I_2 - I_0|$ не менше половини величини $K_4 \max\left\{\frac{1}{\ell^{3r}}, \min\left\{1, \frac{|\omega|}{\ell^{3r}}\right\}\right\}$. Отже, похибка наближення на класі не менше $K \max\left\{\frac{1}{\ell^{3r}}, \min\left\{1, \frac{|\omega|}{\ell^{3r}}\right\}\right\}$.

2.2. Оптимальна за порядком точності кубатурна формула в задачах цифрової обробки зображень

Будемо розглядати клас функцій $H^{3,1}(M, \widetilde{M})$, визначених в області $G = [0, 1]^3$ і таких, що

$$\left| f^{(1,0,0)}(x,y,z) \right| \leq M, \quad \left| f^{(0,1,0)}(x,y,z) \right| \leq M, \quad \left| f^{(0,0,1)}(x,y,z) \right| \leq M,$$

$$\left| f(x,y,z) \right| \leq \widetilde{M}, \quad \left| f^{(1,1,1)}(x,y,z) \right| \leq \widetilde{M}.$$

Інтеграл від швидко осцилюючої функції трьох змінних загального виду визначається формулою (1) для $f(x,y,z)$, $g(x,y,z) \in H^{3,1}(M, \widetilde{M})$. Нехай

$$X1_k = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}], \quad Y1_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}], \quad Z1_s = [z_{s-1/2}, z_{s+1/2}],$$

$$h1_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in X1_k, \\ 0, & x \notin X1_k, \end{cases} \quad h1_j(y) = \begin{cases} 1, & y \in Y1_j, \\ 0, & y \notin Y1_j, \end{cases} \quad h1_s(z) = \begin{cases} 1, & z \in Z1_s, \\ 0, & z \notin Z1_s, \end{cases}$$

$$x_k = k\Delta_1 - \Delta_1/2, \quad y_j = j\Delta_1 - \Delta_1/2, \quad z_s = s\Delta_1 - \Delta_1/2, \quad k, j, s = \overline{1, \ell_1}, \quad \Delta_1 = 1/\ell_1,$$

$$X2_p = [\tilde{x}_{p-1/2}, \tilde{x}_{p+1/2}], \quad Y2_q = [\tilde{y}_{q-1/2}, \tilde{y}_{q+1/2}], \quad Z2_r = [\tilde{z}_{r-1/2}, \tilde{z}_{r+1/2}].$$

$$h2_p(x) = \begin{cases} 1, & x \in X2_p, \\ 0, & x \notin X2_p, \end{cases} \quad h2_q(y) = \begin{cases} 1, & y \in Y2_q, \\ 0, & y \notin Y2_q, \end{cases} \quad h2_r(z) = \begin{cases} 1, & z \in Z2_r, \\ 0, & z \notin Z2_r, \end{cases}$$

$$\tilde{x}_p = p\Delta_2 - \Delta_2/2, \quad \tilde{y}_q = q\Delta_2 - \Delta_2/2, \quad \tilde{z}_r = r\Delta_2 - \Delta_2/2, \quad p, q, r = \overline{1, \ell_2}, \quad \Delta_2 = 1/\ell_2.$$

Розглянемо оператор

$$Jf(x,y,z) = J_1 f(x,y,z) + J_2 f(x,y,z) + J_3 f(x,y,z) -$$

$$-J_1 J_2 f(x,y,z) - J_2 J_3 f(x,y,z) - J_1 J_3 f(x,y,z) + J_1 J_2 J_3 f(x,y,z),$$

де

$$J_1 f(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\ell_1} f(x_k, y, z) h_{1k}(x), \quad J_2 f(x, y, z) = \sum_{j=1}^{\ell_1} f(x, y_j, z) h_{2j}(y), \quad J_3 f(x, y, z) = \sum_{s=1}^{\ell_1} f(x, y, z_s) h_{3s}(z),$$

а також оператор

$$\begin{aligned} Og(x, y, z) = & O_1 g(x, y, z) + O_2 g(x, y, z) + O_3 g(x, y, z) - \\ & - O_1 O_2 g(x, y, z) - O_2 O_3 g(x, y, z) - O_1 O_3 g(x, y, z) + O_1 O_2 O_3 g(x, y, z). \end{aligned}$$

де

$$O_1 g(x, y, z) = \sum_{p=1}^{\ell_2} g(\tilde{x}_p, y, z) h_{1p}(x),$$

$$O_2 g(x, y, z) = \sum_{q=1}^{\ell_2} g(x, \tilde{y}_q, z) h_{2q}(y),$$

$$O_3 g(x, y, z) = \sum_{r=1}^{\ell_2} g(x, y, \tilde{z}_r) h_{3r}(z).$$

Для обчислення інтегралу

$$I^3(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, z) \sin \omega g(x, y, z) dx dy dz$$

пропонується кубатурна формула

$$\Phi^3(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 Jf(x, y, z) \sin \omega Og(x, y, z) dx dy dz.$$

Теорема 2.2. Нехай $f(x, y, z), g(x, y, z) \in H^{3,r}(M, \widetilde{M})$, та $f(x, y, z), g(x, y, z)$ задані

$N = 3\ell_1 + 3\ell_2$ слідами $f(x_k, y, z), f(x, y_j, z), f(x, y, z_s), k, j, s = \overline{1, \ell_1}$ та $g(\tilde{x}_p, y, z), g(x, \tilde{y}_q, z),$

$g(x, y, \tilde{z}_r), p, q, r = \overline{1, \ell_2}$ системах взаємно перпендикулярних прямих в області $G = [0, 1]^3$. Тоді кубатурна формула $\Phi^3(\omega)$ є оптимальною за порядком точності та справедлива наступна оцінка:

$$\rho(I^3(\omega), \Phi^3(\omega)) = \frac{\tilde{M}}{64} \frac{1}{\ell_1^3} + \tilde{M} \min \left(2, \frac{\tilde{M}\omega}{64} \frac{1}{\ell_2^3} \right).$$

Доведення. Інтеграл $I^3(\omega)$ може бути записаний у вигляді

$$\begin{aligned} I^3(\omega) &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, z) \sin \omega g(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 Jf(x, y, z) \sin \omega O g(x, y, z) dx dy dz + \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 [f(x, y, z) - Jf(x, y, z)] \sin \omega O g(x, y, z) dx dy dz + \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, z) [\sin \omega g(x, y, z) - \sin \omega O g(x, y, z)] dx dy dz, \end{aligned}$$

тоді

$$\begin{aligned} \rho(I^3(\omega), \Phi^3(\omega)) &= \left| \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, z) \sin \omega g(x, y, z) dx dy dz - \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 Jf(x, y, z) \sin \omega O g(x, y, z) dx dy dz \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y, z) - Jf(x, y, z)| dx dy dz + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y, z)| |\sin \omega g(x, y, z) - \sin \omega O g(x, y, z)| dx dy dz = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y, z) - Jf(x, y, z)| dx dy dz + \\ &+ 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y, z)| \left| \sin \frac{\omega g(x, y, z) - \omega O g(x, y, z)}{2} \cos \frac{\omega g(x, y, z) + \omega O g(x, y, z)}{2} \right| dx dy dz \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \leq \sum_{k=1}^{\ell_1} \sum_{j=1}^{\ell_1} \sum_{s=1}^{\ell_1} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} \left| \int_{x_k}^x \int_{y_j}^y \int_{z_s}^z f^{(1,1,1)}(\xi, \eta, \varsigma) d\xi d\eta d\varsigma \right| dx dy dz + \\
& + 2\widetilde{M} \sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{q=1}^{\ell_2} \sum_{r=1}^{\ell_2} \int_{\tilde{x}_{p-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{p+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{q-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{q+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{z}_{r-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{r+\frac{1}{2}}} \left| \sin \frac{\omega(g(x, y, z) - \omega O g(x, y, z))}{2} \right| dx dy dz \leq \\
& \leq \widetilde{M} \sum_{k=1}^{\ell_1} \sum_{j=1}^{\ell_1} \sum_{s=1}^{\ell_1} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} |x - x_k| dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} |y - y_j| dy \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} |z - z_s| dz + \\
& + 2\widetilde{M} \sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{q=1}^{\ell_2} \sum_{r=1}^{\ell_2} \int_{\tilde{x}_{p-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{p+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{q-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{q+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{z}_{r-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{r+\frac{1}{2}}} \min \left(1; \frac{\omega |g(x, y, z) - O g(x, y, z)|}{2} \right) dx dy dz \leq \\
& \leq \widetilde{M} \sum_{k=1}^{\ell_1} \sum_{j=1}^{\ell_1} \sum_{s=1}^{\ell_1} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} |x - x_k| dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} |y - y_j| dy \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} |z - z_j| dz + \\
& + 2\widetilde{M} \sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{q=1}^{\ell_2} \sum_{r=1}^{\ell_2} \int_{\tilde{x}_{p-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{p+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{q-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{q+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{z}_{r-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{r+\frac{1}{2}}} \min \left(1; \frac{\omega}{2} \left| \int_{\tilde{x}_p}^x \int_{\tilde{y}_q}^y \int_{\tilde{z}_r}^z g^{(1,1,1)}(\xi, \eta, \varsigma) d\xi d\eta d\varsigma \right| \right) dx dy dz \leq \\
& \leq \widetilde{M} \ell_1^3 \frac{\Delta_1^2}{4} \frac{\Delta_1^2}{4} \frac{\Delta_1^2}{4} + 2\widetilde{M} \min \left(\sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{q=1}^{\ell_2} \sum_{r=1}^{\ell_2} \int_{\tilde{x}_{p-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{p+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{q-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{q+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{z}_{r-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{r+\frac{1}{2}}} dx dy dz, \right. \\
& \left. \frac{\widetilde{M}\omega}{2} \sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{q=1}^{\ell_2} \sum_{r=1}^{\ell_2} \int_{\tilde{x}_{p-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{p+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{q-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{q+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{z}_{r-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{r+\frac{1}{2}}} |x - \tilde{x}_p| |y - \tilde{y}_q| |z - \tilde{z}_r| dx dy dz \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\widetilde{M}}{64} \Delta_1^3 + 2\widetilde{M} \min \left(\ell_2^3 \Delta_2^3, \frac{\widetilde{M}\omega}{2} \ell_2^3 \frac{\Delta_2^2}{4} \frac{\Delta_2^2}{4} \frac{\Delta_2^2}{4} \right) = \frac{\widetilde{M}}{64} \Delta_1^3 + \widetilde{M} \min \left(2; \frac{\widetilde{M}\omega}{64} \Delta_2^3 \right) = \\
&= \frac{\widetilde{M}}{64} \frac{1}{\ell_1^3} + \widetilde{M} \min \left(2; \frac{\widetilde{M}\omega}{64} \frac{1}{\ell_2^3} \right).
\end{aligned}$$

За теоремою 2.1. при $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ та $r=1$ маємо наступну оцінку наближення на класі

$$R_N \left(H^{3,1} (M, \widetilde{M}), H^{3,1} (M, \widetilde{M}), \omega \right) \geq K \max \left\{ 1/\ell^3, \min \left\{ 1, |\omega|/\ell^3 \right\} \right\}.$$

Оскільки вірно

$$\rho \left(I^3(\omega), \Phi^3(\omega) \right) = \frac{\widetilde{M}}{64} \frac{1}{\ell^3} + \widetilde{M} \min \left(2; \frac{\widetilde{M}\omega}{64} \frac{1}{\ell^3} \right) \leq C \max \left\{ 1/\ell^3, \min \left\{ 1, |\omega|/\ell^3 \right\} \right\},$$

C – константа, то кубатурна формула $\Phi^3(\omega)$ для наближеного обчислення інтегралу $I^3(\omega)$ є оптимальною за порядком точності, що доводить теорему. Теорему 2.2. доведено.

2.3. Кубатурні формули обчислення інтегралу від функції трьох змінних на основі кусково-сталої сплайн-інтерлінації

Для наближеного обчислення інтегралу від функцій трьох змінних виду

$$I^3 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, z) dx dy dz \quad (2.1)$$

дослідити кубатурну формулу з використанням оператора кусково-сталої сплайн-інтерлінації, побудованого на операторі кусково-сталої інтерфлетації. Інформація про функцію $f(x, y, z)$ задається її слідами на лініях. На класі диференційовних функцій отримати оцінку похибки наближення кубатурної формули.

Кубатурні формули обчислення інтегралу від функції трьох змінних на основі кусково-сталої сплайн-інтерлінації. Введемо наступні позначення

$$X_k = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}], \quad Y_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}], \quad Z_s = [z_{s-1/2}, z_{s+1/2}],$$

$$\tilde{X}_{\tilde{k}} = [\tilde{x}_{\tilde{k}-1/2}, \tilde{x}_{\tilde{k}+1/2}], \quad \tilde{Y}_{\tilde{j}} = [\tilde{y}_{\tilde{j}-1/2}, \tilde{y}_{\tilde{j}+1/2}], \quad \tilde{Z}_{\tilde{s}} = [\tilde{z}_{\tilde{s}-1/2}, \tilde{z}_{\tilde{s}+1/2}],$$

$$h_{1k}^0(x) = \begin{cases} 1, x \in X_k, \\ 0, x \notin X_k, \end{cases} \quad h_{2j}^0(y) = \begin{cases} 1, y \in Y_j, \\ 0, y \notin Y_j, \end{cases} \quad h_{3s}^0(z) = \begin{cases} 1, z \in Z_s, \\ 0, z \notin Z_s, \end{cases},$$

$$\tilde{h}_{1\tilde{k}}^0(x) = \begin{cases} 1, x \in \tilde{X}_{\tilde{k}}, \\ 0, x \notin \tilde{X}_{\tilde{k}}, \end{cases} \quad \tilde{h}_{2\tilde{j}}^0(y) = \begin{cases} 1, y \in \tilde{Y}_{\tilde{j}}, \\ 0, y \notin \tilde{Y}_{\tilde{j}}, \end{cases} \quad \tilde{h}_{3\tilde{s}}^0(z) = \begin{cases} 1, z \in \tilde{Z}_{\tilde{s}}, \\ 0, z \notin \tilde{Z}_{\tilde{s}}, \end{cases},$$

$$x_k = k\Delta - \frac{\Delta}{2}, \quad y_j = j\Delta - \frac{\Delta}{2}, \quad z_s = s\Delta - \frac{\Delta}{2}, \quad \Delta = \frac{1}{\ell}, \quad k, j, s = \overline{1, \ell},$$

$$\tilde{x}_{\tilde{k}} = \tilde{k}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2}, \quad \tilde{y}_{\tilde{j}} = \tilde{j}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2}, \quad \tilde{z}_{\tilde{s}} = \tilde{s}\Delta_1 - \frac{\Delta_1}{2}, \quad \Delta_1 = \frac{1}{\ell^{3/2}}, \quad \tilde{k}, \tilde{j}, \tilde{s} = \overline{1, \ell^{3/2}}.$$

Розглянемо оператори

$$J_1 f(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y, z) h_{1k}^0(x), \quad J_2 f(x, y, z) = \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j, z) h_{2j}^0(y),$$

$$J_3 f(x, y, z) = \sum_{s=1}^{\ell} f(x, y, z_s) h_{3s}^0(z),$$

$$\tilde{J}_1 f(x, y, z) = \sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y, z) \tilde{h}_{1\tilde{k}}^0(x), \quad \tilde{J}_2 f(x, y, z) = \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}} f(x, \tilde{y}_{\tilde{j}}, z) \tilde{h}_{2\tilde{j}}^0(y),$$

$$\tilde{J}_3 f(x, y, z) = \sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} f(x, y, \tilde{z}_{\tilde{s}}) \tilde{h}_{3\tilde{s}}^0(z).$$

Означення 2.6. Під слідом функції $f(x, y, z)$ на лініях

$\{(x, y, z): x = x_k, y = y_j, x_k = k\Delta - \frac{\Delta}{2}, y_j = j\Delta - \frac{\Delta}{2}, \Delta = \frac{1}{\ell}, k, j = \overline{1, \ell} \quad 0 \leq z \leq 1\}$ розуміємо
 $f(x_k, y_j, z), \quad 0 \leq z \leq 1.$

Сліди функції на інших лініях визначаються аналогічно. Розглянемо оператор кусково-сталої інтерфлетації

$$Jf(x, y, z) = J_1 f(x, y, z) + J_2 f(x, y, z) + J_3 f(x, y, z) - \\ - J_1 J_2 f(x, y, z) - J_2 J_3 f(x, y, z) - J_1 J_3 f(x, y, z) + J_1 J_2 J_3 f(x, y, z)$$

та оператор кусково-сталої інтерлінації, побудований на основі інтерфлетації

$$\tilde{J}f(x, y, z) = J_1 \tilde{J}_2 f(x, y, z) + J_1 \tilde{J}_3 f(x, y, z) - J_1 \tilde{J}_2 \tilde{J}_3 f(x, y, z) + J_2 \tilde{J}_1 f(x, y, z) + \\ + J_2 \tilde{J}_3 f(x, y, z) - J_2 \tilde{J}_1 \tilde{J}_3 f(x, y, z) + J_3 \tilde{J}_1 f(x, y, z) + J_3 \tilde{J}_2 f(x, y, z) - J_3 \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f(x, y, z) - \\ - J_1 J_2 f(x, y, z) - J_1 J_3 f(x, y, z) - J_2 J_3 f(x, y, z) + J_1 J_2 J_3 f(x, y, z).$$

Для наближеного обчислення інтегралу (2.1) в роботі [52] розглядалася та досліджувалася кубатурна формула, де функція $f(x, y, z)$ замінювалася оператором $Jf(x, y, z)$.

В дисертаційній роботі мова буде іти про наближене обчислення інтегралу (2.1) за кубатурною формулою

$$\Phi^3 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}f(x, y, z) dx dy dz.$$

Підставимо вираз для оператора кусково-сталої сплайн-інтерлінації, побудованого на основі інтерфлетації, та отримаємо відповідну кубатурну формулу:

$$\tilde{\Phi}^3 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}f(x, y, z) dx dy dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} f(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}}, z) h_{1k}^0(x) \tilde{h}_{2\tilde{j}}^0(y) dx dy dz + \\
&\quad + \int_0^1 \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} f(x_k, y, \tilde{z}_{\tilde{s}}) h_{2j}^0(y) \tilde{h}_{3\tilde{s}}^0(z) dx dy dz - \\
&\quad - \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}} \sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} f(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}}, \tilde{z}_{\tilde{s}}) h_{1k}^0(x) \tilde{h}_{2\tilde{j}}^0(y) \tilde{h}_{3\tilde{s}}^0(z) dx dy dz + \\
&\quad + \int_0^1 \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} f(x, y_j, \tilde{z}_{\tilde{s}}) h_{2j}^0(y) \tilde{h}_{3\tilde{s}}^0(z) dx dy dz + \\
&\quad + \int_0^1 \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}-1} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j, z) \tilde{h}_{1\tilde{k}}^0(x) h_{2j}^0(y) dx dy dz - \\
&\quad - \sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j, \tilde{z}_{\tilde{s}}) \tilde{h}_{1\tilde{k}}^0(x) h_{2j}^0(y) \tilde{h}_{3\tilde{s}}^0(z) dx dy dz + \\
&\quad + \int_0^1 \sum_{s=1}^{\ell} \sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y, z_s) \tilde{h}_{1\tilde{k}}^0(x) h_{3s}^0(z) dx dy dz + \\
&\quad + \int_0^1 \sum_{s=1}^{\ell} \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} f(x, \tilde{y}_{\tilde{j}}, z_s) \tilde{h}_{2\tilde{j}}^0(y) h_{3s}^0(z) dx dy dz -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}} \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}} \sum_{s=1}^{\ell} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, \tilde{y}_{\tilde{j}}, z_s) \tilde{h}_{1\tilde{k}}^0(x) \tilde{h}_{2\tilde{j}}^0(y) h_{3s}^0(z) dx dy dz - \\
& - \int_0^1 \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} f(x_k, y_j, z) h_{1k}^0(x) h_{2j}^0(y) dx dy dz - \\
& - \int_0^1 \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{s=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} f(x_k, y, z_s) h_{1k}^0(x) h_{3s}^0(z) dx dy dz - \\
& - \int_0^1 \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{s=1}^{\ell} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} f(x, y_j, z_s) h_{2j}^0(y) h_{3s}^0(z) dx dy dz + \\
& + \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{s=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} f(x_k, y_j, z_s) h_{1k}^0(x) h_{2j}^0(y) h_{3s}^0(z) dx dy dz .
\end{aligned}$$

Розглянемо $H_1^{3,1}(M, \overline{M}, \widetilde{M})$ – клас дійсних функцій, визначених на $G = [0,1]^3$ і таких, що частинні похідні обмежені, тобто

$$\left| f^{(1,0,0)}(x, y, z) \right| \leq M, \quad \left| f^{(0,1,0)}(x, y, z) \right| \leq M, \quad \left| f^{(0,0,1)}(x, y, z) \right| \leq M,$$

$$\left| f^{(1,1,0)}(x, y, z) \right| \leq \overline{M}, \quad \left| f^{(1,0,1)}(x, y, z) \right| \leq \overline{M}, \quad \left| f^{(0,1,1)}(x, y, z) \right| \leq \overline{M}, \quad \left| f^{(1,1,1)}(x, y, z) \right| \leq \widetilde{M}.$$

Теорема 2.3. Для кубатурної формули \tilde{f}^3 наближеного обчислення I^3 на класі $H_1^{3,1}(M, \overline{M}, \widetilde{M})$ справедлива наступна оцінка:

$$\rho\left(H_1^{3,1}\left(M, \overline{M}, \widetilde{M}\right), \widetilde{\Phi}^3\right) \leq \left(\frac{\widetilde{M}}{64} + \frac{3\overline{M}}{16}\right) \frac{1}{\ell^3}.$$

Доведення. Оцінимо похибку наближення

$$\begin{aligned} \left|I^3 - \widetilde{\Phi}^3\right| &= \left|\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left(f(x, y, z) - \widetilde{J}f(x, y, z)\right) dx dy dz\right| = \\ &= \left|\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left(f(x, y, z) - Jf(x, y, z) + Jf(x, y, z) - \widetilde{J}f(x, y, z)\right) dx dy dz\right| \leq \\ &\leq \left|I_1^3(m, n, p) - \Phi_1^3(m, n, p)\right| + \left|\Phi_1^3(m, n, p) - \widetilde{\Phi}_1^3(m, n, p)\right| \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y, z) - Jf(x, y, z)| dx dy dz + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |Jf(x, y, z) - \widetilde{J}f(x, y, z)| dx dy dz. \end{aligned}$$

Знайдемо оцінку першого та другого доданку.

$$\begin{aligned} 1. \quad &\left|\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left(f(x, y, z) - Jf(x, y, z)\right) dx dy dz\right| = \\ &= \left|\sum_{k=1}^{\ell-1} \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{s=1}^{\ell-1} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} \left(f(x, y, z) - Jf(x, y, z)\right) dx dy dz\right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\ell-1} \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{s=1}^{\ell-1} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} |f(x, y, z) - Jf(x, y, z)| dx dy dz = \\ &= \sum_{k=1}^{\ell-1} \sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{s=1}^{\ell-1} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} \left| \int_{x_k}^x \int_{y_j}^y \int_{z_s}^z f^{(1,1,1)}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \right| dx dy dz \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \tilde{M} \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{s=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} |x-x_k| dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} |y-y_j| dy \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} |z-z_s| dz = \\
&= \tilde{M} \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{s=1}^{\ell} \sum_{s=1}^{\ell} \left(-\frac{(x-x_k)^2}{2} \Big|_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_k} + \frac{(x-x_k)^2}{2} \Big|_{x_k}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \right) \times \\
&\times \left(-\frac{(y-y_j)^2}{2} \Big|_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_j} + \frac{(y-y_j)^2}{2} \Big|_{y_j}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \right) \left(-\frac{(z-z_s)^2}{2} \Big|_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_s} + \frac{(z-z_s)^2}{2} \Big|_{z_s}^{z_{s+\frac{1}{2}}} \right) = \\
&= \tilde{M} \ell^3 \frac{\Delta^2}{4} \frac{\Delta^2}{4} \frac{\Delta^2}{4} = \frac{\tilde{M}}{64} \frac{1}{\ell^3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad &\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |Jf(x, y, z) - \tilde{J}f(x, y, z)| dx dy dz = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |J_1 f(x, y, z) + J_2 f(x, y, z) + J_3 f(x, y, z) - \\
&\quad - J_1 J_2 f(x, y, z) - J_2 J_3 f(x, y, z) - J_1 J_3 f(x, y, z) + J_1 J_2 J_3 f(x, y, z) - \\
&\quad - J_1 \tilde{J}_2 f(x, y, z) - J_1 \tilde{J}_3 f(x, y, z) + J_1 \tilde{J}_2 \tilde{J}_3 f(x, y, z) - J_2 \tilde{J}_1 f(x, y, z) - \\
&\quad - J_2 \tilde{J}_3 f(x, y, z) + J_2 \tilde{J}_1 \tilde{J}_3 f(x, y, z) - J_3 \tilde{J}_1 f(x, y, z) - J_3 \tilde{J}_2 f(x, y, z) + J_3 \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f(x, y, z) + \\
&\quad + J_1 J_2 f(x, y, z) + J_1 J_3 f(x, y, z) + J_2 J_3 f(x, y, z) - J_1 J_2 J_3 f(x, y, z)| dx dy dz = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |J_1 f(x, y, z) + J_2 f(x, y, z) + J_3 f(x, y, z) - \\
&\quad - J_1 \tilde{J}_2 f(x, y, z) - J_1 \tilde{J}_3 f(x, y, z) + J_1 \tilde{J}_2 \tilde{J}_3 f(x, y, z) - J_2 \tilde{J}_1 f(x, y, z) - \\
&\quad - J_2 \tilde{J}_3 f(x, y, z) + J_2 \tilde{J}_1 \tilde{J}_3 f(x, y, z) - J_3 \tilde{J}_1 f(x, y, z) - J_3 \tilde{J}_2 f(x, y, z) + J_3 \tilde{J}_1 \tilde{J}_2 f(x, y, z) + \\
&\quad + J_1 J_2 f(x, y, z) + J_1 J_3 f(x, y, z) + J_2 J_3 f(x, y, z) - J_1 J_2 J_3 f(x, y, z)| dx dy dz =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -J_3\tilde{J}_2f(x,y,z)+J_3\tilde{J}_1\tilde{J}_2f(x,y,z)\Big|dx dy dz = \\
& = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left| \left(J_1 - J_1\tilde{J}_2 - J_1\tilde{J}_3 + J_1\tilde{J}_2\tilde{J}_3 \right) f(x,y,z) + \left(J_2 - J_2\tilde{J}_1 - J_2\tilde{J}_3 + J_2\tilde{J}_1\tilde{J}_3 \right) f(x,y,z) + \right. \\
& \quad \left. + \left(J_3 - J_3\tilde{J}_1 - J_3\tilde{J}_2 + J_3\tilde{J}_1\tilde{J}_2 \right) f(x,y,z) \right| dx dy dz \leq \\
& \leq \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left| \left(J_1 - J_1\tilde{J}_2 - J_1\tilde{J}_3 + J_1\tilde{J}_2\tilde{J}_3 \right) f(x,y,z) \right| dx dy dz + \\
& \quad + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left| \left(J_2 - J_2\tilde{J}_1 - J_2\tilde{J}_3 + J_2\tilde{J}_1\tilde{J}_3 \right) f(x,y,z) \right| dx dy dz + \\
& \quad + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left| \left(J_3 - J_3\tilde{J}_1 - J_3\tilde{J}_2 + J_3\tilde{J}_1\tilde{J}_2 \right) f(x,y,z) \right| dx dy dz \leq \\
& \leq \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}} \sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} \left| \left(J_1 - J_1\tilde{J}_2 - J_1\tilde{J}_3 + J_1\tilde{J}_2\tilde{J}_3 \right) f(x,y,z) \right| dx dy dz + \\
& \quad + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}} \sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} \left| \left(J_2 - J_2\tilde{J}_1 - J_2\tilde{J}_3 + J_2\tilde{J}_1\tilde{J}_3 \right) f(x,y,z) \right| dx dy dz + \\
& \quad + \sum_{s=1}^{\ell} \sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}} \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} \left| \left(J_3 - J_3\tilde{J}_1 - J_3\tilde{J}_2 + J_3\tilde{J}_1\tilde{J}_2 \right) f(x,y,z) \right| dx dy dz \leq \\
& \leq \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}} \sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^y \int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^z \left| f^{(0,1,1)}(x_k, \eta, \zeta) \right| d\eta d\zeta dx dy dz +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}} \sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^x \int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^z \left| f^{(1,0,1)}(\xi, y_j, \zeta) \right| d\xi d\zeta dx dy dz + \\
& + \sum_{s=1}^{\ell} \sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}} \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^x \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^y \left| f^{(1,1,0)}(\xi, \eta, z_s) \right| d\xi d\eta dx dy dz \leq \\
& \leq \bar{M} \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}} \sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^y \int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^z d\eta d\zeta dx dy dz + \\
& + \bar{M} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}} \sum_{\tilde{s}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{z}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{z}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^x \int_{\tilde{z}_{\tilde{s}}}^z d\xi d\zeta dx dy dz + \\
& + \bar{M} \sum_{s=1}^{\ell} \sum_{\tilde{k}=1}^{\ell^{3/2}} \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell^{3/2}} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{s+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}}}^x \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}}}^y d\xi d\eta dx dy dz = \\
& = 3\bar{M} \ell \ell^{3/2} \ell^{3/2} \Delta \frac{\Delta_1^2}{4} \frac{\Delta_1^2}{4} = \frac{3\bar{M}}{16} \Delta_1^2 = \frac{3\bar{M}}{16} \left(\frac{1}{\ell^{3/2}} \right)^2 = \frac{3\bar{M}}{16} \frac{1}{\ell^3}.
\end{aligned}$$

Отже, $|I^3 - \Phi^3| \leq \frac{\bar{M}}{64} \frac{1}{\ell^3} + \frac{3\bar{M}}{16} \frac{1}{\ell^3} = \left(\frac{\bar{M}}{64} + \frac{3\bar{M}}{16} \right) \frac{1}{\ell^3}$ Теорему 2.3. доведено.

Висновки до розділу 2

1. В розділі розглядається математичне моделювання задач цифрової обробки зображень на основі кубатурної формули наближеного обчислення потрійного інтегралу від швидко осцилюючої функції загального виду. Особливістю запропонованої формули є використання в якості даних значень функцій на системах взаємно перпендикулярних площин. Доведено, що на

класі диференційовних функцій кубатурна формула наближеного обчислення потрібного інтегралу від швидко осцилюючої функції загального виду є оптимальною за порядком точності.

2. На прикладі чисельного інтегрування функцій трьох змінних продемонстровано використання оператора інтерлінанта, який побудовано на основі оператора інтерфлетації з допоміжними функціями у вигляді куково-сталіх сплайнів.

3. Запропоновані кубатурні формули наближеного обчислення інтегралів від функцій трьох змінних мають високу точність обчислення, в своїй побудові використовують нові інформаційні оператори.

РОЗДІЛ 3

МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ ШВИДКО ОСЦИЛЮЮЧИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ У МОДЕЛЮВАННІ ЗАДАЧ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ ЗОБРАЖЕНЬ

В розділі запропоновано нові кубатурні формули наближеного обчислення подвійних інтегралів від швидко осцилюючих функцій загального виду. Формули в своїй побудові використовують оператори інтерлінації з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих та кусково-лінійних функцій. Інформація про функції задається слідами функції на лініях. Отримано оцінку чисельного інтегрування швидко осцилюючих функцій загального виду на класі диференційовних функцій. Доведено, що запропоновані кубатурні формули є оптимальними за порядком точності.

В роботах [21-23, 105, 106] наведено економні схеми інтерполяції, основані на використанні нових інформаційних операторів. В розділі запропонована кубатурна формула наближеного обчислення подвійних інтегралів від швидко осцилюючих функцій загального виду, яка використовує економні схеми інтерполяції, побудовані з використанням кусково-сталої інтерлінації. Кубатурна формула має високу точність наближення та використовує на менше значень функції в порівнянні з класичними формулами.

3.1. Оцінка знизу для похибки чисельного інтегрування на класі

Припустимо, що $f(x,y) \in F$, $g(x,y) \in G$, F, G – множини функцій, визначених в області $[a,b] \times [a,b]$. Позначимо через L_N множину всіх квадратурних формул $l_N(f,g)$, що використовують інформацію про значення функцій $f(x,y)$ та $g(x,y)$ не більше ніж на N лініях. Введемо величини

$$R_N(f,g,\omega,l_N) = |I(f,g,\omega) - l_N(f,g)|,$$

$$R_N(F, G, \omega, l_N) = \sup_{f \in F, g \in G} R_N(f, g, \omega, l_N),$$

$$R_N(F, G, \omega) = \inf_{l_N \in L_N} R_N(F, G, \omega, l_N).$$

Кубатурну формулу $l_N^*(f, g)$, на якій досягається $R_N(F, G, \omega)$, будемо називати оптимальною за точністю кубатурною формулою. Якщо $R_N(F, G, \omega, \bar{l}_N) \leq R_N(F, G, \omega) + \eta$, $\eta > 0$, то \bar{l}_N називається оптимальною за точністю формулою обчислення $I(f, g, \omega)$ з точністю до η . Якщо $\eta = o(R_N)$ або $\eta = O(R_N)$, то \bar{l}_N називається асимптотично оптимальною або оптимальною за порядком точності.

Розглянемо $H^{2,r}(M, \widetilde{M})$ – клас дійсних функцій $r \geq 0$ визначених на $G = [0, 1]^2$ і таких, що частинні похідні порядку r по змінній x та y обмежені, тобто

$$\left| f^{(r,0)}(x, y) \right| \leq M, \quad \left| f^{(0,r)}(x, y) \right| \leq M, \quad r \neq 0, \quad \left| f^{(r,r)}(x, y) \right| \leq \widetilde{M}, \quad r \geq 0.$$

Теорема 3.1. [46] Нехай $f(x, y), g(x, y) \in H^{2,r}(M, \widetilde{M})$, функції $f(x, y), g(x, y)$ задані слідами на відповідних системах взаємно перпендикулярних прямих в області $G = [0, 1]^2$, тоді

$$R_N\left(H^{2,r}(M, \widetilde{M}), H^{2,r}(M, \widetilde{M}), \omega\right) \geq K \max \left\{ \frac{1}{\ell^{2r}}, \min \left\{ 1, \frac{|\omega|}{\ell^{2r}} \right\} \right\}.$$

3.2. Оптимальні за порядком точності кубатурні формули обчислення інтегралу від функції двох змінних загального виду

Для наближеного обчислення інтегралу від функцій двох змінних виду

$$I^2(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy \quad (3.1)$$

пропонується кубатурна формула з використанням операторів кусково-сталої сплайн-інтерполяції, побудованих на операторах кусково-сталої інтерлінації. На класі диференційовних функцій отримано оцінку похибки наближення

кубатурною формулою. Доведено, що кубатурна формула є оптимальною за порядком точності на класі диференційовних функцій.

Введемо наступні позначення:

$$h1_{0k}(x) = \begin{cases} 1, & x \in X1_k, \\ 0, & x \notin X1_k, \end{cases} \quad k = \overline{1, \ell_1}, \quad H1_{0j}(y) = \begin{cases} 1, & y \in Y1_j, \\ 0, & y \notin Y1_j, \end{cases} \quad j = \overline{1, \ell_1};$$

$$X1_k = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}], \quad Y1_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}];$$

$$x_k = k\Delta_1 - \Delta_1 / 2, \quad y_j = j\Delta_1 - \Delta_1 / 2, \quad k, j = \overline{1, \ell_1}, \quad \Delta_1 = 1 / \ell_1;$$

$$h2_{0p}(x) = \begin{cases} 1, & x \in X2_p, \\ 0, & x \notin X2_p, \end{cases} \quad p = \overline{1, \ell_2}, \quad H2_{0s}(y) = \begin{cases} 1, & y \in Y2_s, \\ 0, & y \notin Y2_s, \end{cases} \quad s = \overline{1, \ell_2};$$

$$X2_p = [x_{p-1/2}, x_{p+1/2}], \quad Y2_s = [y_{s-1/2}, y_{s+1/2}];$$

$$x_p = p\Delta_2 - \Delta_2 / 2, \quad y_s = s\Delta_2 - \Delta_2 / 2, \quad p, s = \overline{1, \ell_2}, \quad \Delta_2 = 1 / \ell_2.$$

Розглянемо оператори

$$Jf(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell_1} f(x_k, y) h1_{0k}(x) + \sum_{j=1}^{\ell_1} f(x, y_j) H1_{0j}(y) - \sum_{k=1}^{\ell_1} \sum_{j=1}^{\ell_1} f(x_k, y_j) h1_{0k}(x) H1_{0j}(y);$$

$$Og(x, y) = \sum_{p=1}^{\ell_2} g(x_p, y) h2_{0p}(x) + \sum_{s=1}^{\ell_2} g(x, y_s) H2_{0s}(y) - \sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{s=1}^{\ell_2} g(x_p, y_s) h2_{0p}(x) H2_{0s}(y).$$

Якщо ввести додаткові оператори

$$J_1 f(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell_1} f(x_k, y) h1_{0k}(x), \quad J_2 f(x, y) = \sum_{j=1}^{\ell_1} f(x, y_j) H1_{0j}(y);$$

$$O_1 g(x, y) = \sum_{p=1}^{\ell_2} g(x_p, y) h2_{0p}(x), \quad O_2 g(x, y) = \sum_{s=1}^{\ell_2} g(x, y_s) H2_{0s}(y),$$

тоді для операторів-інтерліантів $Jf(x, y)$, $Og(x, y)$ справедливі наступні тотожності:

$$Jf = (J_1 + J_2 - J_1 J_2)f, \quad Og = (O_1 + O_2 - O_1 O_2)g.$$

Наступна кубатурна формула

$$\Phi^2(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 Jf(x, y) e^{i\omega Og(x, y)} dx dy$$

пропонується для наближеного обчислення інтегралу

$$I^2(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy.$$

Розглянемо $H^{2,r}(M, \widetilde{M})$, $r \geq 0$ — клас дійсних функцій $r \geq 0$, визначених на $G = [0, 1]^2$ і таких, що

$$|f^{(r,0)}(x, y)| \leq M, \quad |f^{(0,r)}(x, y)| \leq M, \quad r \neq 0, \quad |f^{(r,r)}(x, y)| \leq \widetilde{M}, \quad r \geq 0.$$

Теорема 3.2. Нехай $f(x, y), g(x, y) \in H^{2,1}(M, \widetilde{M})$, тоді

$$\begin{aligned} \rho(I^2(\omega), \Phi^2(\omega)) &= \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 Jf(x, y) e^{i\omega Og(x, y)} dx dy \right| \leq \\ &\leq \frac{\widetilde{M}}{16\ell_1^2} + \widetilde{M} \min \left(2; \frac{\omega(\widetilde{M})}{16\ell_2^2} \right). \end{aligned}$$

Доведення. Знайдемо оцінку $\rho(I^2(\omega), \Phi^2(\omega))$:

$$\begin{aligned} \rho(I^2(\omega), \Phi^2(\omega)) &= \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 Jf(x, y) e^{i\omega Og(x, y)} dx dy \right| \leq \\ &\leq \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega Og(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 Jf(x, y) e^{i\omega Og(x, y)} dx dy \right| + \\ &+ \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega Og(x, y)} dx dy \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - Jf(x, y)| \left| e^{i\omega g(x, y)} \right| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \left| e^{i\omega g(x, y)} - e^{i\omega O g(x, y)} \right| dx dy \leq$$

$$\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - Jf(x, y)| dx dy +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \left| 2i \sin \frac{\omega g(x, y) - \omega O g(x, y)}{2} e^{i \frac{\omega}{2} (g(x, y) + O g(x, y))} \right| dx dy \leq$$

$$\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - Jf(x, y)| dx dy + 2 \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \left| \sin \frac{\omega g(x, y) - \omega O g(x, y)}{2} \right| dx dy \leq$$

$$\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - Jf(x, y)| dx dy + \widetilde{M} \int_0^1 \int_0^1 \min \left(1; \frac{\omega |g(x, y) - O g(x, y)|}{2} \right) dx dy \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\ell_1} \sum_{j=1}^{\ell_1} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \left| \int_{x_k}^x \int_{y_j}^y f^{(1,1)}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right| dx dy +$$

$$+ 2\widetilde{M} \sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{s=1}^{\ell_2} \int_{x_{p-\frac{1}{2}}}^{x_{p+\frac{1}{2}}} \int_{y_{s-\frac{1}{2}}}^{y_{s+\frac{1}{2}}} \min \left(1; \frac{\omega}{2} \left| \int_{x_p}^x \int_{y_s}^y g^{(1,1)}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right| \right) dx dy \leq$$

$$\leq \widetilde{M} \sum_{k=1}^{\ell_1} \sum_{j=1}^{\ell_1} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} |x - x_k| dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} |y - y_j| dy +$$

$$+ 2\widetilde{M} \min \left(\sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{s=1}^{\ell_2} \int_{x_{p-\frac{1}{2}}}^{x_{p+\frac{1}{2}}} \int_{y_{s-\frac{1}{2}}}^{y_{s+\frac{1}{2}}} dx dy, \frac{\widetilde{M}\omega}{2} \sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{s=1}^{\ell_2} \int_{x_{p-\frac{1}{2}}}^{x_{p+\frac{1}{2}}} \int_{y_{s-\frac{1}{2}}}^{y_{s+\frac{1}{2}}} |x - x_p| |y - y_s| dx dy \right) \leq$$

$$\leq \widetilde{M} \ell_1^2 \frac{\Delta_1^2}{4} \frac{\Delta_1^2}{4} + 2\widetilde{M} \ell_1 \Delta_1 \frac{\Delta_1^2}{4} \ell_1^2 + 2\widetilde{M} \min \left(\ell_2^2 \Delta_2^2, \frac{\widetilde{M}\omega}{2} \ell_2^2 \frac{\Delta_2^2}{4} \frac{\Delta_2^2}{4} \right) =$$

$$= \frac{\widetilde{M}}{16\ell_1^2} + \widetilde{M} \min\left(2; \frac{\widetilde{M}\omega}{16\ell_2^2}\right) = \frac{\widetilde{M}}{16\ell_1^2} + \widetilde{M} \min\left(2; \frac{\omega(\widetilde{M})}{16\ell_2^2}\right).$$

Теорема 3.2. доведена.

Теорема 3.3. Кубатурна формула $\Phi^2(\omega)$ для наближеного обчислення інтегралу $I^2(\omega)$ є оптимальною за порядком точності при $\ell = \ell_2 = \ell$ на класі $f(x, y), g(x, y) \in H^{2,1}(M, \widetilde{M})$.

Доведення. З теорем 3.1. та 3.2 маємо, що при $\ell = \ell_2 = \ell$ таку оцінку похибки

$$\rho(I^2(\omega), \Phi^2(\omega)) \leq \frac{\widetilde{M}}{16\ell^2} + \widetilde{M} \min\left(2; \frac{\omega(\widetilde{M})}{16\ell^2}\right) \leq K_1 \max\left\{\frac{1}{\ell^2}; \min\left\{1; \frac{|\omega|}{\ell^2}\right\}\right\}.$$

Порівнюючи оцінку з оцінкою на класі при $r=1$, приходимо до висновку, що кубатурна формула є оптимальною за порядком точності.

Теорема 3.3. доведена.

Означення 3.1. Під слідом функції $f(x, y)$ на прямих лініях $x_k = k\Delta$, $y_j = j\Delta$, $k, j = \overline{0, \ell}$, $\Delta = \frac{1}{\ell}$ розуміємо $f(x_k, y)$, $0 \leq y \leq 1$, $f(x, y_j)$, $0 \leq x \leq 1$.

Введемо наступні позначення:

$$h_{10}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_0, \\ \frac{x - x_1}{-\Delta_1}, & x_0 < x < x_1, \\ 0, & x \geq x_1, \end{cases} \quad H_{10}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq y_0, \\ \frac{y - y_1}{-\Delta_1}, & y_0 < y < y_1, \\ 0, & y \geq y_1, \end{cases}$$

$$h_{1k}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{k-1}, \\ \frac{x - x_{k-1}}{\Delta_1}, & x_{k-1} < x < x_k, \\ \frac{x - x_{k+1}}{-\Delta_1}, & x_k \leq x < x_{k+1}, \\ 0, & x \geq x_{k+1}, \end{cases} \quad H_{1j}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq y_{j-1}, \\ \frac{y - y_{j-1}}{\Delta_1}, & y_{j-1} < y < y_j, \\ \frac{y - y_{j+1}}{-\Delta_1}, & y_j \leq y < y_{j+1}, \\ 0, & y \geq y_{j+1}, \end{cases}$$

$$h_{1\ell_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{\ell_1-1}, \\ \frac{x - x_{\ell_1-1}}{\Delta_1}, & x_{\ell_1-1} < x < x_{\ell_1}, \\ 0, & x \geq x_{\ell_1}, \end{cases} \quad H_{1\ell_1}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq y_{\ell_1-1}, \\ \frac{y - y_{\ell_1-1}}{\Delta_1}, & y_{\ell_1-1} < y < y_{\ell_1}, \\ 0, & y \geq y_{\ell_1}, \end{cases}$$

$$k, j = \overline{1, \ell_1 - 1}, \quad x_k = k\Delta_1, \quad y_j = j\Delta_1, \quad \Delta_1 = \frac{1}{\ell_1}.$$

Аналогічно визначаються сліди функції $g(x, y)$ та функції $h_{2p}(x)$, $H_{2s}(y)$ на прямих $x_p = p\Delta_2$, $y_s = s\Delta_2$, $p, s = \overline{0, \ell_2}$, $\Delta_2 = 1/\ell_2$.

Розглянемо два оператори-інтерліанти

$$Uf(x, y) = \sum_{k=0}^{\ell_1} f(x_k, y) h_{1k}(x) + \sum_{j=0}^{\ell_1} f(x, y_j) H_{1j}(y) - \sum_{k=0}^{\ell_1} \sum_{j=0}^{\ell_1} f(x_k, y_j) h_{1k}(x) H_{1j}(y),$$

$$Pg(x, y) = \sum_{p=0}^{\ell_2} g(x_p, y) h_{2p}(x) + \sum_{s=0}^{\ell_2} g(x, y_s) H_{2s}(y) - \sum_{p=0}^{\ell_2} \sum_{s=0}^{\ell_2} g(x_p, y_s) h_{2p}(x) H_{2s}(y).$$

Для обчислення інтегралу

$$I_s^2(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 Uf(x, y) \sin(\omega Pg(x, y)) dx dy$$

пропонується кубатурна формула

$$\Phi_s^2(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 Uf(x, y) \sin(\omega Pg(x, y)) dx dy.$$

Теорема 3.4. Нехай $f(x, y), g(x, y) \in H_1^{2,1}(M, \widetilde{M})$ та функції $f(x, y)$, $g(x, y)$ задані слідами $f(x_k, y)$, $f(x, y_j)$, $k, j = \overline{0, \ell_1}$, $g(x_p, y)$, $g(x, y_s)$, $p, s = \overline{0, \ell_2}$ на системах взаємно перпендикулярних прямих $x_k = k\Delta_1$, $y_j = j\Delta_1$, $\Delta_1 = \frac{1}{\ell_1}$ та $x_p = p\Delta_2$, $y_s = s\Delta_2$, $\Delta_2 = 1/\ell_2$ в області $G = [0, 1]^2$. Тоді для формули $\Phi_s^2(\omega)$ справедлива наступна оцінка похибки наближення $I_s^2(\omega)$:

$$\rho(I_s^2(\omega), \Phi_s^2(\omega)) = |I_s^2(\omega) - \Phi_s^2(\omega)| \leq \frac{\widetilde{M}}{9} \frac{1}{\ell_1^2} + \widetilde{M} \min \left(2, \frac{\widetilde{M}\omega}{9} \frac{1}{\ell_2^2} \right).$$

Доведення. Для знаходження оцінки похибки наближення $I_s^2(\omega)$ за формулою $\Phi_s^2(\omega)$ використаємо представлення похибки наближення $f(x, y)$ оператором інтерліантом $Uf(x, y)$ через $f^{(1,1)}(x, y)$ та функції

$$G_{1,k}(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x_{k+1} - x}{\Delta_1}, & x_k \leq \xi < x, \\ \frac{x - x_k}{-\Delta_1}, & x < \xi \leq x_{k+1}, \end{cases} \quad G_{2,j}(y, \eta) = \begin{cases} \frac{y_{j+1} - y}{\Delta_1}, & y_j \leq \eta < y, \\ \frac{y - y_j}{-\Delta_1}, & y < \eta \leq y_{j+1}, \end{cases}$$

а також похибки наближення $g(x, y)$ оператором $Og(x, y)$ через $g^{(1,1)}(x, y)$ та функції

$$\tilde{G}_{1,p}(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x_{p+1} - x}{\Delta_2}, & x_p \leq \xi < x, \\ \frac{x - x_p}{-\Delta_2}, & x < \xi \leq x_{p+1}, \end{cases} \quad \tilde{G}_{2,s}(y, \eta) = \begin{cases} \frac{y_{s+1} - y}{\Delta_2}, & y_s \leq \eta < y, \\ \frac{y - y_s}{-\Delta_2}, & y < \eta \leq y_{s+1}. \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \rho(I_s^2(\omega), \Phi_s^2(\omega)) &= |I_s^2(\omega) - \Phi_s^2(\omega)| \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - Uf(x, y)| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| |\sin(\omega g(x, y)) - \sin(\omega Pg(x, y))| dx dy \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\ell_1-1} \sum_{j=0}^{\ell_1-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f^{(1,1)}(\xi, \eta) G_{1k}(x, \xi) G_{2j}(y, \eta) d\xi d\eta \right| dx dy + \\ &\quad + 2\tilde{M} \sum_{p=0}^{\ell_2-1} \sum_{s=0}^{\ell_2-1} \int_{x_p}^{x_{p+1}} \int_{y_s}^{y_{s+1}} \left| \sin \frac{\omega(g(x, y) - Og(x, y))}{2} \right| dx dy \leq \\ &\leq \tilde{M} \sum_{k=0}^{\ell_1-1} \sum_{j=0}^{\ell_1-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} |G_{1k}(x, \xi)| |G_{2j}(y, \eta)| d\xi d\eta dx dy + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\widetilde{M} \sum_{p=0}^{\ell_2-1} \sum_{s=0}^{\ell_2-1} \int_{x_p}^{x_{p+1}} \int_{y_s}^{y_{s+1}} \min \left(1; \frac{\omega |g(x,y) - Og(x,y)|}{2} \right) dx dy \leq \widetilde{M} \ell_1^2 \frac{\Delta_1^2}{3} \frac{\Delta_1^2}{3} + \\
& +2\widetilde{M} \min \left(\sum_{p=0}^{\ell_2-1} \sum_{s=0}^{\ell_2-1} \int_{x_p}^{x_{p+1}} \int_{y_s}^{y_{s+1}} dx dy, \frac{\widetilde{M}\omega}{2} \sum_{p=0}^{\ell_2-1} \sum_{s=0}^{\ell_2-1} \int_{x_p}^{x_{p+1}} \int_{y_s}^{y_{s+1}} \int_{x_p}^{x_{p+1}} \int_{y_s}^{y_{s+1}} |\widetilde{G}_{1p}(x,\xi)| |\widetilde{G}_{2s}(y,\eta)| d\xi d\eta dx dy \right) = \\
& = \frac{\widetilde{M}}{9} \Delta_1^2 + 2\widetilde{M} \min \left(\ell_2^2 \Delta_2^2, \frac{\widetilde{M}\omega}{2} \ell_2^2 \frac{\Delta_2^2}{3} \frac{\Delta_2^2}{3} \right) = \\
& = \frac{\widetilde{M}}{9} \Delta_1^2 + \widetilde{M} \min \left(2; \frac{\widetilde{M}\omega}{9} \Delta_2^2 \right) = \frac{\widetilde{M}}{9} \frac{1}{\ell_1^2} + \widetilde{M} \min \left(2; \frac{\widetilde{M}\omega}{9} \frac{1}{\ell_2^2} \right).
\end{aligned}$$

Теорема 3.4 доведена.

Маючи результати теореми 3.2 та теореми 3.3, можна зробити висновок про оптимальність за порядком точності кубатурної формули $\Phi_s^2(\omega)$ наближеного обчислення інтегралу $I_s^2(\omega)$ на класі диференційовних функцій.

Теорема 3.5. Кубатурна формула $\Phi_s^2(\omega)$ для наближеного обчислення інтегралу $I^2(\omega)$ є оптимальною за порядком точності при $\ell = \ell_2 = \ell$ на класі $f(x, y), g(x, y) \in H^{2,1}(M, \widetilde{M})$.

Доведення. З теорем 3.1. та 3.4 маємо, що при $\ell = \ell_2 = \ell$ таку оцінку похибки

$$\rho(I_s^2(\omega), \Phi_s^2(\omega)) \leq \frac{\widetilde{M}}{16\ell^2} + \widetilde{M} \min \left(2; \frac{\omega(\widetilde{M})}{16\ell^2} \right) \leq K_1 \max \left\{ \frac{1}{\ell^2}; \min \left\{ 1; \frac{|\omega|}{\ell^2} \right\} \right\}.$$

Порівнюючи оцінку з оцінкою на класі при $r=1$, приходимо до висновку, що кубатурна формула $\Phi_s^2(\omega)$ є оптимальною за порядком точності.

Теорема 3.5. доведена.

3.3 Економні схеми інтерполяції при побудові кубатурних формул наближеного обчислення інтегралу від функції двох змінних загального виду

Введемо наступні позначення:

$$h1_{0k}(x) = \begin{cases} 1, x \in X1_k, \\ 0, x \notin X1_k, \end{cases} \quad k = \overline{1, \ell_1}, \quad H1_{0j}(y) = \begin{cases} 1, y \in Y1_j, \\ 0, y \notin Y1_j, \end{cases} \quad j = \overline{1, \ell_1},$$

$$X1_k = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}], \quad Y1_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}],$$

$$x_k = k\Delta_1 - \Delta_1 / 2, \quad y_j = j\Delta_1 - \Delta_1 / 2, \quad k, j = \overline{1, \ell_1}, \quad \Delta_1 = 1 / \ell_1,$$

$$\tilde{h}1_{0\tilde{k}}(x) = \begin{cases} 1, x \in \tilde{X}1_{\tilde{k}}, \\ 0, x \notin \tilde{X}1_{\tilde{k}}, \end{cases} \quad \tilde{k} = \overline{1, \ell_1^2}, \quad \tilde{H}1_{0\tilde{j}}(y) = \begin{cases} 1, y \in \tilde{Y}1_{\tilde{j}}, \\ 0, y \notin \tilde{Y}1_{\tilde{j}}, \end{cases} \quad \tilde{j} = \overline{1, \ell_1^2},$$

$$\tilde{X}1_{\tilde{k}} = [\tilde{x}_{\tilde{k}-1/2}, \tilde{x}_{\tilde{k}+1/2}], \quad \tilde{Y}1_{\tilde{j}} = [\tilde{y}_{\tilde{j}-1/2}, \tilde{y}_{\tilde{j}+1/2}]$$

$$\tilde{x}_{\tilde{k}} = \tilde{k}\tilde{\Delta}_1 - \frac{\tilde{\Delta}_1}{2}, \quad \tilde{y}_{\tilde{j}} = \tilde{j}\tilde{\Delta}_1 - \frac{\tilde{\Delta}_1}{2}, \quad \tilde{k}, \tilde{j} = \overline{1, \ell_1^2}, \quad \tilde{\Delta}_1 = \frac{1}{\ell_1^2},$$

$$h2_{0p}(x) = \begin{cases} 1, x \in X2_p, \\ 0, x \notin X2_p, \end{cases} \quad p = \overline{1, \ell_2}, \quad H2_{0s}(y) = \begin{cases} 1, y \in Y2_s, \\ 0, y \notin Y2_s, \end{cases} \quad s = \overline{1, \ell_2},$$

$$X2_p = [x_{p-1/2}, x_{p+1/2}], \quad Y2_s = [y_{s-1/2}, y_{s+1/2}],$$

$$x_p = p\Delta_2 - \Delta_2 / 2, \quad y_s = s\Delta_2 - \Delta_2 / 2, \quad p, s = \overline{1, \ell_2}, \quad \Delta_2 = 1 / \ell_2,$$

$$\tilde{h}2_{0\tilde{p}}(x) = \begin{cases} 1, x \in \tilde{X}2_{\tilde{p}}, \\ 0, x \notin \tilde{X}2_{\tilde{p}}, \end{cases} \quad \tilde{p} = \overline{1, \ell_2^2}, \quad \tilde{H}2_{0\tilde{s}}(y) = \begin{cases} 1, y \in \tilde{Y}2_{\tilde{s}}, \\ 0, y \notin \tilde{Y}2_{\tilde{s}}, \end{cases} \quad \tilde{s} = \overline{1, \ell_2^2},$$

$$\tilde{X}2_{\tilde{p}} = [\tilde{x}_{\tilde{p}-1/2}, \tilde{x}_{\tilde{p}+1/2}], \quad \tilde{Y}2_{\tilde{s}} = [\tilde{y}_{\tilde{s}-1/2}, \tilde{y}_{\tilde{s}+1/2}],$$

$$\tilde{x}_{\tilde{p}} = \tilde{p}\tilde{\Delta}_2 - \tilde{\Delta}_2 / 2, \quad \tilde{y}_{\tilde{s}} = \tilde{s}\tilde{\Delta}_2 - \tilde{\Delta}_2 / 2, \quad \tilde{p}, \tilde{s} = \overline{1, \ell_2^2}, \quad \tilde{\Delta}_2 = 1 / \ell_2^2.$$

Розглянемо оператори

$$\mathcal{H}(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell_1} f(x_k, y) h1_{0k}(x) + \sum_{j=1}^{\ell_1} f(x, y_j) H1_{0j}(y) - \sum_{k=1}^{\ell_1} \sum_{j=1}^{\ell_1} f(x_k, y_j) h1_{0k}(x) H1_{0j}(y),$$

$$\tilde{J}f(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell_1} \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell_1^2} f(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}}) h_{10k}(x) \tilde{H}_{10\tilde{j}}(y) + \sum_{j=1}^{\ell_1} \sum_{\tilde{k}=1}^{\ell_1^2} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j) \tilde{h}_{10\tilde{k}}(x) H_{10j}(y) -$$

$$- \sum_{k=1}^{\ell_1} \sum_{j=1}^{\ell_1} f(x_k, y_j) h_{10k}(x) H_{10j}(y),$$

$$Og(x, y) = \sum_{p=1}^{\ell_2} g(x_p, y) h_{20p}(x) + \sum_{s=1}^{\ell_2} g(x, y_s) H_{20s}(y) - \sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{s=1}^{\ell_2} g(x_p, y_s) h_{20p}(x) H_{20s}(y),$$

$$\tilde{O}g(x, y) = \sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{\tilde{s}=1}^{\ell_2^2} g(x_p, \tilde{y}_{\tilde{s}}) h_{20p}(x) \tilde{H}_{20\tilde{s}}(y) + \sum_{s=1}^{\ell_2} \sum_{\tilde{p}=1}^{\ell_2^2} g(\tilde{x}_{\tilde{p}}, y_s) \tilde{h}_{20\tilde{p}}(x) H_{20s}(y) -$$

$$- \sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{s=1}^{\ell_2} g(x_p, y_s) h_{20p}(x) H_{20s}(y).$$

Якщо ввести додаткові оператори

$$J_1 f(x, y) = \sum_{k=1}^{\ell_1} f(x_k, y) h_{10k}(x),$$

$$J_2 f(x, y) = \sum_{j=1}^{\ell_1} f(x, y_j) H_{10j}(y),$$

$$\tilde{J}_1 f(x, y) = \sum_{\tilde{k}=1}^{\ell_1^2} f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y) \tilde{h}_{10\tilde{k}}(x),$$

$$\tilde{J}_2 f(x, y) = \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell_1^2} f(x, \tilde{y}_{\tilde{j}}) \tilde{H}_{10\tilde{j}}(y),$$

$$O_1 g(x, y) = \sum_{p=1}^{\ell_2} g(x_p, y) h_{20p}(x),$$

$$O_2 g(x, y) = \sum_{s=1}^{\ell_2} g(x, y_s) H_{20s}(y),$$

$$\tilde{O}_1 g(x, y) = \sum_{\tilde{p}=1}^{\ell_2^2} g(\tilde{x}_{\tilde{p}}, y) \tilde{h}_{20\tilde{p}}(x), \quad \tilde{O}_2 g(x, y) = \sum_{\tilde{s}=1}^{\ell_2^2} g(x, \tilde{y}_{\tilde{s}}) \tilde{H}_{20\tilde{s}}(y),$$

тоді для операторів-інтерліантів $Jf(x, y)$, $Of(x, y)$ та операторів-інтерполянтів

$\tilde{J}f(x, y)$, $\tilde{O}g(x, y)$, справедливі наступні тотожності:

$$Jf = (J_1 + J_2 - J_1 J_2) f, \quad \tilde{J}f = (J_1 \tilde{J}_2 + \tilde{J}_1 J_2 - J_1 J_2) f,$$

$$Og = (O_1 + O_2 - O_1 O_2) g, \quad \tilde{O}g = (O_1 \tilde{O}_2 + \tilde{O}_1 O_2 - O_1 O_2) g.$$

Наступна кубатурна формула

$$\tilde{\Phi}^2(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}g(x, y)} dx dy$$

пропонується для наближеного обчислення інтегралу

$$I^2(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy.$$

Теорема 3.6. Нехай $f(x, y), g(x, y) \in H^{2,1}(M, \tilde{M})$, тоді

$$\begin{aligned} \rho\left(I^2(\omega), \tilde{\Phi}^2(\omega)\right) &= \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}g(x, y)} dx dy \right| \leq \\ &\leq \frac{\tilde{M} + 8M}{16\ell_1^2} + \tilde{M} \min\left(2; \frac{\omega(\tilde{M} + 8M)}{16\ell_2^2}\right). \end{aligned}$$

Доведення. Знайдемо оцінку $\rho\left(I^2(\omega), \tilde{\Phi}^2(\omega)\right)$

$$\begin{aligned} \rho\left(I^2(\omega), \tilde{\Phi}^2(\omega)\right) &= \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}g(x, y)} dx dy \right| \leq \\ &\leq \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}g(x, y)} dx dy \right| + \\ &+ \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}g(x, y)} dx dy \right| + \\ &+ \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}g(x, y)} dx dy \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - \tilde{J}f(x, y)| \left| e^{i\omega g(x, y)} \right| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \left| e^{i\omega g(x, y)} - e^{i\omega O g(x, y)} \right| dx dy + \\
& \quad + \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \left| e^{i\omega O g(x, y)} - e^{i\omega \tilde{O} g(x, y)} \right| dx dy \leq \\
& \leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - Jf(x, y) + Jf(x, y) - \tilde{J}f(x, y)| dx dy + \\
& \quad + \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \left| 2i \sin \frac{\omega g(x, y) - \omega O g(x, y)}{2} e^{i\frac{\omega}{2}(g(x, y) + O g(x, y))} \right| dx dy + \\
& \quad + \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \left| 2i \sin \frac{\omega O g(x, y) - \omega \tilde{O} g(x, y)}{2} e^{i\frac{\omega}{2}(O g(x, y) + \tilde{O} g(x, y))} \right| dx dy \leq \\
& \leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - Jf(x, y)| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |Jf(x, y) - \tilde{J}f(x, y)| dx dy + \\
& \quad + 2 \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \left| \sin \frac{\omega g(x, y) - \omega O g(x, y)}{2} \right| dx dy + 2 \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| \left| \sin \frac{\omega O g(x, y) - \omega \tilde{O} g(x, y)}{2} \right| dx dy \leq \\
& \leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - Jf(x, y)| dx dy + \\
& \quad + \int_0^1 \int_0^1 \left| (J_1 + J_2 - J_1 J_2) f - (J_1 \tilde{J}_2 + J_2 \tilde{J}_1 - J_1 J_2) f \right| dx dy + \\
& \quad + 2\tilde{M} \int_0^1 \int_0^1 \min \left(1, \frac{\omega |g(x, y) - O g(x, y)|}{2} \right) dx dy +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\widetilde{M} \int_0^1 \int_0^1 \min \left(1; \frac{\omega \left| (O_1 + O_2 - O_1 O_2) g - (O_1 \widetilde{O}_2 + O_2 \widetilde{O}_1 - O_1 O_2) g \right|}{2} \right) dx dy \leq \\
& \leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - Jf(x, y)| dx dy + \int_0^1 \int_0^1 \left| (J_1 - J_1 \widetilde{J}_2) f + (J_2 - J_2 \widetilde{J}_1) f \right| dx dy + \\
& +2\widetilde{M} \int_0^1 \int_0^1 \min \left(1; \frac{\omega |g(x, y) - Og(x, y)|}{2} \right) dx dy + \\
& +2\widetilde{M} \int_0^1 \int_0^1 \min \left(1; \frac{\omega (O_1 - O_1 \widetilde{O}_2) g + (O_2 - O_2 \widetilde{O}_1) g}{2} \right) dx dy \leq \\
& \leq \sum_{k=1}^{\ell_1} \sum_{j=1}^{\ell_1} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \left| \int_{x_k}^x \int_{y_j}^y f^{(1,1)}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right| dx dy + \sum_{k=1}^{\ell_1} \sum_{\tilde{j}=1}^{\ell_1^2} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int_{\tilde{y}_{\tilde{j}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{j}+\frac{1}{2}}} |f(x_k, y) - f(x_k, \tilde{y}_{\tilde{j}})| dy + \\
& + \sum_{j=1}^{\ell_1} \sum_{\tilde{k}=1}^{\ell_1^2} \int_{\tilde{x}_{\tilde{k}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{k}+\frac{1}{2}}} |f(x, y_j) - f(\tilde{x}_{\tilde{k}}, y_j)| dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy + \\
& +2\widetilde{M} \sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{s=1}^{\ell_2} \int_{x_{p-\frac{1}{2}}}^{x_{p+\frac{1}{2}}} \int_{y_{s-\frac{1}{2}}}^{y_{s+\frac{1}{2}}} \min \left(1; \frac{\omega}{2} \left| \int_{x_p}^x \int_{y_s}^y g^{(1,1)}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right| \right) dx dy + \\
& +2\widetilde{M} \min \left(\sum_{\tilde{p}=1}^{\ell_2^2} \sum_{\tilde{s}=1}^{\ell_2^2} \int_{\tilde{x}_{\tilde{p}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{p}+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} dx dy; \frac{\omega}{2} \sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{\tilde{s}=1}^{\ell_2^2} \int_{x_{p-\frac{1}{2}}}^{x_{p+\frac{1}{2}}} dx \int_{\tilde{y}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} |g(x_p, y) - g(x_p, \tilde{y}_{\tilde{s}})| dy + \right. \\
& \left. + \frac{\omega}{2} \sum_{s=1}^{\ell_2} \sum_{\tilde{p}=1}^{\ell_2^2} \int_{\tilde{x}_{\tilde{p}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{p}+\frac{1}{2}}} |g(x, y_s) - g(\tilde{x}_{\tilde{p}}, y_s)| dx \int_{y_{s-\frac{1}{2}}}^{y_{s+\frac{1}{2}}} dy \right) \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \leq \widetilde{M} \sum_{k=1}^{\ell_1} \sum_{j=1}^{\ell_1} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} |x-x_k| dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} |y-y_j| dy + \\
& + M \sum_{k=1}^{\ell_1} \sum_{j=1}^{\ell_1^2} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} dx \int_{\tilde{y}_{j-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{j+\frac{1}{2}}} |y-\tilde{y}_j| dy + M \sum_{j=1}^{\ell_1} \sum_{k=1}^{\ell_1^2} \int_{\tilde{x}_{k-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{k+\frac{1}{2}}} |x-\tilde{x}_k| dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} dy + \\
& + 2\widetilde{M} \min \left(\sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{s=1}^{\ell_2} \int_{x_{p-\frac{1}{2}}}^{x_{p+\frac{1}{2}}} \int_{y_{s-\frac{1}{2}}}^{y_{s+\frac{1}{2}}} dx dy, \frac{\widetilde{M}\omega}{2} \sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{s=1}^{\ell_2} \int_{x_{p-\frac{1}{2}}}^{x_{p+\frac{1}{2}}} \int_{y_{s-\frac{1}{2}}}^{y_{s+\frac{1}{2}}} |x-x_p| |y-y_s| dx dy \right) + \\
& + 2\widetilde{M} \min \left(\sum_{\tilde{p}=1}^{\ell_2^2} \sum_{\tilde{s}=1}^{\ell_2^2} \int_{\tilde{x}_{\tilde{p}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{p}+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} dx dy, \frac{\omega}{2} \sum_{p=1}^{\ell_2} \sum_{s=1}^{\ell_2^2} \int_{x_{p-\frac{1}{2}}}^{x_{p+\frac{1}{2}}} \int_{\tilde{y}_{\tilde{s}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{y}_{\tilde{s}+\frac{1}{2}}} |y-\tilde{y}_s| dy + \frac{\omega}{2} \sum_{s=1}^{\ell_2} \sum_{\tilde{p}=1}^{\ell_2^2} \int_{\tilde{x}_{\tilde{p}-\frac{1}{2}}}^{\tilde{x}_{\tilde{p}+\frac{1}{2}}} |x-\tilde{x}_{\tilde{p}}| dx \int_{y_{s-\frac{1}{2}}}^{y_{s+\frac{1}{2}}} dy \right) \leq \\
& \leq \widetilde{M} \ell_1^2 \frac{\Delta_1^2}{4} \frac{\Delta_1^2}{4} + 2M \ell_1 \Delta_1 \frac{\Delta_1^2}{4} \ell_1^2 + \\
& + 2\widetilde{M} \min \left(\ell_2^2 \Delta_2^2, \frac{\widetilde{M}\omega}{2} \ell_2^2 \frac{\Delta_2^2}{4} \frac{\Delta_2^2}{4} \right) + 2\widetilde{M} \min \left(\left(\ell_2^2 \Delta_2^2 \right)^2, \frac{2M\omega}{2} \ell_2 \Delta_2 \ell_2^2 \frac{\Delta_2^2}{4} \right) = \\
& = \frac{\widetilde{M}}{16\ell_1^2} + \frac{M}{2\ell_1^2} + \widetilde{M} \min \left(2; \frac{\widetilde{M}\omega}{16\ell_2^2} \right) + \widetilde{M} \min \left(2; \frac{M\omega}{2\ell_2^2} \right) = \frac{\widetilde{M}+8M}{16\ell_1^2} + \widetilde{M} \min \left(2; \frac{\omega(\widetilde{M}+8M)}{16\ell_2^2} \right).
\end{aligned}$$

Теорема 3.6. доведена.

Зауваження 3.1. Для досягнення похибки $O\left(\frac{1}{\ell^2}\right)$ кубатурною формулою $\Phi^2(\omega)$ використовується не $O(\ell^4) = O(N)$, як в класичній формулі значень функції, а $O(\ell^3) = O\left(N^{\frac{3}{4}}\right)$.

Висновки до розділу 3

1. Представлено оптимальну похибку чисельного інтегрування на класі диференційовних функцій загального виду.
2. В розділі описано процес математичного моделювання задач цифрової обробки зображень на основі кубатурної формули наближеного обчислення подвійних інтегралів від швидко осцилюючих функцій загального виду, яка в своїй побудові використовує такий новий інформаційний оператор як оператор інтерлінації з кусково-сталими сплайнами у вигляді допоміжних функцій. В якості даних інформаційний оператор використовує значення функції на лініях. На класі диференційовних функцій отримано оцінку похибки наближеного обчислення подвійного інтегралу від швидко осцилюючої функції загального виду. Кубатурна формула є оптимальною за порядком точності на класі диференційовних функцій.
3. На класі диференційовних функцій побудовано оптимальну за порядком точності кубатурну формулу наближеного обчислення подвійних інтегралів від швидко осцилюючих функцій загального виду, на основі якої будуються математичні моделі задач цифрової обробки зображень. Формула містить такий новий інформаційний оператор як оператор інтерлінації з кусково-лінійними сплайнами у вигляді допоміжних функцій. В якості даних інформаційний оператор використовує значення функції на лініях.
4. В розділі побудовано кубатурну формулу наближеного обчислення подвійних інтегралів від швидко осцилюючих функцій загального виду, яка використовує економні схеми інтерполяції. Суть економної схеми інтерполяції полягає у використанні оператора інтерполяції, побудованого на основі інтерлінанту з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих сплайнів. В процесі математичного моделювання задач цифрової обробки зображень використовується кубатурна формула, яка має високу точність наближення та використовує на порядок менше значень функції в порівнянні з класичними формулами.

РОЗДІЛ 4

ТЕСТУВАННЯ КУБАТУРНИХ ФОРМУЛ НАБЛИЖЕНОГО ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ ВІД ШВИДКО ОСЦИЛЮЮЧИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ЗАГАЛЬНОГО ВИДУ

Розрізняють два види тестування [10, с. 214]:

- тестування програм з метою виявлення помилок їх проектування і кодування обчислювальних алгоритмів розв'язання задач;
- тестування обчислювальних алгоритмів, реалізованих конкретними програмами, з метою дослідження їх функціональних можливостей при розв'язанні задач з даного класу.

Основним об'єктом уваги в даній роботі є другий вид тестування. До вузлових питань другого виду тестування відносяться:

- визначення набору характеристик обчислювального алгоритму;
- класифікація розв'язуваних задач і складання тестових наборів;
- розв'язання тестових задач, обчислення значень характеристик та їх оцінок;
- обробка, інтерпретація і використання результатів тестування;
- автоматизація процедур тестування.

В роботах [107-110] розглядаються елементи теорії обчислень та обчислювальної складності, а в [9, 10, 111, 113-116] продемонстровано в т. ч. результати тестування кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій декількох змінних. В даному розділі наведено тестування кубатурних формул, які в свій побудові використовують нові інформаційні оператори (оператори інтерлінації, інтерфлетації) [105, 106, 112]. Формули наближено обчислюють інтеграли від швидко осцилюючих функцій декількох змінних в загальному виді, тобто іррегулярний випадок та використовують значення функцій на площинах, лініях, точках.

Результати тестування виявляють потенційну спроможність алгоритмів, зокрема кубатурних формул, та дозволяють сформулювати наступні кроки досліджень [117-121].

Чисельне інтегрування, в т. ч. швидко осцилюючих функцій, широко використовується при математичному моделюванні технічних задач. В [122-125] викладена методика викладання тем з чисельного інтегрування швидко осцилюючих функцій декількох змінних для інженерних спеціальностей. Запропонована методика використовується при викладанні декількох курсів, про що свідчить акт впровадження (див. Додаток Б).

4.1. Для випадку, коли інформація задана слідами функцій $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ на площинах

Предметом тестування в даному підрозділі є кубатурна формула

$$\Phi^3(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 Jf(x, y, z) \sin \omega g(x, y, z) dx dy dz$$

для наближеного обчислення інтегралу від швидко осцилюючих функцій загального виду

$$I^3(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, z) \sin \omega g(x, y, z) dx dy dz ,$$

що побудовані на основі використання операторів інтерфлетації у випадку, коли інформація про функції $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ задається слідами функції на взаємно перпендикулярних площинах (див. рисунок 4.1).

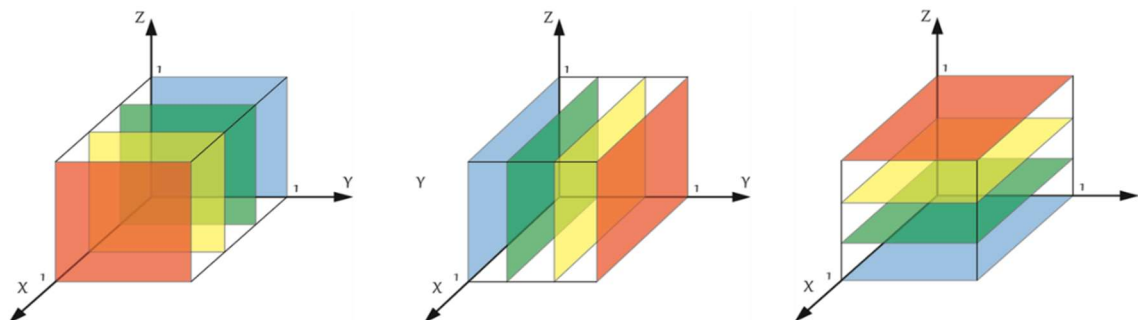


Рис. 4.1. Площини, на яких задані сліди функцій $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$.

Метою є перевірка тверджень теореми 2.2 на класі $H_1^{3,1}(M, \overline{M}, \widetilde{M})$ – клас дійсних функцій, визначених на $G=[0,1]^3$ і таких, що частинні похідні обмежені, тобто

$$\left| f^{(1,0,0)}(x,y,z) \right| \leq M, \quad \left| f^{(0,1,0)}(x,y,z) \right| \leq M, \quad \left| f^{(0,0,1)}(x,y,z) \right| \leq M,$$

$$\left| f^{(1,1,0)}(x,y,z) \right| \leq \overline{M}, \quad \left| f^{(1,0,1)}(x,y,z) \right| \leq \overline{M}, \quad \left| f^{(0,1,1)}(x,y,z) \right| \leq \overline{M}, \quad \left| f^{(1,1,1)}(x,y,z) \right| \leq \widetilde{M}.$$

Теорема 2.2. Нехай $f(x,y,z), g(x,y,z) \in H^{3,r}(M, \widetilde{M})$, та $f(x,y,z), g(x,y,z)$ задані $N=3\ell_1+3\ell_2$ слідами $f(x_k,y,z), f(x,y_j,z), f(x,y,z_s), k,j,s=\overline{1,\ell_1}$ та $g(\tilde{x}_p,y,z), g(x,\tilde{y}_q,z), g(x,y,\tilde{z}_r), p,q,r=\overline{1,\ell_2}$ системах взаємно перпендикулярних прямих в області $G=[0,1]^3$. Тоді кубатурна формула $\Phi^3(\omega)$ є оптимальною за порядком точності та справедлива наступна оцінка:

$$\rho(I^3(\omega), \Phi^3(\omega)) = \frac{\widetilde{M}}{64} \frac{1}{\ell_1^3} + \widetilde{M} \min \left(2; \frac{\widetilde{M}\omega}{64} \frac{1}{\ell_2^3} \right).$$

В таблиці 4.1 наведено результати тестування кубатурної формули $\Phi^3(\omega)$ для наближеного обчислення інтегралу $I^3(\omega)$. В таблиці результати наведено для $f(x,y,z) = \sin(x+y+z)$, $g(x,y,z) = \cos(x+y+z)$, при $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ та для $\omega = 2\pi, \omega = 5\pi, \omega = 10\pi$. В кожному випадку в таблиці 4.1 наведено похибку $\varepsilon = |I^3(\omega) - \Phi^3(\omega)|$, отриману в результаті обчислень та її оцінку

$$E = \frac{\widetilde{M}}{64} \frac{1}{\ell^3} + \widetilde{M} \min \left(2; \frac{\widetilde{M}\omega}{64} \frac{1}{\ell^3} \right).$$

Для функцій

$$f(x, y, z) = \sin(x + y + z), \quad g(x, y, z) = \cos(x + y + z)$$

маємо

$$E = \frac{1}{64\ell^3} + \min\left(2; \frac{\omega}{64\ell^3}\right).$$

Представлені обчислення проведено в Wolfram Mathematica 10. Чисельний експеримент підтверджують теоретичні результати, отримані в теоремі 2.2.

Таблиця 4.1

Обчислення $I^3(\omega)$ за кубатурною формулою $\Phi^3(\omega)$

ℓ	ω	$\Phi^3(\omega)$	$I^3(\omega)$	ε	E
5	2π	-0,005659773384241312	-0,00565902098595826	$1,00 \cdot 10^{-6}$	$9,10 \cdot 10^{-4}$
10	2π	-0,005657576013215849	-0,00565902098595826	$1,70 \cdot 10^{-6}$	$1,13 \cdot 10^{-4}$
5	5π	0,002969393727490588	0,00294706607065792	$2,59 \cdot 10^{-5}$	$2,08 \cdot 10^{-3}$
10	5π	0,002951850395219029	0,00294706607065792	$1,16 \cdot 10^{-5}$	$2,61 \cdot 10^{-4}$
15	5π	0,002947434378359690	0,00294706607065792	$3,58 \cdot 10^{-6}$	$7,73 \cdot 10^{-5}$
20	5π	0,002932224529620142	0,00294706607065792	$1,58 \cdot 10^{-5}$	$3,26 \cdot 10^{-5}$
25	5π	0,002945672856298047	0,00294706607065792	$5,13 \cdot 10^{-6}$	$1,67 \cdot 10^{-5}$
5	10π	0,000356265110351913	-0,00026160239726621	$7,39 \cdot 10^{-4}$	$4,05 \cdot 10^{-3}$
10	10π	-0,000261065518418426	-0,00026160239726621	$3,62 \cdot 10^{-6}$	$5,06 \cdot 10^{-4}$
15	10π	-0,000261837407624295	-0,00026160239726621	$2,41 \cdot 10^{-7}$	$1,05 \cdot 10^{-4}$
20	10π	-0,000260805717278864	-0,00026160239726621	$1,39 \cdot 10^{-6}$	$6,33 \cdot 10^{-5}$
25	10π	-0,00026136986950217	-0,00026160239726621	$8,36 \cdot 10^{-7}$	$3,24 \cdot 10^{-5}$
20	20π	0,00050210512582646	-0,00007226811852204	$5,83 \cdot 10^{-4}$	$1,24 \cdot 10^{-4}$
25	20π	-0,00008515953820463	-0,00007226811852204	$1,30 \cdot 10^{-5}$	$6,38 \cdot 10^{-5}$

Також наведемо результати тестування кубатурної формули наближеного обчислення потрійного інтегралу з використанням оператора кусково-сталості інтерлінації, побудованого на основі кусково-сталого оператора інтерфлетації,

у випадку, коли інформація про функцію задана її слідами на лініях.

Метою є перевірка тверджень теореми 2.3 на класі $H_1^{3,1}(M, \overline{M}, \widetilde{M})$.

Теорема 2.3. Для кубатурної формули $\Phi^3 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \tilde{f}(x, y, z) dx dy dz$ наближеного обчислення $I^3 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, z) dx dy dz$ на класі $H_1^{3,1}(M, \overline{M}, \widetilde{M})$ справедлива наступна оцінка:

$$\rho(H_1^{3,1}(M, \overline{M}, \widetilde{M}), \Phi^3) \leq \left(\frac{\widetilde{M}}{64} + \frac{3\overline{M}}{16} \right) \frac{1}{\ell^3}.$$

В таблиці 4.2 наведено результати тестування запропонованої кубатурної формули в системі комп'ютерної математики MathCad для функції $f(x, y, z) = \sin(x + y + z)$, де

$$E = \frac{\widetilde{M}}{64} \frac{1}{\ell^3} + \widetilde{M} \min \left(2; \frac{\widetilde{M}\omega}{64} \frac{1}{\ell^3} \right) \quad \text{і} \quad |\Phi^3 - I^3| \leq \varepsilon = \left(\frac{1}{64} + \frac{3}{16} \right) \frac{1}{\ell^3}.$$

Таблиця 4.2

Обчислення I^3 за кубатурною формулою Φ^3

ℓ	Φ^3	I^3	$E = \Phi^3 - I^3 $	$\varepsilon = \left(\frac{1}{64} + \frac{3}{16} \right) \frac{1}{\ell^3}$
4	0,879353824163323	0,879354930645401	0,000001106482077	0,003173
9	0,879354922142074	0,879354930645401	0,000000008503327	0,000278
16	0,879354930376157	0,879354930645401	0,000000000269243	0,000049
25	0,879354930626902	0,879354930645401	0,000000000018499	0,000013

4.2. Для випадку, коли інформація задана слідами функцій $f(x, y)$, $g(x, y)$ на лініях

Предметом тестування в даному підрозділі є кубатурні формули обчислення подвійних інтегралів від швидко осцилюючих функцій двох змінних загального виду

$$I^2(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy,$$

що побудовані на основі використання операторів інтерлінації функцій у випадку, коли інформація про функції $f(x,y)$, $g(x,y)$ задається різними інформаційними операторами – слідами функції $f(x,y)$, $g(x,y)$ на взаємно перпендикулярних лініях (див. рисунок 4.2).

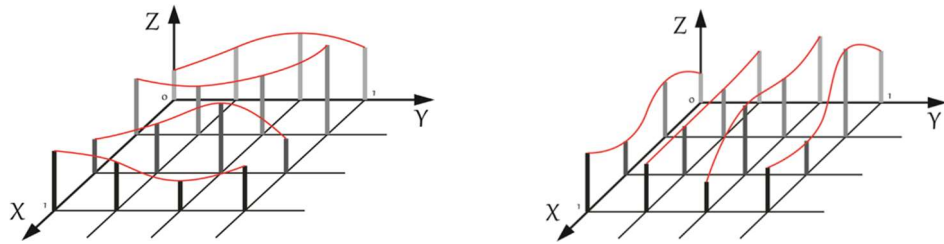


Рис. 4.2. Лінії, на яких задані сліди функцій $f(x,y)$, $g(x,y)$

Наведемо результати тестування кубатурної формули

$$\Phi^2(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 Jf(x,y) e^{i\omega O g(x,y)} dx dy$$

на класі $H^{2,r}(M, \widetilde{M})$, $r \geq 0$ – клас дійсних функцій $r \geq 0$, визначених на $G = [0,1]^2$ і таких, що

$$|f^{(r,0)}(x,y)| \leq M, \quad |f^{(0,r)}(x,y)| \leq M, \quad r \neq 0, \quad |f^{(r,r)}(x,y)| \leq \widetilde{M}, \quad r \geq 0.$$

Метою є перевірка тверджень теореми 3.2.

Теорема 3.2. Нехай $f(x,y)$, $g(x,y) \in H^{2,1}(M, \widetilde{M})$, тоді

$$\rho\left(I^2(\omega), \Phi^2(\omega)\right) = \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) e^{i\omega g(x,y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 Jf(x,y) e^{i\omega O g(x,y)} dx dy \right| \leq$$

$$\leq \frac{\widetilde{M}}{16\ell_1^2} + \widetilde{M} \min \left(2; \frac{\omega(\widetilde{M})}{16\ell_2^2} \right).$$

В таблиці 4.3 наведено результати обчислень $I^2(\omega)$ за допомогою кубатурної формули $\Phi^2(\omega)$ для функцій

$$f(x, y) = \sin(x + y), \quad g(x, y) = \sin(x - y)$$

при різних ℓ та ω , для яких $M = 1$, $\widetilde{M} = 1$. Покажемо, що

$$\left| I^2(\omega) - \Phi^2(\omega) \right| \leq \varepsilon(\omega) = \frac{1}{16\ell^2} + \min \left(2; \frac{1}{16\ell^2} \right) \text{ при } \ell_1 = \ell_2 = \ell.$$

Таблиця 4.3

Обчислення $I^2(\omega)$ за кубатурною формулою $\Phi^2(\omega)$

ℓ	ω	$\text{Re} \Phi^2,$ $\text{Im} \Phi^2$	$\text{Re} I^2,$ $\text{Im} I^2$	$\left \text{Re} \Phi^2 - \text{Re} I^2 \right ,$ $\left \text{Im} \Phi^2 - \text{Im} I^2 \right $	$\varepsilon(\omega)$
2	2π	0,35101917303444 -0,327128620751577	0,3558050633093754 -0,3289739994021025	0,004785890307302 0,001845378625055	0,113799770424681
4	2π	0,355505465802808 -0,328815773916963i	0,3558050633093754 -0,3289739994021025	0,000299597538934 0,00015822545967	0,02844994260617
6	4π	0,206645989426712 -0,229009556506822i	0,2067321725608352 -0,22893074545300268	0,000086183137425 0,000078811051748	0,02355272676104
10	4π	0,206712059754195 -0,22889865385072	0,2067321725608352 -0,22893074545300268	0,000020112809941 0,000032091604354	0,008478981633974
15	4π	0,206729686328536 -0,228919461807032	0,2067321725608352 -0,22893074545300268	0,000002486235601 0,000011283648043	0,003768436281766
20	4π	0,206731036741964 -0,228929330471747	0,2067321725608352 -0,22893074545300268	0,002119745408494 0,000001414983327	0,002119745408494
10	7π	-0,153577657242146 0,151618652292859	-0,15356616365737322 0,151662234496899	0,000011493594222 0,000043582165757	0,014369467859455
4	10π	0,149185460657471 -0,126807828504932	0,14050614204578676 -0,1258066079076586	0,008679318626712 0,001001220598108	0,126624713030851
6	10π	0,140637499024613 -0,125703811278553i	0,14050614204578676 -0,1258066079076586	0,000131356993854 0,000102796628271	0,056277650235934

4.3 Для випадку, коли інформація про функції $f(x, y)$, $g(x, y)$ задана в точках

Наведемо результати тестування кубатурної формули

$$\tilde{\Phi}^2(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}g(x, y)} dx dy,$$

яка була запропонована для наближеного обчислення інтегралу

$$I^2(\omega) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy.$$

Метою є перевірка тверджень теореми 3.6.

Теорема 3.6. Нехай $f(x, y)$, $g(x, y) \in H^{2,1}(M, \tilde{M})$, тоді

$$\begin{aligned} \rho\left(I^2(\omega), \tilde{\Phi}^2(\omega)\right) &= \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{i\omega g(x, y)} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{J}f(x, y) e^{i\omega \tilde{O}g(x, y)} dx dy \right| \leq \\ &\leq \frac{\tilde{M} + 8M}{16\ell_1^2} + \tilde{M} \min\left(2; \frac{\omega(\tilde{M} + 8M)}{16\ell_2^2}\right). \end{aligned}$$

В таблиці 4.4 наведено результати обчислень $I^2(\omega)$ за допомогою кубатурної формули $\tilde{\Phi}^2(\omega)$ для функцій

$$f(x, y) = \sin(x + y), \quad g(x, y) = \sin(x + y)$$

при різних ℓ та ω , для яких $M = 1$, $\tilde{M} = 1$. Покажемо, що

$$\left| I^2(\omega) - \tilde{\Phi}^2(\omega) \right| \leq \varepsilon(\omega) = \frac{9}{16\ell^2} + \min\left(2; \frac{9\omega}{16\ell^2}\right) \text{ при } \ell_1 = \ell_2 = \ell.$$

Обчислення $I^2(\omega)$ за кубатурною формулою $\tilde{\Phi}^2(\omega)$

ℓ	ω	$\operatorname{Re} \tilde{\Phi}^2,$ $\operatorname{Im} \tilde{\Phi}^2$	$\operatorname{Re} I^2,$ $\operatorname{Im} I^2$	$\left \operatorname{Re} \tilde{\Phi}^2 - \operatorname{Re} I^2 \right ,$ $\left \operatorname{Im} \tilde{\Phi}^2 - \operatorname{Im} I^2 \right $	$\varepsilon(\omega)$
2	2π	0,3540375916459062 - 0,33304613008975337	0,3558050633093754 -0,3289739994021025	0,00176747166346924 0,00407213068765083	1,0241979338
4	2π	0,3555893919184368 - 0,3291350269882384	0,3558050633093754 -0,3289739994021025	0,00021567139093864 0,00016102758613584	0,2560494835
6	4π	0,20660758891345235 -0,22871334346415143	0,2067321725608352 -0,22893074545300268	0,000124583647382 0,00021740198885124	0,2119745408
10	4π	0,20663494102710486 -0,22900022093506067	0,2067321725608352 -0,22893074545300268	0,000097231533730 0,000069475482058	0,07631083471
10	7π	-0,1532312838429917 0,15179659763083148	-0,15356616365737322 0,151662234496899	0,00033487981438152 0,00013436313393248	0,12932521074
4	10π	0,15139020344623452 -0,12580278614219909	0,14050614204578676 -0,1258066079076586	0,01088406140044776 0,00000382176545952	1,13962241728
6	10π	0,14071225700304252 -0,1254919790979713	0,14050614204578676 -0,1258066079076586	0,0002061149572557 0,0003146288096873	0,50649885212
10	10π	0,14083352577051267 -0,1251188448477139	0,14050614204578676 -0,1258066079076586	0,00032738372472592 0,0006877630599447	0,18233958676
15	10π	0,14046349223555732 -0,12556607218226937	0,14050614204578676 -0,1258066079076586	0,00004264981022944 0,00024053572538924	0,0810398163

На рисунку 4.3 представлений загальний вид сітки, в якій будуть обиратися вузли функцій $f(x, y)$, $g(x, y)$. Для досягнення похибки $O\left(\frac{1}{\ell^2}\right)$ кубатурною формулою $\tilde{\Phi}^2(\omega)$ використовується не $O(\ell^4) = O(N)$, як в класичній формулі значень функції, а $O(\ell^3) = O\left(N^{\frac{3}{4}}\right)$.

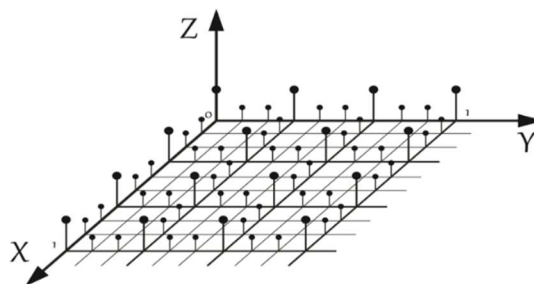


Рис. 4.3. Загальний вид сітки в економних схемах інтерполяції для чисельного інтегрування функцій двох змінних

Висновки до розділу 4

1. На основі аналізу представлених у розділі результатів можна зробити висновок, що розглянуті методи та підходи до математичного моделювання задач цифрової обробки зображень на основі наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій двох та трьох змінних загального виду, які використовують в якості даних сліди функцій на площинах, лініях, мають високу точність наближення.

2. Проведені обчислювальні експерименти на класі диференційовних функцій підтвердили теоретичні твердження щодо оцінок похибок наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій двох та трьох змінних загального виду з використанням нових інформаційних операторів.

3. Тестування кубатурної формули наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій двох змінних загального виду, яка побудована на економних схемах інтерполяції, показало, що для досягнення похибки $O\left(\frac{1}{\ell^2}\right)$ кубатурною формулою використовується не $O(\ell^4) = O(N)$, як в класичній формулі значень функції, а $O(\ell^3) = O(N^{3/4})$.

ВИСНОВКИ

Основні дослідження, які виконані в дисертаційній роботі, можуть бути узагальнені такими висновками:

1. У дисертаційній роботі вперше запропоновані моделі та методи розв'язання задач цифрової обробки зображень на основі чисельного інтегрування швидко осцилюючих функцій багатьох змінних загального виду з використанням нових інформаційних операторів. Кубатурні формули будуються на основі методу Файлона та застосуванні теорії інтерлінації та інтерфлетації функцій. Інформація про функцію задається слідами на площинах, лініях, значеннями в точках.

2. Вперше розглянуто математичне моделювання задач цифрової обробки зображень із залученням кубатурної формули наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій трьох змінних загального виду на основі інтерфлетантів з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих сплайнів для випадку, коли інформація задана слідами $f(x, y, z)$ та $g(x, y, z)$ на взаємно перпендикулярних площинах.

3. В роботі вперше отримано оцінку похибки чисельного інтегрування на класі диференційовних функцій. Доведено, що запропонована кубатурна формула наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій трьох змінних загального виду на основі інтерфлетантів з допоміжними функціями у вигляді кусково-сталих сплайнів для випадку, коли інформація задана слідами $f(x, y, z)$ та $g(x, y, z)$ на взаємно перпендикулярних площинах є оптимальною за порядком точності.

4. Вперше розглянуто математичне моделювання задач цифрової обробки зображень із залученням оптимальних за порядком точності кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій двох змінних загального виду у випадку, коли інформація про функції $f(x, y)$ та $g(x, y)$ задається їх значеннями на лініях. Запропоновані

формули в своїй побудові використовують кусково-сталі та кусково-лінійні сплайни в якості допоміжних функцій.

5. В роботі вперше запропоновано математичні моделі процесу обробки зображень на основі кубатурної формули, яка забезпечує ефективне наближення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального виду з точки зору кількості використаних значень. Кубатурна формула використовує для досягнення похибки $O\left(\frac{1}{\ell^2}\right)$ не $O(\ell^4) = O(N)$, як в класичній формулі значень функцій $f(x, y)$ та $g(x, y)$, а $O(\ell^3) = O(N^{3/4})$.

6. В системах комп'ютерної математики MathCad 15 та Wolfram Mathematica 8 створений пакет програм для наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій двох та трьох змінних загального виду. Тестування кубатурних формул на класі диференційовних функцій підтвердило теоретичні результати отримані в дисертаційній роботі.

7. Отримані наукові результати, а саме побудова математичних метематичних моделей задач цифрової обробки зображень на основі чисельного інтегрування швидко осцилюючих функцій багатьох змінних з використанням нових інформаційних операторів впроваджено в наукову роботу на кафедрі інформаційних комп'ютерних технологій і математики в ННІ «Українська інженерно-педагогічна академія» ХНУ імені В.Н. Каразіна, що підтверджено актом від 24.02.2025 р.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Iserles A. Iz the numerical quadrature of highly-oscillating integrals I: Fourier transforms : Tech. Reports Numerical Analysis (NA2003/05) / DAMPT – University of Cambridge. 26 p.
2. Iserles A. On the numerical quadrature of highly-oscillating integrals II: Irregular oscillators : Tech. Reports Numerical Analysis (NA2003/09) / DAMPT – University of Cambridge. 22 p.
3. Iserles A., Norsett S. P. Efficient quadrature of highly-oscillatory integrals using derivatives : Tech. Reports Numerical Analysis (NA2003/03) / DAMPT – University of Cambridge. 14 p.
4. Iserles A., Norsett S. P. From high oscillation to rapid approximation II: Expansions in polyharmonic eigenfunctions : Tech. Reports Numerical Analysis (NA2006/07) / DAMPT – University of Cambridge. 33 p.
5. Iserles A., Norsett S. P. From high oscillation to rapid approximation III: Multivariate expansions : Tech. Reports Numerical Analysis (NA2007/01) / DAMPT – University of Cambridge. 37 p.
6. Iserles A., Norsett S. P. From high oscillation to rapid approximation IV: Accelerating convergence : Tech. Reports Numerical Analysis (NA2007/07) / DAMPT – University of Cambridge. 24 p.
7. Gao J., Condon M., Iserles A. Spectral computation of highly oscillatory integral equations in laser theory : Tech. Reports Numerical Analysis (NA2018/04) / DAMPT, University of Cambridge, 2018.
8. Gao J., Chang G. A bivariate Filon-Clenshaw-Curtis method of the highly oscillatory integrals on a square. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2023.
9. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування : у 2 т. Т. 1. Алгоритми : [монографія] / І. В. Сергієнко, В. К. Задірака, О. М. Литвин, С. С. Мельникова, О. П. Нечуйвітер ;

Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. Київ : Наук. думка, 2011. 447 с.

10. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування : у 2 т. Т. 2. Застосування : [монографія] / І. В. Сергієнко, В. К. Задірака, О. М. Литвин, С. С. Мельникова, О. П. Нечуйвітер ; Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. Київ : Наук. думка, 2011. 348 с.

11. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій із застосуванням нових інформаційних операторів : монографія / І. В. Сергієнко, В. К. Задірака, О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер. Київ : Наук. думка, 2017. 336 с.

12. Задірака В. К., Мельникова С. С. Цифровая обработка сигналов. Київ : Наук. думка, 1993. 294 с.

13. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М. Елементи загальної теорії оптимальних алгоритмів та суміжні питання. Київ : Наукова думка, 2012. 400 с.

14. Задірака В. К., Луц Л. В., Швідченко І. В. Теорія обчислень інтегралів від швидкоосцилювальних функцій. Київ : Наукова думка, 2023. 472 с.

15. Теорія розривних сплайнів та її застосування в комп'ютерній томографії / І. В. Сергієнко, В. К. Задірака, О. М. Литвин, Ю. І. Першина. Київ : Наук. думка, 2017. 314 с.

16. Литвин О. М., Гулік Л. І. Інтерфлотація функцій при розв'язуванні тривимірної задачі теплопровідності : монографія. Київ : Наукова думка, 2011. 210 с.

17. Литвин О. М., Ярмош О. В. Інтерполяція, інтерлінація та змішана апроксимація функцій в моделюванні соціально-економічних процесів функцій : монографія. Київ : Наук. думка, 2015. 246 с.

18. Lytvyn O. N., Sergienko I. V. New Information Operators in Mathematical Modeling (A Review). *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. № 54(1). Pp. 21-30.

19. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M. Elements of the General Theory of Optimal Algorithms. Springer, 2021. P. 378.

20. Сергієнко І. В., Литвин О. М. Нові інформаційні оператори в математичному моделюванні : монографія. Київ : Наукова думка, 2018. 550 с.
21. Литвин О. М. Інтерлінація функцій. Харків : Основа, 1992. 234 с.
22. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування : монографія. Харків : Основа, 2002. 544 с.
23. Литвин О. М. Методи обчислень. Додаткові розділи : навч. посіб. Київ : Наук. думка, 2005. 332 с.
24. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Застосування інтерлінації функцій та швидкого перетворення Фур'є для обчислення коефіцієнтів Фур'є. *Матеріали XVIII науково-методичної конференції*. Харків : УІПА, 1995. С. 229-231.
25. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Застосування швидкого перетворення Фур'є для обчислення коефіцієнтів Фур'є функції двох змінних. *Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях* : тези доп. Всеукр. наук. конф. Львів, 1995. С. 5-7.
26. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Кубатурні формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації. *Доповіді НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки*. 1998. № 1. С. 23-28.
27. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та сплайн-інтерлінація. *Таврійський вісник інформатики та математики*. 2008. № 2. С. 13-17.
28. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Про одну кубатурну формулу для обчислення $2D$ – коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій. *Доповіді НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки*. 2010. № 3. С. 24-29.
29. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Кубатурна формула для обчислення $2D$ – коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій. *Вісник ХНУ ім. В. Н. Каразіна. Сер. : Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління* : зб. наук. пр. Харків, 2010. № 926. С. 153-160.

30. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Оптимальний за порядком точності метод обчислення $2D$ - коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації. *Комп'ютерне моделювання в наукоємних технологіях* : пр. наук.-техн. конф. з міжнародною участю (м. Харків, 18-21 трав. 2010 р.). Харків, 2010. Ч. 2. С. 211-213.
31. Lytvyn O. N., Nechuyviter O. P. Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation. *Proceeding of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010)* (June 15-18 2010). Novosibirsk, 2010. pp. 90-96.
32. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. $2D$ – коефіцієнти Фур'є на класі диференційовних функцій та сплайн-інтерлінація. *Таврійський вісник інформатики та математики*. 2011. № 1. С. 51-61.
33. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. $2D$ – коефіцієнти Фур'є на класі диференційовних функцій та оператори кусково-сталої сплайн-інтерлінації. *Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки*. 2011. № 125. С. 51-55.
34. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Сплайн-інтерлінація та оптимальні по точності кубатурні формули обчислення $2D$ – коефіцієнтів Фур'є одного класу функцій. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія : Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2011. № 16. С. 207–214.
35. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації. *Штучний інтелект*. 2012. № 2. С. 17–23.
36. Lytvyn O. N., Nechuyviter O. P. $3D$ – Fourier Coefficients on the Class of Differentiable Functions and Spline Interflatation. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2012. Vol. 44, Is. 3. pp. 45–56.
37. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення $3D$ – коефіцієнтів Фур'є на класі диференційовних функцій за допомогою сплайн-інтерфлетації. *Доповіді НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки*. 2012. № 3. С. 45–50.

38. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних на класі диференційовних функцій. *Штучний інтелект*. 2012. № 1. С. 37–48.

39. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Обґрунтування точності кубатурних формул для наближеного обчислення $3D$ – інтегралів від швидкоосцилюючих функцій з використанням інтерфлетації. *Електронне моделювання*. 2012. Т. 34, № 5. С. 206–217.

40. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення $3D$ – коефіцієнтів Фур'є на класі Гельдера з використанням кусково-сталої сплайн-інтерфлетації. *Математичні машини та системи*. 2012. Т. 1, № 4. С. 28–40.

41. Литвин О. Н., Нечуйвітер О. П. Приближенное вычисление осциллирующих интегралов трех переменных с использованием интерфлетиции функций. *Вестник МГОУ. Сер. : Физика-Математика*. 2013. № 2. С. 3–9.

42. Литвин О. Н., Нечуйвітер О. П. О погрешности численного интегрирования быстроосциллирующих функций трех переменных. *Научные ведомости БЕЛГУ. Сер. : Математика. Физика*. 2013. №19 (162), Вып. 32. С. 101–107.

43. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Approximate Calculation of Triple Integrals of Rapidly Oscillating Functions with the Use of Lagrange Polynomial Interflation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. no. 50(3). pp. 410–418.

44. Нечуйвітер О. П., Кейта К. В. Обчислення $2D$ інтегралів від тригонометричних функцій з використанням кусково-сталої інтерлінації. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : Фізико-математичні науки* : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2016. Вип. 13. С. 124–131.

45. Нечуйвітер О. П. Обчислення потрійних інтегралів від тригонометричних функцій з використанням кусково-сталої інтерфлетації. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2016. № 6 (1188). С. 67–71.

46. Нечуйвітер О. П., Кейта К. В. Оптимальне інтегрування двовимірних швидкоосцилюючих функцій загального вигляду. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. 2017. Вип. 15. С. 139–144.

47. Input Information in the Approximate Calculation of Two-Dimensional Integral from Highly Oscillating Functions (Irregular Case) / O. M. Lytvyn, O. Nechuiviter, Y. Pershyna, V. Mezhuyev. *Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information* : proceedings of the XVIII International Conference on Data Science and Intelligent Analysis of Information. Kyiv, 2018. pp. 365 – 373.

48. Cubature formula for approximate calculation of integrals of two-dimensional irregular highly oscillating functions / V. Mezhuyev, O. M. Lytvyn, O. Nechuiviter, Y. Pershyna, K. Keita, O. O. Lytvyn. *U.P.B. Sci. Bull., Series A*. 2018. Vol. 80, Iss. 3. pp. 169–182.

49. Nechuiviter O. P. Cubature formula for approximate calculation integral of highly oscillating function of tree variables (irregular case). *Radio Electronics, Computer Science, Control*. 2020. Vol. 4. Pp. 65–73.

50. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення подвійних інтегралів з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації. *Таврійський вісник інформатики та математики*. 2012. № 1. С. 66–72.

51. Nechuiviter O. P. Application of the theory of new information operators in conducting research in the field of information technologies. *Information Technologies and Learning Tools*. 2021. no. 82 (2). Pp. 282–296.

52. Nechuiviter O. P., Iarmosh O. V., Kovalchuk K. H. Numerical calculation of multidimensional integrals depended on input information about the function in mathematical modelling of technical and economic processes. *IOP Conference Series : Materials Science and Engineering*. 2021. no 1031 (1). 012059.

53. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Оптимальні за порядком точності кубатурні формули обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації функцій : монографія. Харків, 2009. 136 с.

54. Луц Л. В. Оптимальне інтегрування швидкоосцилюючих функцій загального вигляду для інтерполяційних класів Ліпшиця. *Штучний інтелект*. 2002. № 4. С. 20–27.

55. Луц Л. В. Оптимальні за точністю квадратурні формули обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій в умовах найбільш повного використання апріорної інформації : дис. ... канд. фіз.-мат. наук. Київ, 1987. 172 с.

56. Луц Л. В. Оцінка якості деяких квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій. *Штучний інтелект*. 2008. № 4. С. 671–682.

57. Zadiraka V. K., Melnikova S. S., Luts L. V. Optimal integration of rapidly oscillating functions in the class W_2, L, N with the use of different information operators. *Cybern. Syst. Analysis*. 2013. Vol. 49. No. 2. Pp. 229–238.

58. Luts L. V. Optimal Calculation of Integrals of Rapidly Oscillating Functions for Some Classes of Differential Functions. *Cybern. Syst. Anal.* 2024. № 60. Pp. 276–284.

59. Коломис О., Луц Л. Ефективні за точністю алгоритми апроксимації функцій із класу Ліпшиця рядами Фур'є. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2023. № (36). С. 111–115.

60. Zadiraka V. K., Luts L. V. Accuracy-Optimal Quadrature Formulas for Calculating the Bessel Transforms for Certain Classes of Sub-Integral Functions. *Cybern. Syst. Anal.* 2021. № 57. Pp. 238–251.

61. Нечуйвітер О. П. Оптимальні за порядком точності кубатурні формули для подвійних інтегралів від швидко осцилюючих функцій на основі сплайн – інтерлінації. *Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXIII)* : праці міжнар. симпозіуму, присвяч. 50-річчю створення Ін-ту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України / Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. Київ, 2007. С. 91.

62. Нечуйвітер О. П. Оптимальна за точністю кубатурна формула обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та сплайн-інтерлінація функцій. *Дванадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука* : матеріали конф. (м. Київ, 15-17 трав. 2008 р.). Київ, 2008. С. 744.

63. Нечуйвітер О. П. Кубатурна формула для обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій. *Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXV)* : праці міжнар. молодіжної математичної школи / Ін-т кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України. Київ, 2009. С. 145–149.

64. Нечуйвітер О. П. Про деякі властивості функцій двох та трьох змінних при тестуванні якості обчислювальних алгоритмів з використанням інтерлінації та інтерфлетації. *XLIV науково-практична конференція науково-педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії* : зб. наук. пр. (18-25 лют. 2011 р., м. Харків). Харків : УПА, 2011. Ч. 4. С. 20.

65. Нечуйвітер О. П. Оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є з використанням сплайн-інтерфлетанта на класі диференційовних функцій. *Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII)* : праці міжнар. молодіжної математичної школи / Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України. Київ, 2011. С. 131–132.

66. Нечуйвітер О. П. Про похибку наближеного обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є кубатурними формулами з використанням інтерполянта, побудованого на основі сплайн-інтерфлетанта. *Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII)* : праці міжнар. молодіжної математичної школи / Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України. Київ, 2011. С. 133.

67. Нечуйвітер О. П. Наближене обчислення подвійних інтегралів з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації. *XLV науково-практична конференція науково-педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії* (2012 р., м. Харків) : зб. тез. доп. / Укр. інж.-пед. акад. Харків, 2012. Ч. 4. С. 50–51.

68. Нечуйвітер О. П., Литвин О. Н. Про оцінку похибки заокруглення кубатурної формули наближеного обчислення 2- D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій. *Питання оптимізації обчислень (ПОО-XL)* : праці міжнар. наук. конф., присвяч. 90-річчю від дня народж. акад. В. М. Глушкова / Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. Київ, 2013. С. 186–187.

69. Нечуйвітер О. П. Застосування лагранжевої поліноміальної інтерфлетації при наближеному обчисленні інтегралів від швидкоосцилюючих функцій трьох змінних. *Інформатика та системні науки (ICH-2014)* : матеріали Всеукр. наук.-практ. конф. (13-15 берез. 2014 р., м. Полтава). Полтава, 2014. С. 227–229.

70. Operators of the interflatation of functions of 3 variables in the 3D computer tomography / O. N. Lytvyn, O. O. Lytvyn, V. I. Mezhuiev, K. E. Babenko, Y. I. Pershina. *Proceedings of the 5th World Congress on Industrial Process Tomography (3–6 September 2007)*. Bergen, Norway, 2007. P. 242–249.

71. Lytvyn O. N. Interlineation and interflatation functions of many variables (blending function interpolation) and economical algorithms in the approximation theory. Computational methods. *Proc 1st Intern. Conf. of Comput. Methods (Singapour, 15-17 Dec. 2004)*. Singapore : Springer-Verlag, 2006. Part 2. Pp. 1105–1110.

72. Lytvyn O. M., Nechuiviter O. P. Methods in the multivariate digital signal processing with using spline-interlineation. *Proc. of the IASTED International Conferences on Automation, Control, and Information Technology (ASIT 2010), (June 15–18 2010)*. Novosibirsk, 2010. Pp. 90–96.

73. Lytvyn O. N., Nechuiviter O. P. 3 D Fourier's coefficients and interflatation of functions. *Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences*. 2011. P. 272–278.

74. Mathematical modelling of discontinuous processes in a computer tomography by means of discontinuous splines / O. M. Lytvyn, Y. I. Pershina, O. O. Lytvyn, S. I. Kulyk. *Proceedings of the 7th World Congress on Industrial Process Tomography (2-5 September 2013)*. Krakow, Poland, 2013.

75. Першина Ю. І., Пташний О. Д. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням нових інформаційних операторів. *Вісник НТУ «ХПІ»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків : НТУ «ХПІ», 2022. № 1. С. 106-122.

76. Lytvyn O. N., Pershina Y. I., Sergienko I. V. Estimation of discontinuous functions of two variables with unknown discontinuity lines (rectangular elements). *Cybernet. Syst. Anal.* 2014. № 5(4). Pp. 594–602.

77. Pershyna I. Mathematical Modeling of 2D Discontinuous Objects by New Information Operators. *International Conference on Reliable Systems Engineering (ICoRSE). Lecture Notes in Networks and Systems*. 2023. vol 762.
78. Hairer E., Lubich C., Wanner G. Geometric numerical integration. *Springer Series in Computational Mathematics*. 2010. vol. 31, *Structure-preserving algorithms for ordinary differential equations, Reprint of the second*. 2006.
79. Erwan Faou. Geometric numerical integration and Schrödinger equations. *Zurich Lectures in Advanced Mathematics, European Mathematical Society (EMS)*. Zürich, 2012.
80. Hochbruck M., Lubich C. A Gautschi-type method for oscillatory second-order differential equations. *Numer Math*. 1999. № 83. Pp. 403–426.
81. Liu Z., Tian T., Tian H. Asymptotic-numerical solvers for highly oscillatory second-order differential equations. *Appl Numer Math*. 2019. № 137. Pp. 184–202.
82. Petzold L. R., Jay L. O., Yen J. Numerical solution of highly oscillatory ordinary differential equations. *Acta Numer*. 1997. № 7. Pp. 437–483.
83. Wang B., Iserles A., Wu X. Arbitrary order trigonometric Fourier collocation methods for second-order ODEs. *Found Comput Math*. 2016. № 16. Pp. 151–181.
84. Khanamiryan M. Quadrature methods for highly oscillatory linear and nonlinear systems of ordinary differential equations: Part I. *BIT*. 2008. № 48. Pp. 743–761.
85. Khanamiryan M. Quadrature methods for highly oscillatory linear and nonlinear systems of ordinary differential equations: part II. *Bit Numer Math*. 2012. № 52. Pp. 383–405.
86. Castella F., Chartier P., Faou E. An averaging technique for highly oscillatory Hamiltonian problems. *SIAM J Numer Anal*. 2009. № 47. Pp. 2808–2837.
87. Cohen D. On the numerical discretisation of stochastic oscillators. *Math Comput Simul*. 2012. № 82. Pp. 1478–1495.
88. On numerical methods for highly oscillatory problems in circuit simulation / M. Condon, A. Deaño, A. Iserles, K. Maczynski, T. Xu. *Int J Comput*. 2009. № 28. Pp. 1607–1618.

89. Condon M., Iserles A., Nørsett S. P. Differential equations with general highly oscillatory forcing terms. *Proc R Soc Lond Ser A Math Phys Eng Sci*, 2014. № 470(2161). № p. 20130490.
90. D'Ambrosio R., Scalone C. Asymptotic quadrature based numerical integration of stochastic damped oscillators. *Lect Notes Comput Sci in press*, 2021.
91. Grimm V., Hochbruck M. Error analysis of exponential integrators for oscillatory second-order differential equations. *J Phys A Math Gen*. 2006. № 39. Pp. 5495–5507.
92. Wang B, Liu K, Wu X. A Filon-type asymptotic approach to solving highly oscillatory second-order initial value problems. *J Comput Phys*. 2013. № 243. Pp. 210–223
93. Wang B., Wu X. A long-term numerical energy-preserving analysis of symmetric and/or symplectic extended RKN integrators for efficiently solving highly oscillatory Hamiltonian systems. *BIT Numer Math*. 2021.
94. Chengming L., Zekun W., Haibo P., Junxiao X. Image interpolation via scanning line algorithm and discontinuous b-spline Math. *Comput. Appl*. 2017. № 22 (2). Pp. 1–6.
95. Su D., Willis P. Image interpolation by pixel-level data-dependent triangulation. *Comput. Graphics Forum*. 2004. № 23 (2). Pp. 189–201.
96. Jun-Yi Duan, Cheng-Ming Liu, Zhi-Hui Yue. Image interpolation by pixel-level data-dependent triangulation on android platform. *3rd International Conference on Computer Science and Mechanical Automation*. 2017, Pp. 297–301.
97. Roy R., Pal M., Gulati T. Zooming Digital Images using Interpolation Techniques. *International Journal of Application or Innovation in Engineering & Management (IJAIEM)*. 2013. Vol. 2, Iss. 4. Pp. 34-45.
98. Asamwar R. S., Bhurchandi K. M., Gandhi A. S. Interpolation of Images Using Discrete Wavelet Transform to Simulate Image Resizing as in Human Vision. *International Journal of Automation and Computing*. 2010. № 7(1). Pp. 9-16.
99. Olver S. Numerical Approximation of Highly Oscillatory Integrals : *PhD thesis*. Cambridge : University of Cambridge, 2008. 172 p.
100. Olver S. Numerical approximation of vector-valued highly oscillatory integrals. *BIT*. 2007. № 47. Pp. 637–655.

101. Huybrechs D., Olver S. Highly oscillatory quadrature. *Highly Oscillatory Problems: Computation, Theory and Applications*. Cambridge : Cambridge University Press, 2008.

102. Huybrechs D., Vandewalle S. On the evaluation of highly oscillatory integrals by analytic continuation. *SIAM J. Numer. Anal.* 2006. № 44. Pp. 1026–1048.

103. Iserles A., Nørsett S. P., Olver S. Highly oscillatory quadrature: the story so far. *Numerical Mathematics and Advanced Applications*. Berlin : Springer, 2006. Pp. 97–118.

104. Milovanovic G. V., Stancic. P. Numerical Integration of Highly Oscillating Functions. *Analytic Number Theory, Approximation Theory and Special Functions*. 2014. P. 613–649.

105. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M. Interlineation of Functions. *Elements of the General Theory of Optimal Algorithms. Springer Optimization and Its Applications*. 2021. vol 188.

106. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M. Cubature Formulae Using Interlineation of Functions. *Elements of the General Theory of Optimal Algorithms. Springer Optimization and Its Applications*. 2021. vol 188.

107. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M. Elements of the Computing Theory. *Elements of the General Theory of Optimal Algorithms. Springer Optimization and Its Applications*. 2021. vol 188.

108. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M. Theories of Computational Complexity. *Elements of the General Theory of Optimal Algorithms. Springer Optimization and Its Applications*, 2021. vol 188.

109. Zadiraka V. K., Melnikova S. S. Analysis of the algorithm complexity of bignum multiplying on the basis of Walsh coefficients. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2021. No. 6. Pp. 99–110.

110. Computer-based techniques for solving problems of applied and computational mathematics with given quality characteristics / I. V. Sergienko, M. D. Babich, A. I. Berezowski, P. N. Besarab, V. K. Zadiraka, V. A. Lyudvichenko. *Cybernetics and system analysis*. 2006. No. 5. Pp. 33–41.

111. Zadiraka V. K., Melnikova S. S., Lutz L. V. Optimal quadrature and cubature formulas of computation of the Fourier transform of finite functions of the same class (strong oscillation case). *KiSA*. 2007. No. 5. Pp. 144–164.

112. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M. Interflatation of Functions. *Elements of the General Theory of Optimal Algorithms. Springer Optimization and Its Applications*. 2021. vol 188.

113. Nechuiviter O. Different Types of Information about Function in Approximate Calculation of Triple Integrals of Rapidly Oscillating Functions. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians : book of Abstracts* (August 1-10, 2018, Rio de Janeiro). 2018. P. 213.

114. Нові інформаційні оператори в задачах чисельного інтегрування функцій двох змінних / О. П. Нечуйвітер, О. С. Чорна, Л. В. Дараган, О. В. Пілісний, С. О. Чорний. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях*. Харків : НТУ «ХПІ», 2019. № 8. С. 232-239.

115. Nechuiviter O., Kovalchuk K. Effective cubature formula for the approximate calculation of the triple integral on the class of differential functions. *International scientific conference UNITECH 2023, Gabrovo, Bulgaria : University Publishing House*, 2023. Pp. 261–266.

116. Нечуйвітер О. П., Каргапольцева Г. В., Дараган К. В. Оптимальна за порядком точності кубатурна формула наближеного обчислення подвійного інтегралу від швидкоосцилюючих функцій загального виду. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2019. Вип.19. С. 91–97.

117. Nechuiviter O. P., Ivanov V. V. New information operators in problems of numerical integration of many variables. *Освіта та наука для відновлення країни : зб. тез доп. наук.-пед. працівників, науковців та аспірантів LVII Всеукр. наук.-практ. конф. Укр. інж.-пед. акад. (м. Харків, 13-17 трав. 2024 р.)*. Харків, 2024. С. 25-26.

118. Nechuiviter O. P., Shnitsar A. S. Approximate calculation of double integrals of general type trigonometric functions using new information operators. *Освіта та наука для відновлення країни : зб. тез доп. наук.-пед. працівників,*

науковців та аспірантів LVII Всеукр. наук.-практ. конф. Укр. інж.-пед. акад. (м. Харків, 13-17 трав. 2024 р.). Харків, 2024. С. 23-24.

119. Nechuiviter O. P., Hishchak O. R. Efficient numerical integration of trigonometric functions of several variables. *Освіта та наука для відновлення країни* : зб. тез доп. наук.-пед. працівників, науковців та аспірантів LVII Всеукр. наук.-практ. конф. Укр. інж.-пед. акад. (м. Харків, 13-17 трав. 2024 р.). Харків, 2024. С. 20-21.

120. Nechuiviter O. P., Letuta A. A., Katolyk I. M. Approximate calculation of triple integrals from rapidly oscillating functions of a general form using new information operators. *Освіта та наука для відновлення країни* : зб. тез доп. наук.-пед. працівників, науковців та аспірантів LVII Всеукр. наук.-практ. конф. Укр. інж.-пед. акад. (м. Харків, 13-17 трав. 2024 р.). Харків, 2024. С. 16-17.

121. Nechuiviter O. P., Zaborniy A. V. Approximate calculation of triple integrals from trigonometric functions of a general form using new information operators. *Освіта та наука для відновлення країни* : зб. тез доп. наук.-пед. працівників, науковців та аспірантів LVII Всеукр. наук.-практ. конф. Укр. інж.-пед. акад. (м. Харків, 13-17 трав. 2024 р.). Харків, 2024. С. 18-19.

122. Технології чисельного моделювання: навч.-метод. посіб. для студ. ОС «магістр» денної та заоч. форми навч. спец. 113 Прикл. матем / О. М. Литвин, Ю. І. Першина, О. О. Литвин, О. П. Нечуйвітер; Укр. інж.-пед. акад. – Харків : УІПА, 2018. – 72 с.

123. Педагогічні аспекти використання нових інформаційних операторів для задач чисельного інтегрування при підготовці магістрів інженерно-педагогічних спеціальностей / О. П. Нечуйвітер, Г. В. Каргапольцева, А. Г. Ковальчук, С. А. Чорний. *Проблеми інженерно-педагогічної освіти*. Харків : УІПА, 2018. Вип. 60. С. 110-121.

124. Nechuiviter O. P. Pedagogical Aspects of Using New Informative Operators for the Problems of Digital Signal and Image Processing While Teaching Masters of the Engineering Pedagogics. *The Development of the Unified Open Information Space in Lifelong Education «Forum-SOIS, 2020»* : collection of materials of the Second International Scientific and Practical WEB-Forum (Kyiv-Kharkiv, March 25-27th, 2020). Kharkiv : Madrid, 2020. Vol. 2. Iss. 2. P. 221.

125. Інноваційні технології: нові інформаційні оператори : навч.-метод. посіб. для студентів ОС «магістр» денної та заоч. форми навч. спец. 113 Прикладна математика / О. М. Литвин, Ю. І. Першина, О. О. Литвин, О. П. Нечуйвітер; Укр. інж.-пед. акад., Каф. вищої та прикладної математики. Харків : УПА, 2018. 330 с.

Додаток А

Список публікацій здобувача за темою дисертаційної роботи

Статті у періодичних наукових виданнях, що увійшли до переліку наукових фахових видань України:

Іванов С. С., Нечуйвітер О. П., Ковальчук, К. Г. Оптимальне інтегрування швидко осцилюючих функцій загального виду. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2021. Вип. 33. С. 68–72.

Особовий внесок Іванов С. Отримано оцінку знизу для похибки чисельного інтегрування швидко осцилюючих функцій (трьох змінних) загального виду на класі диференційовних функцій, у випадку, коли інформація задана слідами функцій на площинах.

Особовий внесок Нечуйвітер О. Сформульовано теоретичні основи отримання оцінки похибки чисельного інтегрування функцій (трьох змінних) загального виду на класі диференційовних функцій.

Особовий внесок Ковальчук К. Взято участь в чисельній перевірці теоретичного результату.

Іванов С. С., Нечуйвітер О. П., Ковальчук, К. Г. Нові інформаційні оператори в задачах чисельного інтегрування функцій трьох змінних. *Вісник НТУ «ХПІ»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях : зб. наук. пр. Харків : НТУ «ХПІ», 2022. № 1. С. 82-91.

Особовий внесок Іванов С. Отримано оцінку похибки наближеного обчислення потрійного інтегралу, у випадку, коли інформація задана слідами функції на лініях, на класі диференційовних функцій.

Особовий внесок Нечуйвітер О. Розроблено загальні теоретичні основи побудови кубатурних формул наближеного обчислення потрійного інтегралу, у випадку, коли інформація задана слідами функцій на площинах, лініях.

Особовий внесок Ковальчук К. Взяв участь в проведенні чисельного експерименту та аналізі отриманих результатів.

Іванов С. С., Нечуйвітер О. П., Ковальчук, К. Г. Наближене обчислення подвійних інтегралів від швидко осцилюючих функцій загального виду. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2023. Вип. 37. С. 37–41.

Особовий внесок Іванов С. Побудовано та досліджено кубатурну формула наближеного обчислення подвійних інтегралів від швидко осцилюючої функцій (двох змінних) загального виду, у випадку, коли інформація задана слідами функцій на лініях; кубатурна формула в своїй побудові використовує кусково-лінійні сплайни в якості допоміжних функцій.

Особовий внесок Нечуйвітер О. Отримано оцінку знизу для чисельного інтегрування функцій (двох змінних) загального виду на класі диференційовних функцій.

Особовий внесок Ковальчук К. Взято участь в чисельній перевірці теоретичних тверджень.

Іванов С. С., Нечуйвітер О. П. Оптимальна за порядком точності кубатурна формула наближеного обчислення потрібних інтегралів від швидко осцилюючих функцій загального виду. *Кібернетика та комп'ютерні технології*. 2023. № 1. С. 59–67.

Особовий внесок Іванов С. Доведено оптимальність за порядком точності кубатурної формули наближеного обчислення від швидко осцилюючих функцій (трьох змінних) загального виду на класі диференційовних функцій, у випадку, коли інформація задана слідами функцій на площинах.

Особовий внесок Нечуйвітер О. Побудовано кубатурна формула наближеного обчислення від швидко осцилюючих функцій (трьох змінних) загального виду.

Іванов С. С., Нечуйвітер О. П., Ковальчук, К. Г. Нові інформаційні оператори в задачах чисельного інтегрування функцій трьох змінних. *Вісник НТУ «ХПІ»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків : НТУ «ХПІ», 2024. № 1 (6). С. 53-63.

Особовий внесок Іванов С. Побудовано кубатурну формулу наближеного

обчислення подвійних інтегралів від швидко осцилюючої функції (двох змінних) загального виду, у випадку, коли інформація задана слідами функцій на лініях (кубатурна формула в своїй побудові використовує кусково-сталі сплайни в якості допоміжних функцій); розроблено методику проведення чисельного експерименту, проаналізовано результати обчислень щодо підтвердження теоретичних результатів.

Особовий внесок Нечуйвітер О. Розроблено загальні теоретичні основи побудови кубатурних формул наближеного обчислення подвійного інтегралу, у випадку, коли інформація задана слідами функцій на лініях.

Особовий внесок Ковальчук К. Взято участь в проведенні чисельного експерименту.

Наукові роботи, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

Іванов С. С., Нечуйвітер О. П. Аспекти оптимального інтегрування швидко осцилюючих функцій загального виду. *Збірник тез доповідей науково-педагогічних працівників та аспірантів LIV конференції Української інженерно-педагогічної академії (м. Харків, 11-14 травня 2021 р.)*. Харків, 2021. С. 134.

Іванов С. С. Наближене обчислення подвійних інтегралів в оцінках ризиків системи управління якістю підприємства. *Збірник тез доповідей LVI студентської наукової конференції Української інженерно-педагогічної академії (м. Харків, 01-05 листопада 2021 р.)*. Харків, 2021. Т. 3. С.20.

Іванов С. С., Нечуйвітер О. П. Якість кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій. *Якість, стандартизація та метрологічне забезпечення* : [матеріали II міжнарод. наук.-практ. конф., м. Харків, 14 -15 берез. 2023 р.]. Харків : УПА, 2023. С. 109-110.

Іванов С. С., Летута А. А. Наближене обчислення потрійних інтегралів від швидко осцилюючих функцій загального виду з використанням нових інформаційних операторів. *Студенти та молодь – для майбутнього країни* : матеріали VII міжнар. наук.-практ. конф. здобувачів вищої освіти та молодих

учених (м. Бахмут, м. Харків, 17 листоп. 2023 р.).Бахмут : ННППІ УПА, 2023. Т. 3. С. 56.

Іванов С. С., Летута А. А. Кубатурна формула наближеного обчислення потрійних інтегралів від швидко осцилюючих функцій загального виду. *Освіта та технології для розвитку суспільства* : LVIII наук.-практ. конф. здобувачів вищої освіти академії, м. Харків, 13-17 листоп. 2023 р. Харків : УПА, 2023. С. 13-14.

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Проректор з науково-педагогічної роботи
Харківського національного університету
імені В.Н. Каразіна

Антон ПАНТЕЛЕЙМОНОВ

27.05.2025р.



АКТ

**впровадження результатів дисертаційної роботи
на здобуття ступеня доктора філософії**

Іванова Сергія Сергійовича

**у наукову роботу кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і
математики Навчально-наукового інституту**

«Українська інженерно-педагогічна академія»

Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна

Комісія у складі голови комісії – професора кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, доктора фізико-математичних наук О.О. Литвина та членів комісії: в.о. завідувача кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, доктора фізико-математичних наук, професора О.П. Нечуйвітер, доцента кафедри інформаційних комп'ютерних технологій і математики, кандидата фізико-математичних наук О.В. Славіка встановила, що у Харківському національному університеті імені В.Н. Каразіна впроваджені результати дисертаційних досліджень, які отримані С.С. Івановим під час виконання науково-дослідної роботи ФН 23-01 «Математичне моделювання та нові обчислювальні методи» в частині розробки та дослідження нових обчислювальних методів для задач цифрової обробки зображень з використанням в якості вхідної інформації значення функції на лініях та площинах, а саме побудовані та досліджені оптимальні за порядком точності кубатурні формули наближеного обчислення подвійних та потрійних інтегралів від швидко осцилюючих функцій декількох змінних загального виду.

Голова комісії

д.ф.-м.н., професор

Олег ЛИТВИН

Члени комісії:

д.ф.-м.н., професор

к.ф.-м.н.

Олеся НЕЧУЙВІТЕР

Олексій СЛАВІК

Додаток В

Програма 1. Обчислення $I^2(\omega)$ за формулою $\Phi^2(\omega)$ в СКМ MathCad

ORIGIN:= 1

$$f(x,y) := x^2 + y^2 \qquad g(x,y) := x^2 + y^2$$

$$f(x,y) := \sin(x + y) \qquad g(x,y) := \sin(x + y)$$

$$a := 0 \quad b := 1 \quad c := 0 \quad d := 1$$

$$n := 4 \qquad n1 := 4 \qquad \omega := 2\pi$$

$$xh := \frac{b - a}{n} \qquad yh := \frac{d - c}{n}$$

$$k := 1..n$$

$$l := 1..n$$

$$X_k := a + k \cdot xh$$

$$Y_l := c + l \cdot yh$$

$$X_k =$$

0.25
0.5
0.75
1

$$Y_l =$$

0.25
0.5
0.75
1

$$xh1 := \frac{b - a}{n1}$$

$$yh1 := \frac{d - c}{n1}$$

$$p := 1..n1$$

$$q := 1..n1$$

$$X1_p := a + p \cdot xh1$$

$$Y1_q := c + q \cdot yh1$$

$$X1_p =$$

0.25
0.5
0.75
1

$$Y1_q =$$

0.25
0.5
0.75
1

$$Hh(k,t) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow 1 \\ \text{for } j \in 1..n \\ \left| \begin{array}{l} s \leftarrow s \cdot \left(\frac{t - X_j}{X_k - X_j} \right) \text{ if } j \neq k \\ s \leftarrow s \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ s \end{array} \right|_s$$

$$Hhy(r,t) := \left| \begin{array}{l} ss \leftarrow 1 \\ \text{for } j \in 1..n \\ \left| \begin{array}{l} ss \leftarrow ss \cdot \frac{t - Y_j}{Y_r - Y_j} \text{ if } j \neq r \\ ss \leftarrow ss \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ ss \end{array} \right|_{ss}$$

$$\text{Hh1}(p, t) := \left| \begin{array}{l} s1 \leftarrow 1 \\ \text{for } j \in 1..n1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} s1 \leftarrow s1 \cdot \frac{t - X1_j}{X1_p - X1_j} \text{ if } j \neq p \\ s1 \leftarrow s1 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \quad s1 \end{array} \right| s1$$

$$\text{Hhy1}(q, t) := \left| \begin{array}{l} ss1 \leftarrow 1 \\ \text{for } j \in 1..n1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} ss1 \leftarrow ss1 \cdot \frac{t - Y1_j}{Y1_q - Y1_j} \text{ if } j \neq q \\ ss1 \leftarrow ss1 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \quad ss1 \end{array} \right| ss1$$

$$A(x, y) := \sum_{k=1}^n \left(f(X_k, y) \cdot \text{Hh}(k, x) \right)$$

$$A(0, 0) = -0.001853$$

$$f(0, 0) = 0$$

$$A1(x, y) := \sum_{p=1}^{n1} \left(g(X1_p, y) \cdot \text{Hh1}(p, x) \right)$$

$$A1(0, 0) = -0.001853$$

$$g(0, 0) = 0$$

$$B(x, y) := \sum_{l=1}^n \left(f(x, Y_l) \cdot \text{Hhy}(l, y) \right)$$

$$B1(x, y) := \sum_{q=1}^{n1} \left(g(x, Y1_q) \cdot \text{Hhy1}(q, y) \right)$$

$$B(0, 0) = -0.001853339321686$$

$$B1(0, 0) = -0.001853339321686$$

$$AA(x,y) := \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(f(X_k, Y_l) \cdot Hh(k,x) \cdot Hhy(l,y) \right)$$

$$AA(0,0) = -0.003694$$

$$AA1(x,y) := \sum_{p=1}^{n1} \sum_{q=1}^{n1} \left(g(X1_p, Y1_q) \cdot Hh1(p,x) \cdot Hhy1(q,y) \right)$$

$$AA1(0,0) = -0.003694$$

$$OOO(x,y) := A(x,y) + B(x,y) - AA(x,y)$$

$$f(0.51,0.32) - OOO(0.51,0.32) = -0.000000001776431$$

$$f(0.51,0.32) = 0.737931371109963$$

$$OOO(0.51,0.32) = 0.737931372886394$$

$$OOO1(x,y) := A1(x,y) + B1(x,y) - AA1(x,y)$$

$$g(0.51,0.32) = 0.737931371109963$$

$$g(0.51,0.32) - OOO1(0.51,0.32) = -0.000000001776431$$

$$OOO1(0.51,0.32) = 0.737931372886394$$

$$It := \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \cdot e^{i\omega \cdot g(x,y)} dx dy$$

$$It = 0.355805063341742 - 0.328973999376633i$$

$$\text{Re}(It) = 0.355805063341742$$

$$\text{Im}(It) = -0.328973999376633$$

$$It_int := \int_0^1 \int_0^1 OOO(x,y) \cdot e^{i\omega \cdot OOO1(x,y)} dx dy$$

$$\text{Re}(It_int) = 0.355805096474535$$

$$\text{Im}(It_int) = -0.328974081655376$$

$$It_int = 0.355805096474535 - 0.328974081655376i$$

$$|\text{Re}(It) - \text{Re}(It_int)| = 0.000000033132793$$

$$|\text{Im}(It) - \text{Im}(It_int)| = 0.000000082278743$$

Додаток С

Програма 2 . Обчислення $I^2(\omega)$ за формулою $\tilde{\Phi}^2(\omega)$ в СКМ MathCad

$$f1(x,y) := x + y$$

$$g(x,y) := x + y$$

$$f(x,y) := \sin(x + y)$$

$$g(x,y) := \sin(x + y)$$

$$a := 0 \quad b := 1 \quad c := 0 \quad d := 1$$

$$n := 2 \quad n1 := 2 \quad \omega := 2\pi$$

$$nn := n^2 \quad nn1 := n1 \cdot n1$$

$$xh := \frac{b - a}{n} \quad yh := \frac{d - c}{n}$$

$$k := 0..n$$

$$l := 0..n$$

$$X_k := a + k \cdot xh$$

$$Y_l := c + l \cdot yh$$

$$X_k =$$

0
0.5
1

$$Y_l =$$

0
0.5
1

$$xh1 := \frac{b - a}{n1}$$

$$yh1 := \frac{d - c}{n1}$$

$$p := 0..n1$$

$$q := 0..n1$$

$$X1_p := a + p \cdot xh1$$

$$Y1_q := c + q \cdot yh1$$

$$X1_p =$$

0
0.5
1

$$Y1_q =$$

0
0.5
1

$$xxh := \frac{b - a}{nn}$$

$$yyh := \frac{d - c}{nn}$$

$$kk := 0..nn$$

$$ll := 0..nn$$

$$XX_{kk} := a + kk \cdot xxh$$

$$YY_{ll} := c + ll \cdot yyh$$

$$XX_{kk} =$$

0
0.25
0.5
0.75
1

$$YY_{ll} =$$

0
0.25
0.5
0.75
1

$$xxh1 := \frac{b - a}{nn1}$$

$$yyh1 := \frac{d - c}{nn1}$$

$$pp := 0..nn1$$

$$qq := 0..nn1$$

$$XX1_{pp} := a + pp \cdot xxh1$$

$$YY1_{qq} := c + qq \cdot yyh1$$

$$XX1_{pp} =$$

0
0.25
0.5
0.75
1

$$YY1_{qq} =$$

0
0.25
0.5
0.75
1

$$Hh(k,t) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..n-1 \\ \left| \begin{array}{l} s \leftarrow 1 \text{ if } X_k \leq t < X_{k+1} \\ s \leftarrow 0 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ s \end{array} \right| s$$

$$Hhy(r,t) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..n-1 \\ \left| \begin{array}{l} ss \leftarrow 1 \text{ if } Y_r \leq t < Y_{r+1} \\ ss \leftarrow 0 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ ss \end{array} \right| ss$$

$$Hh1(p,t) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..n1-1 \\ \left| \begin{array}{l} s1 \leftarrow 1 \text{ if } X1_p \leq t < X1_{p+1} \\ s1 \leftarrow 0 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ s1 \end{array} \right| s1$$

$$Hhy1(q,t) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..n1-1 \\ \left| \begin{array}{l} ss1 \leftarrow 1 \text{ if } Y1_q \leq t < Y1_{q+1} \\ ss1 \leftarrow 0 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ ss1 \end{array} \right| ss1$$

$$HHh(kk,t) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..nn-1 \\ \left| \begin{array}{l} s \leftarrow 1 \text{ if } XX_{kk} \leq t < XX_{kk+1} \\ s \leftarrow 0 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ s \end{array} \right| s$$

$$HHhy(rr,t) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..nn-1 \\ \left| \begin{array}{l} ss \leftarrow 1 \text{ if } YY_{rr} \leq t < YY_{rr+1} \\ ss \leftarrow 0 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ ss \end{array} \right| ss$$

$$\text{HHh1}(\text{pp}, \text{t}) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0.. \text{nn1} - 1 \\ \left| \begin{array}{l} \text{s1} \leftarrow 1 \text{ if } \text{XX1}_{\text{pp}} \leq \text{t} < \text{XX1}_{\text{pp}+1} \\ \text{s1} \leftarrow 0 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \text{s1} \end{array} \right|$$

$$\text{HHhy1}(\text{qq}, \text{t}) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0.. \text{nn1} - 1 \\ \left| \begin{array}{l} \text{ss1} \leftarrow 1 \text{ if } \text{YY1}_{\text{qq}} \leq \text{t} < \text{YY1}_{\text{qq}+1} \\ \text{ss1} \leftarrow 0 \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \text{ss1} \end{array} \right|$$

$$\text{A}(\text{x}, \text{y}) := \sum_{\text{k}=0}^{\text{n}-1} \sum_{\text{rr}=0}^{\text{nn}-1} \left(\text{f} \left(\text{X}_{\text{k}} + \frac{\text{xh}}{2}, \text{YY}_{\text{rr}} + \frac{\text{yhy}}{2} \right) \cdot \text{Hh}(\text{k}, \text{x}) \cdot \text{HHhy}(\text{rr}, \text{y}) \right)$$

$$\text{A1}(\text{x}, \text{y}) := \sum_{\text{p}=0}^{\text{n1}-1} \sum_{\text{qq}=0}^{\text{nn1}-1} \left(\text{g} \left(\text{X1}_{\text{p}} + \frac{\text{xh1}}{2}, \text{YY1}_{\text{qq}} + \frac{\text{yhy1}}{2} \right) \cdot \text{Hh1}(\text{p}, \text{x}) \cdot \text{HHhy1}(\text{qq}, \text{y}) \right)$$

$$\text{A}(0, 0) = 0.366273$$

$$\text{f}(0, 0) = 0$$

$$\text{B}(\text{x}, \text{y}) := \sum_{\text{r}=0}^{\text{n}-1} \sum_{\text{kk}=0}^{\text{nn}-1} \left(\text{f} \left(\text{XX}_{\text{kk}} + \frac{\text{xxh}}{2}, \text{Y}_{\text{r}} + \frac{\text{yh}}{2} \right) \cdot \text{Hhy}(\text{r}, \text{y}) \cdot \text{HHh}(\text{kk}, \text{x}) \right)$$

$$\text{B}(0, 0) = 0.366272529086048$$

$$\text{A1}(0, 0) = 0.366273$$

$$\text{g}(0, 0) = 0$$

$$\text{B1}(\text{x}, \text{y}) := \sum_{\text{q}=0}^{\text{n1}-1} \sum_{\text{pp}=0}^{\text{nn1}-1} \left(\text{g} \left(\text{XX}_{\text{pp}} + \frac{\text{xxh1}}{2}, \text{Y1}_{\text{q}} + \frac{\text{yh1}}{2} \right) \cdot \text{Hhy1}(\text{q}, \text{y}) \cdot \text{HHh1}(\text{pp}, \text{x}) \right)$$

$$\text{B1}(0, 0) = 0.366272529086048$$

$$AA(x,y) := \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \left(f\left(X_k + \frac{xh}{2}, Y_l + \frac{yh}{2}\right) \cdot Hh(k,x) \cdot Hhy(l,y) \right)$$

$$AA(0,0) = 0.479426$$

$$AA1(x,y) := \sum_{p=0}^{n1-1} \sum_{q=0}^{n1-1} \left(g\left(X_{1p} + \frac{xh1}{2}, Y_{1q} + \frac{yh1}{2}\right) \cdot Hh1(p,x) \cdot Hhy1(q,y) \right)$$

$$AA1(0,0) = 0.479426$$

$$OOO(x,y) := A(x,y) + B(x,y) - AA(x,y)$$

$$OOO1(x,y) := A1(x,y) + B1(x,y) - AA1(x,y)$$

$$f(0.51,0.32) - OOO(0.51,0.32) = -0.090408740417263$$

$$f(0.51,0.32) = 0.737931371109963$$

$$OOO(0.51,0.32) = 0.828340111527226$$

$$g(0.51,0.32) - OOO1(0.51,0.32) = -0.090408740417263$$

$$g(0.51,0.32) = 0.737931371109963$$

$$OOO1(0.51,0.32) = 0.828340111527226$$

$$It := \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \cdot e^{i\omega \cdot g(x,y)} dx dy$$

$$It = 0.355805063341742 - 0.328973999376633i$$

$$\text{Re}(It) = 0.355805063341742$$

$$\text{Im}(It) = -0.328973999376633$$

$$It_int := \int_0^1 \int_0^1 OOO(x,y) \cdot e^{i\omega \cdot OOO1(x,y)} dx dy$$

$$It_int = 0.354037591645906 - 0.333046130089753i$$

$$\text{Re}(It_int) = 0.354037591645906$$

$$\text{Im}(It_int) = -0.333046130089753$$

$$|\text{Re}(It) - \text{Re}(It_int)| = 0.001767471695836$$

$$|\text{Im}(It) - \text{Im}(It_int)| = 0.004072130713121$$

Додаток Д

Програма 3 . Обчислення $I^3(\omega)$ за формулою $\Phi^3(\omega)$ в Wolfram Mathematica

```

In[7]:= f[x_,y_,z_]:=Sin[x+y+z]
g[x_,y_,z_]:=Cos[x+y+z]
omega=2 Pi
omega1=5 Pi
omega2=10 Pi
omega3=20Pi
a=0
b=1
c=0
d=1
c1=0
d1=1
n=10
n1=10
xh=(b-a)/n
yh=(d-c)/n
zh=(d1-c1)/n
Xk=Array[(#-1)*xh&,n+1]
Yl=Array[(#-1)*yh&,n+1]
Zl1=Array[(#-1)*zh&,n+1]
xh1=(b-a)/n1
yh1=(d-c)/n1
zh1=(d1-c1)/n1
X1p=Array[(#-1)*xh1&,n1+1]
Y1q=Array[(#-1)*yh1&,n1+1]
Z1q1=Array[(#-1)*zh1&,n1+1]
In[33]:= Hh[k_,t_]:=Piecewise[{{1,Xk[[k]]<=t<=Xk[[k+1]]}},0]
Hhy[r_,t_]:=Piecewise[{{1,Yl[[r]]<=t<=Yl[[r+1]]}},0]
Hhz[r1_,t_]:=Piecewise[{{1,Zl1[[r1]]<=t<=Zl1[[r1+1]]}},0]
Hh1[p_,t_]:=Piecewise[{{1,X1p[[p]]<=t<=X1p[[p+1]]}},0]
Hhy1[q_,t_]:=Piecewise[{{1,Y1q[[q]]<=t<=Y1q[[q+1]]}},0]
Hhz1[q1_,t_]:=Piecewise[{{1,Z1q1[[q1]]<=t<=Z1q1[[q1+1]]}},0]
Hh[2,0.75]
Hhy[3,0.5]
A[x_,y_,z_]:=!(
  \*UnderoverscriptBox[\[Sum], \[k = 1], \[n]]\((f[Xk[\[l]]\(\k)\(\j)]) +
  \*FractionBox[\(xh), \[2)], y, z]*Hh[k, x])\))
B[x_,y_,z_]:=!(
  \*UnderoverscriptBox[\[Sum], \[l = 1], \[n]]\((f[x, Yl[\[l]]\(\l)\(\j)]) +
  \*FractionBox[\(yh), \[2)], z]*Hhy[l, y])\))
A1[x_,y_,z_]:=!(
  \*UnderoverscriptBox[\[Sum], \[p = 1], \[n1]]\((g[X1p[\[l]]\(\p)\(\j)]) +
  \*FractionBox[\(xh1), \[2)], y, z]*Hh1[p, x])\))
B1[x_,y_,z_]:=!(
  \*UnderoverscriptBox[\[Sum], \[q = 1], \[n1]]\((g[x, Y1q[\[l]]\(\q)\(\j)]) +
  \*FractionBox[\(yh1), \[2)], z]*Hhy1[q, y])\))

```



```

BB[x_,y_,z_]:=!(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\ell = 1\), \(\infty\)]((f[x, y, Z1[\(\ell\)](\ell)])) +
\*FractionBox[\(zh\), \(\ell\)]*Hhz[\ell, z]))
BB1[x_,y_,z_]:=!(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\ell = 1\), \(\infty\)]((g[x, y, Z1q1[\(\ell\)](q1)])) +
\*FractionBox[\(zh1\), \(\ell\)]*Hhz1[q1, z]))
AA[x_,y_,z_]:=!(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\ell = 1\), \(\infty\)](
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\ell = 1\), \(\infty\)]((f[Xk[\(\ell\)](k)])) +
\*FractionBox[\(xh\), \(\ell\)], Y1[\(\ell\)](\ell)] +
\*FractionBox[\(yh\), \(\ell\)], z]*Hhy[\ell, y] Hh[k, x]))
AA1[x_,y_,z_]:=!(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\ell = 1\), \(\infty\)](
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\ell = 1\), \(\infty\)]((g[X1p[\(\ell\)](p)])) +
\*FractionBox[\(xh1\), \(\ell\)], Y1q[\(\ell\)](q)] +
\*FractionBox[\(yh1\), \(\ell\)], z]*Hh1[p, x]*Hhy1[q, y]))
AAA[x_,y_,z_]:=!(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\ell = 1\), \(\infty\)](
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\ell = 1\), \(\infty\)]((f[Xk[\(\ell\)](k)])) +
\*FractionBox[\(xh\), \(\ell\)], y, Z1[\(\ell\)](\ell)] +
\*FractionBox[\(zh\), \(\ell\)]*Hh[k, x]*Hhz[\ell, z]))
AAA1[x_,y_,z_]:=!(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\ell = 1\), \(\infty\)](
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\ell = 1\), \(\infty\)]((g[X1p[\(\ell\)](p)])) +
\*FractionBox[\(xh1\), \(\ell\)], y, Z1q1[\(\ell\)](q1)] +
\*FractionBox[\(zh1\), \(\ell\)]*Hh1[p, x]*Hhz1[q1, z]))
AAAA[x_,y_,z_]:=!(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\ell = 1\), \(\infty\)](
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\ell = 1\), \(\infty\)]((f[x, Y1[\(\ell\)](\ell)])) +
\*FractionBox[\(yh\), \(\ell\)], Z1[\(\ell\)](\ell)] +
\*FractionBox[\(zh\), \(\ell\)]*Hhy[\ell, y]*Hhz[\ell, z]))
AAAA1[x_,y_,z_]:=!(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\ell = 1\), \(\infty\)](
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\ell = 1\), \(\infty\)]((g[x, Y1q[\(\ell\)](q)])) +
\*FractionBox[\(yh1\), \(\ell\)], Z1q1[\(\ell\)](q1)] +
\*FractionBox[\(zh1\), \(\ell\)]*Hhy1[q, y]*Hhz1[q1, z]))

Ct[x_,y_,z_]:=!(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\ell = 1\), \(\infty\)](
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\ell = 1\), \(\infty\)](
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\ell = 1\), \(\infty\)]((f[Xk[\(\ell\)](k)])) +
\*FractionBox[\(xh\), \(\ell\)], Y1[\(\ell\)](\ell)] +
\*FractionBox[\(yh\), \(\ell\)], Z1[\(\ell\)](\ell)] +
\*FractionBox[\(zh\), \(\ell\)]*Hh[k, x]*Hhy[\ell, y]*Hhz[\ell, z]))
Ct1[x_,y_,z_]:=!(
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\ell = 1\), \(\infty\)](
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\ell = 1\), \(\infty\)](
\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\ell = 1\), \(\infty\)]((g[X1p[\(\ell\)](p)])) +
\*FractionBox[\(xh1\), \(\ell\)], Y1q[\(\ell\)](q)] +

```

```

\*FractionBox[(y1\), \((2\))], Z1q1[(\(\)\(q1\)\(\)\)] +
\*FractionBox[(zh1\), \((2\))]*Hh1[p, x]*Hhy1[q, y]*Hhz1[q1, z])\)\)\)
OOO[x_,y_,z_]:=A[x,y,z]+B[x,y,z]+BB[x,y,z]-AA[x,y,z]-AAA[x,y,z]-AAAA[x,y,z]+Ct[x,y,z]
OOO1[x_,y_,z_]:=A1[x,y,z]+B1[x,y,z]+BB1[x,y,z]-AA1[x,y,z]-AAA1[x,y,z]-
AAAA1[x,y,z]+Ct1[x,y,z]

In[57]:=
Timing[NIntegrate[f[x,y,z]*Exp[I*omega*g[x,y,z]],{x,a,b},{y,c,d},{z,c1,d1},Method->"LocalAd
aptive"]]

Out[57]= {0.343,-0.044835-0.00565902 I}
In[59]:=
Timing[NIntegrate[OOO[x,y,z]*Exp[I*omega*OOO1[x,y,z]],{x,a,b},{y,c,d},{z,c1,d1},Method->
"LocalAdaptive"]]
Out[59]= {463.229,-0.0448341-0.00565758 I}

```

ПРОТОКОЛ
створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 13:40:56 28.03.2025

Назва файлу з підписом: Дисертація ІВАНОВ_28_03_2025.pdf.p7s
Розмір файлу з підписом: 3.1 МБ

Назва файлу без підпису: Дисертація ІВАНОВ_28_03_2025.pdf
Розмір файлу без підпису: 3.1 МБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: Іванов Сергій Сергійович

П.І.Б.: Іванов Сергій Сергійович

Країна: Україна

РНОКПП: 3552207016

Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 12:26:44 28.03.2025

Сертифікат виданий: "Дія". Кваліфікований надавач електронних довірчих послуг

Серійний номер: 382367105294AF970400000066A1BC001709B603

Тип носія особистого ключа: ЗНКІ криптомодуль ІІТ Гряда-301

Серійний номер носія особистого ключа: Не визначено

Алгоритм підпису: ДСТУ 4145

Тип підпису: Кваліфікований

Тип контейнера: Підпис та дані в одному файлі (CAAdES enveloped)

Формат підпису: З повними даними ЦСК для перевірки (CAAdES-X Long)

Сертифікат: Кваліфікований

Версія від: 2025.01.15 13:00