ЗАПИСКИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

1949 Том XXI

О ЗАМКНУТОСТИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ L_σ^p

Я. Л. Геронимус
(Харьков)

§ 1. Обозначим через D область комплексной плоскости x, ограниченную замкнутой спрямляемой кривой Жордана C длиной L; обозначим через $\sigma(s)$ некоторую ограниченную, неубывающую на отрезке $[0, L]$, функцию длины дуги s кривой C.

Пусть L_σ^p обозначает пространство комплексно-значных функций

$$f(\xi) = f[\xi(s)], \quad \xi \in C \tag{1.1}$$

с нормой

$$\| f \|_\sigma^p = \| f \| = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_C |f(\xi)|^p \, d\sigma(s) \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty, \quad p \geqslant 1, \tag{1.2}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега — Стильтьеса.

Обозначим через $U \subset L_\sigma^p$ следующую систему функций:

$$U = U_1 + U_2, \quad U_1 = \left\{ f_\alpha(\xi) \varphi_n^{(\alpha)}(\xi) \right\}, \quad U_2 = \left\{ \psi_\beta(\xi) \right\}, \tag{1.3}$$

где α и β пробегают независимо друг от друга конечное, счётное или континуальное множество значений; значок n пробегает счетное множество значений; $\left\{ \varphi_n^{(\alpha)}(x) \right\}$ — аналитические функции, регулярные в некоторой области $D' \supset D$, обладающие тем свойством, что всякая аналитическая функция $\varphi(x)$, регулярная в замкнутой области $\overline{D}$, может быть разложена на C в равномерно-сходящийся ряд

$$\varphi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n^{(\alpha)}(\xi). \tag{1.4}$$

Настоящая заметка посвящена вопросу о замкнутости системы $U \subset L_\sigma^p$ в пространстве L_σ^p.

Первая задача о замкнутости системы функций была поставлена и решена акад. В. Стекловым[1] — в частности, им рассмотрен случай, когда $U = \left\{ \xi^\nu \right\}_0^\infty$, C — отрезок вещественной оси, $p = 2$, а функция

[1] См. обзорный доклад акад. В. Смирнова [1].

$\sigma(s)$ абсолютно непрерывна. Далее, акад. В. Смирнов [2] рассмотрел эту же задачу для контуров C, подчинённых некоторым условиям (см. § 4). Акад. А. Колмогоров [3], [4], пользуясь теорией стационарных случайных последовательностей, рассмотрел тот случай, когда $p=2$, C — единичная окружность, а $U=\left\{e^{i\nu\theta}\right\}_0^\infty$, или $U=\left\{e^{\pm i\nu\theta}\right\}_1^\infty$. Первая из этих задач была обобщена М. Крейном [5] — у него снова $p=2$, C — единичная окружность, а система U такова[1]:

$$U=U_1=\left\{f_\alpha(\Theta)\,e^{in\theta}\right\}_0^\infty. \tag{1.5}$$

Случай любого $p\geqslant 1$ был впервые рассмотрен Н. Ахиезером [6], [7] — у него снова $U=\left\{e^{i\nu\theta}\right\}_0^\infty$, а C — единичная окружность.

§ 2. Если система U не замкнута в L_σ^p, то существует такая функция $g(\xi)\in L_\sigma^q$, $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$, что для любой функции $f(\xi)\in U$ имеем

$$\int_C g(\xi)\,f(\xi)\,d\sigma(s)=0, \quad f(\xi)\in U; \tag{2.1}$$

при этом функция $g(\xi)$ не эквивалентна нулю, т. е. не обращается тождественно в нуль на множестве F точек роста функции $\sigma(s)$.

Рассмотрим пока только функции $f(\xi)\in U_1$, т. е. рассмотрим условия

$$\int_C g(\xi)\,f_\alpha(\xi)\,\varphi_n^{(\alpha)}(\xi)\,d\sigma(s)=0; \tag{2.2}$$

благодаря условию, наложенному на функции $\left\{\varphi_n^{(\alpha)}(x)\right\}$, отсюда вытекает условие

$$\int_C \frac{g(\xi)\,f_\alpha(\xi)\,d\sigma(s)}{\xi-x}=0, \qquad x\,\overline{\in}\,\overline{D}; \tag{2.3}$$

положим

$$g(\xi)\,f_\alpha(\xi)\,d\sigma(s)=e^{i\varphi}\,dt_\alpha(s), \qquad e^{i\varphi}=\frac{d\xi}{ds}, \tag{2.4}$$

где $\varphi=\varphi(s)$ угол между положительным направлением оси абсцисс и касательной к кривой C; мы имеем

$$\int_C \left|dt_\alpha(s)\right|=\int_C \left|g(\xi)\,f_\alpha(\xi)\right|d\sigma(s)\leqslant \left\|g\right\|_\sigma^q\cdot\left\|f_\alpha\right\|_\sigma^p; \tag{2.5}$$

так как $\left\{f_\alpha(\xi)\,\varphi_n^{(\alpha)}(\xi)\right\}\in L_\sigma^p$, и так как на C единица может быть разложена в равномерно-сходящийся ряд по функциям $\left\{\varphi_n^{(\alpha)}(\xi)\right\}$, то и $f_\alpha(\xi)\in L_\sigma^p$ (благодаря полноте пространства L_σ^p); поэтому функция $t_\alpha(s)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке [0, L].

---

[1] М. Г. Крейн указывает в [5], что всю его теорию можно построить для любого Жорданова контура (без предположения его спрямляемости).

Таким образом, интеграл типа Коши — Стильтьеса

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^{i\varphi}\,dt_\alpha(s)}{\xi - x} \tag{2.6}$$

обладает по (2.3) и (2.4) следующими свойствами ([8] гл. V):

1) он тождественно равен нулю вне C; в области D он представляет аналитическую функцию $\lambda_\alpha(x)$ класса E_1, т. е.

$$\lambda_\alpha[\psi(w)]\psi'(w)\in H_1, \quad |w|<1, \tag{2.7}$$

где функция $x=\psi(w)$ конформно отображает область D на область $|w|<1$;[1]

2) функция $t_\alpha(s)$ абсолютно непрерывна

$$t_\alpha(s)=\int\limits_0^s \omega_\alpha(z)\,dz; \tag{2.8}$$

3) по всем некасательным путям изнутри C функция $\lambda_\alpha(x)$ имеет почти всюду на C предельные значения

$$\lambda_\alpha(\xi)=\lim_{x\to\xi}\lambda_\alpha(x), \qquad x\in D, \qquad \xi\in C, \tag{2.9}$$

причём почти всюду на C имеем

$$\lambda_\alpha(\xi)=\lambda_\alpha[\xi(s)]=\omega_\alpha(s); \tag{2.10}$$

4) функция $\lambda_\alpha(x)$ выражается через свои предельные значения интегралом Коши.

Из (2.7) вытекает существование интегралов Лебега

$$\int\limits_0^{2\pi}\left|\lambda_\alpha\left[\psi\left(e^{i\Theta}\right)\right]\psi'\left(e^{i\Theta}\right)\right|d\Theta<+\infty; \tag{2.11}$$

$$-\infty<\int\limits_0^{2\pi}\lg\left|\lambda_\alpha\left[\psi\left(e^{i\Theta}\right)\right]\psi'\left(e^{i\Theta}\right)\right|d\Theta<+\infty; \tag{2.11'}$$

так как $\psi'(w)\in H_1$, то существует интеграл Лебега

$$-\infty<\int\limits_0^{2\pi}\lg\left|\psi'\left(e^{i\Theta}\right)\right|d\Theta<+\infty; \tag{2.12}$$

следовательно, из (2.11′) находим

$$-\infty<\int\limits_0^{2\pi}\lg\left|\lambda_\alpha\left[\psi\left(e^{i\Theta}\right)\right]\right|d\Theta=\int\limits_C\lg\left|\lambda_\alpha(\xi)\right|\cdot\left|\gamma'(\xi)\,d\xi\right|<+\infty, \tag{2.13}$$

где $w=\gamma(x)$ функция, обратная функции $x=\psi(w)$.

---

[1] Функция $f(x)\in E_p$, если $f[\psi(w)]\sqrt[p]{\psi'(w)}\in H_p$.

Из (2.4), (2.8) и (2.10) имеем почти всюду на C

$$g(\xi) f_\alpha(\xi) \sigma'(s) = e^{i\varphi} t'_\alpha(s) = e^{i\varphi} \lambda_\alpha(\xi); \tag{2.14}$$

так как $g(\xi) \in L^q_\sigma$, то мы имеем

$$+\infty > \| g \|^q_\sigma \geqslant \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_C |g(\xi)|^q \sigma'(s)\, ds \right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_C \left| \frac{\lambda_\alpha(\xi)}{f_\alpha(\xi) \sqrt[p]{\sigma'(s)}} \right|^q |d\xi| \right\}^{\frac{1}{q}};$$

если выделить одну из функций $\{f_\alpha(\xi)\}$, например, $f_0(\xi)$, то

$$\int_C \left| \frac{\lambda_0(\xi)}{f_0(\xi) \sqrt[p]{\sigma'(s)}} \right|^q |d\xi| < +\infty; \qquad \lambda_\alpha(\xi) = \frac{\lambda_0(\xi)}{f_0(\xi)} f_\alpha(\xi). \tag{2.15}$$

Вернёмся к условию (2.1); применяя его к функциям системы U_2 и пользуясь (2.4), (2.8) и (2.14), получим

$$\int_C \frac{\lambda_0(\xi)}{f_0(\xi)} \psi_\beta(\xi)\, d\xi = 0, \qquad \psi_\beta(\xi) \in U_2. \tag{2.16}$$

Итак, из незамкнутости системы $U \subset L^p_\sigma$ в пространстве L^p_σ вытекает существование аналитической функции $\lambda_0(x) \in E_1$, граничные значения которой удовлетворяют условиям (2.15) и (2.16).

Обратно, если существует аналитическая функция $\lambda_0(x)$, обладающая этими свойствами, то, обозначая через $E \subset [0, L]$ множество точек отрезка $[0, L]$, в которых производная $\sigma'(s)$ существует и положительна, определим функцию $g(\xi)$ следующим образом:

$$g(\xi) = \begin{cases} \dfrac{e^{i\varphi} \lambda_0(\xi)}{f_0(\xi) \sigma'(s)}, & s \in E, \\ 0, & s \bar{\in} E; \end{cases} \qquad \xi = \xi(s), \tag{2.17}$$

из (2.15) найдём

$$\int_C |g(\xi)|^q d\sigma(s) < +\infty; \tag{2.18}$$

из (2.15) и (2.16) находим

$$\int_C g(\xi) f_\alpha(\xi) \varphi_n^{(\alpha)}(\xi)\, d\sigma(s) = 0, \qquad \int_C g(\xi) \psi_\beta(\xi)\, d\sigma(s) = 0. \tag{2.19}$$

Мы пришли, таким образом, к следующей теореме.

Теорема 2.1. Для незамкнутости системы U в пространстве L^p_σ необходимо и достаточно существование такой аналитической функции $\lambda_0(x) \in E_1$, чтобы её граничная функция

$$\lambda_0(\xi) = \lim_{x \to \xi} \lambda_0(x), \qquad x \in D, \qquad \xi \in C \tag{2.20}$$

удовлетворяла следующим условиям:

1) $$\int_C \left| \frac{\lambda_0(\xi)}{f_0(\xi)\sqrt[p]{\sigma'(s)}} \right|^q |d\xi| < +\infty; \tag{2.21}$$

2) $$\int_C \frac{\lambda_0(\xi)}{f_0(\xi)} \psi_\beta(\xi)\, d\xi = 0, \qquad \psi_\beta(\xi) \in U_2; \tag{2.22}$$

3) функции
$$\lambda_\alpha(\xi) = \frac{\lambda_0(\xi)}{f_0(\xi)} f_\alpha(\xi) \tag{2.23}$$

должны являться граничными функциями для функций $\lambda_\alpha(x) \in E_1$.

Полагая $p=2$, $U=U_1$ и считая C единичной окружностью, мы получим результат М. Крейна [5].

Примечание 2.1. При доказательстве теоремы 2.1 мы считали кривую C замкнутой; если же C — спрямляемая дуга Жордана, то условие (2.3) влечёт за собой эквивалентность нулю функции $g(\xi)$; следовательно, в этом случае система функций $U = \left\{ \xi^\nu \right\}_0^\infty$ замкнута в L_σ^p при любой функции $\sigma(s)$.

Этот результат при $p=2$ вытекает из более общих результатов М. Крейна и М. Красносельского [9] и содержит, как частный случай, результат В. Стеклова, у которого $p=2$, C — отрезок вещественной оси, а функция $\sigma(s)$ абсолютно непрерывна.

§ 3. Рассмотрим более простой необходимый критерий незамкнутости, который, как мы увидим, в некоторых случаях является и достаточным.

Теорема 3.1. Условие
$$\int_C \lg \left\{ \sigma'(s) \left| f_0(\xi) \right|^p \right\} \left| \gamma'(\xi)\, d\xi \right| > -\infty \tag{3.1}$$

необходимо для незамкнутости системы U в пространстве L_σ^p.

Воспользуемся очевидным неравенством
$$\int_C \lg \left| \frac{\lambda_0(\xi)}{f_0(\xi)\gamma'(\xi)\sqrt[p]{\sigma'(s)}} \right| \cdot |\gamma'(\xi)\, d\xi| < \int_C \left| \frac{\lambda_0(\xi)}{f_0(\xi)\sqrt[p]{\sigma'(s)}} \right| |d\xi|; \tag{3.2}$$

из (2.21) имеем
$$\frac{1}{L}\int_C \left| \frac{\lambda_0(\xi)}{f_0(\xi)\sqrt[p]{\sigma'(s)}} \right| \cdot |d\xi| \leqslant \left\{ \frac{1}{L}\int_C \left| \frac{\lambda_0(\xi)}{f_0(\xi)\sqrt[p]{\sigma'(s)}} \right|^q |d\xi| \right\}^{\frac{1}{q}} < +\infty; \tag{3.3}$$

из (3.2) и (3.3) вытекает неравенство
$$\int_C \lg \left| \lambda_0(\xi) \right| \cdot \left| \gamma'(\xi)\, d\xi \right| - \int_C \lg \left| f_0(\xi)\sqrt[p]{\sigma'(s)} \right| \cdot \left| \gamma'(\xi)\, d\xi \right| -$$
$$- \int_C \lg \left| \gamma'(\xi) \right| \cdot \left| \gamma'(\xi)\, d\xi \right| < +\infty; \tag{3.4}$$

последний интеграл существует по (2.12), ибо

$$\int\limits_C \left|\gamma'(\xi)\right| \lg \left|\gamma'(\xi)\right| \cdot \left|d\xi\right| = -\int\limits_0^{2\pi} \lg \left|\psi'\left(e^{i\Theta}\right)\right| d\Theta; \tag{3.5}$$

следовательно, имеем

$$\int\limits_C \lg \left|\lambda_0(\xi)\right| \cdot \left|\gamma'(\xi)\,d\xi\right| - \frac{1}{p}\int\limits_C \lg \left\{\sigma'(s)\left|f_0(\xi)\right|^p\right\}\left|\gamma'(\xi)\,d\xi\right| < +\infty; \tag{3.6}$$

сопоставляя это неравенство с (2.13), получим (3.1).

Рассмотрим теперь несколько частных случаев, когда условие (3.1) не только необходимо, но и достаточно.

Теорема 3.2. Условие

$$\int\limits_C \lg \left\{\sigma'(s)\left|f_0(\xi)\right|^p\right\}\left|\gamma'(\xi)\,d\xi\right| > -\infty \tag{3.7}$$

достаточно для того, чтобы можно было построить функцию $\lambda_0(x) \in E_1$, предельные значения которой удовлетворяют почти всюду на C соотношению

$$\left|\lambda_0(\xi)\right| = \lim_{x \to \xi}\left|\lambda_0(x)\right| = \sigma'(s)\left|f_0(\xi)\right|^p; \tag{3.8}$$

если, кроме того, выполняются условия 2) и 3) теоремы 2.1, то система U незамкнута в пространстве L_σ^p.

Действительно, функция

$$F(\xi) = \sigma'(s)\left|f_0(\xi)\right|^p \tag{3.9}$$

не отрицательна на C; следовательно, функция

$$q(\Theta) = F\left[\psi\left(e^{i\Theta}\right)\right]\left|\psi'\left(e^{i\Theta}\right)\right| \tag{3.10}$$

не отрицательна на отрезке $(0, 2\pi)$; так как

$$\int\limits_0^{2\pi} q(\Theta)\,d\Theta = \int\limits_0^{2\pi} F\left[\psi\left(e^{i\Theta}\right)\right]\left|\psi'\left(e^{i\Theta}\right)\right| d\Theta = \int\limits_C \left|f_0(\xi)\right|^p \sigma'(s)\,ds < +\infty; \tag{3.11}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \lg q(\Theta)\,d\Theta = \int\limits_0^{2\pi} \lg\left|F\left[\psi\left(e^{i\Theta}\right)\right]\right| d\Theta + \int\limits_0^{2\pi} \lg\left|\psi'\left(e^{i\Theta}\right)\right| d\Theta =$$

$$= \int\limits_C \lg\left\{\sigma'(s)\left|f_0(\xi)\right|^p\right\}\left|\gamma'(\xi)\,d\xi\right| + \int\limits_0^{2\pi} \lg\left|\psi'\left(e^{i\Theta}\right)\right| d\Theta, \tag{3.12}$$

то по (3.7) и (2.12) имеем

$$-\infty < \int\limits_0^{2\pi} \lg q(\Theta)\,d\Theta < +\infty. \tag{3.13}$$

Следовательно, мы можем построить аналитическую функцию $D(w)$, которая в области $|w|<1$ регулярна, отлична от нуля и принадлежит классу H_2, причем почти всюду в $[0, 2\pi]$ имеем (см. [12])

$$q(\Theta) = \lim_{r \to 1-0} \left| D\left(re^{i\Theta}\right) \right|^2 = F\left[\psi\left(e^{i\Theta}\right)\right] \left|\psi'\left(e^{i\Theta}\right)\right|; \tag{3.14}$$

таким образом, почти всюду на C будем иметь

$$\sigma'(s) \left| f_0(\xi) \right|^p = \lim_{x \to \xi} \left| D\left[\gamma(x)\right] \sqrt{\gamma'(x)} \right|^2; \tag{3.15}$$

полагая

$$\lambda_0(x) = \gamma'(x) \left\{ D\left[\gamma(x)\right] \right\}^2, \tag{3.16}$$

мы видим, что $\lambda_0(x) \in E_1$, ибо $D^2(w) \in H_1$; из (3.15) и (3.16) вытекает, что почти всюду на C имеем

$$\left| \lambda_0(\xi) \right| = \lim_{x \to \xi} \left| D\left[\gamma(x)\right] \sqrt{\gamma'(x)} \right|^2 = \sigma'(s) \left| f_0(\xi) \right|^p. \tag{3.17}$$

Пользуясь этим, имеем

$$\int_C \left| \frac{\lambda_0(\xi)}{f_0(\xi) \sqrt[p]{\sigma'(s)}} \right|^q |d\xi| = \int_C \left| f_0(\xi) \right|^p \sigma'(s)\, ds < +\infty. \tag{3.18}$$

Таким образом, при выполнении условия (3.7) можно построить аналитическую функцию $\lambda_0(x) \in E_1$, удовлетворяющую по (3.18) условию 1) теоремы 2.1; поэтому, если она удовлетворяет и условиям 2) и 3) этой теоремы, то система U незамкнута в L^p_σ.

§ 4. Рассмотрим несколько частных случаев предыдущих теорем. Будем предполагать во всём дальнейшем, что т о ч к а $x=0$ л е ж и т в н у т р и C — в противном случае даже система $\left\{\xi^n\right\}_{-\infty}^{+\infty}$ может быть незамкнута в L^p_σ; таким образом, на C имеем

$$0 < M_1 \leqslant |\xi| \leqslant M_2, \qquad \xi \in C. \tag{4.1}$$

Пусть

$$U = \left\{\xi^\nu\right\}_{-\infty}^{+\infty} - \left\{\xi^{r_k}\right\}_{k=1}^{m}, \tag{4.2}$$

где ц е л ы е ч и с л а $\left\{r_k\right\}_1^m$ о г р а н и ч е н ы х о т ь с о д н о й с т о р о н ы; пусть, например, они ограничены сверху, т. е.

$$-\infty \leqslant r_m < r_{m-1} < \ldots < r_2 < r_1 < +\infty. \tag{4.3}$$

Мы имеем в этом случае

$$U_1=\left\{f_0(\xi)\,\xi^n\right\}_0^\infty, \qquad f_0(\xi)=\xi^{r_1+1}; \tag{4.4}$$

$$U_2=\left\{\xi^\nu\right\}, \qquad \nu\neq r_k, \qquad (k=1,2,3,\ldots,m); \tag{4.5}$$

легко видеть, что условие 3) теоремы 2.1 отпадает; остаются условия

$$\int\limits_C\left|\frac{\lambda_0(\xi)}{\sqrt[p]{\sigma'(s)}}\right|^q|d\xi|<+\infty; \tag{4.6}$$

$$\int\limits_C\frac{\lambda_0(\xi)}{\xi^{r_1+1-\nu}}\,d\xi=0, \qquad \nu\neq r_k, \qquad (k=1,2,3,\ldots,m). \tag{4.7}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 4.1. Для незамкнутости в L_σ^p системы функций (4.2) при условии (4.3) необходимо и достаточно, чтобы можно было построить аналитическую функцию $\lambda_0(x)\in E_1$, удовлетворяющую условию (4.6) и имеющую следующую форму:

$$\lambda_0(x)=\sum_{k=1}^m\lambda_k\,x^{r_1-r_k}; \tag{4.8}$$

в частности, если m — конечное число, то для незамкнутости системы U, получаемой вычёркиванием из системы $\left\{\xi^n\right\}_{-\infty}^{+\infty}$ конечного числа функций, необходимо и достаточно существование полинома $\lambda_0(x)$ (4.8) степени не выше r_1-r_m, удовлетворяющего условию (4.6). В простейшем случае, если $m=1$, то $\lambda_0(x)=\mathrm{const}$; в этом случае необходимое и достаточное условие незамкнутости таково[1]:

$$\int\limits_C\left\{\frac{1}{\sqrt[p]{\sigma'(s)}}\right\}^q|d\xi|=\int\limits_C\left\{\sigma'(s)\right\}^{\frac{1}{1-p}}|d\xi|<+\infty. \tag{4.9}$$

Отсюда вытекает

Теорема 4.1′. Если k — наибольшее положительное число, для которого справедливо неравенство

$$\int\limits_C\frac{|d\xi|}{[\sigma'(s)]^k}<+\infty, \tag{4.10}$$

[1] Если $p=2$, а C — единичная окружность, мы получим результат А. Колмогорова [3], [4].

то при $p \geqslant 1 + \frac{1}{k}$ система $U = \{\xi^n\}_{-\infty}^{+\infty}$ минимально замкнута в L_σ^p (т. е. становится незамкнутой после вычёркивания одной любой функции).

Рассмотрим теперь следующий частный случай теорем 2.1 и 3.2, представляющий большой интерес.

Теорема 4.2. Условие

$$\int_C \lg \sigma'(s) \, |\gamma'(\xi) \, d\xi| > -\infty \tag{4.11}$$

необходимо и достаточно для незамкнутости системы $U = \{\xi^n\}_0^\infty$ в пространстве L_σ^p.[1]

Необходимость условия (4.11) доказана в теореме 3.1; достаточность его вытекает из теоремы 3.2, ибо в данном частном случае отпадают условия 2) и 3) теоремы 2.1.

Пусть, в частности, $d\sigma(s) = ds$; тогда условия (4.11) и (4.9) всегда выполняются и, следовательно, система $U = \{\xi^n\}_{-\infty}^{+\infty}$ минимально замкнута в пространстве комплекснозначных функций $f(\xi)$, для которых

$$\int_C |f(\xi)|^p \, |d\xi| < +\infty; \tag{4.12}$$

сопоставим этот результат с результатом акад. В. Смирнова [2], который формулируется следующим образом:

если $p = 2$, а функция $\sigma(s)$ абсолютно непрерывна, то система $\{\xi^n\}_0^\infty$ замкнута относительно любой аналитической функции класса E_2, если контур C таков, что выполняется условие

$$\lg|\psi'(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg|\psi'(e^{i\alpha})| \frac{(1 - r^2) \, d\alpha}{1 - 2r\cos(\theta - \alpha) + r^2}, \quad 0 < r < 1. \tag{4.13}$$

Наш результат не противоречит сформулированному результату В. И. Смирнова, ибо, будучи замкнутой относительно более узкого класса аналитических функций класса E_2, система незамкнута относительно класса произвольных функций $f(\xi)$, подчинённых лишь условию (4.12).

Рассмотрим в заключение один частный случай теоремы 3.2. Пусть C — единичная окружность и пусть функция $\sigma'(\theta)$ такова:

$$\sigma'(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cos k\mu\theta + b_k \sin k\mu\theta \right) \geqslant 0, \tag{4.14}$$

[1] Если C — единичная окружность, то при $p = 2$ получим результат А. Колмогорова [3], [4], а при любом $p \geqslant 1$ — результат Н. Ахиезера [6], [7].

где $\mu \geqslant 2$ целое число; тогда функция $D(w)$, определяемая из (3.15), имеет следующий вид:

$$D(w) = D(\chi) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^{\mu k}, \tag{4.15}$$

и, следовательно, функция $\lambda_0(x) = \{D(x)\}^2$ удовлетворяет соотношениям

$$\int\limits_{|\xi|=1} \lambda_0(\xi)\, \xi^{-r-1}\, d\xi = 0, \qquad r \neq k\mu; \tag{4.16}$$

следовательно, если функция (4.14) удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^{2\pi} \lg \sigma'(\Theta)\, d\Theta > -\infty, \tag{4.17}$$

то, вычёркивая из системы $\left\{e^{i\nu\Theta}\right\}_{-\infty}^{+\infty}$ систему функций $\left\{e^{-ik\mu\Theta}\right\}_0^{\infty}$, мы получим систему U, незамкнутую в L_σ^p.

§ 5. Рассмотрим теперь полиномы

$$P_n(\xi) = \xi^n + \cdots, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots L), \tag{5.1}$$

наименее уклоняющиеся от нуля (в смысле метрики L_σ^p) из всех полиномов степени n со старшим коэфициентом, равным единице; мы имеем, таким образом, неравенство

$$h_n = \left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_C \left|P_n(\xi)\right|^p d\sigma(s)\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_C \left|\xi^n + \cdots\right|^p d\sigma(s)\right\}^{\frac{1}{p}}; \tag{5.2}$$

мы изучим некоторые асимптотические свойства этих полиномов.

В том частном случае, когда $d\sigma(s) = ds$, эти полиномы были рассмотрены Шохатом и Сеге [11]; асимптотическая формула была впервые получена Сеге [10]—[12] только при $p = 2$, причём в этом случае $d\sigma(s) = w(s)\,ds$ и функция $w(s)$ положительна и непрерывна на отрезке $[0, L]$.

Общий случай $p \geqslant 2$ был впервые рассмотрен акад. С. Н. Бернштейном [14]; у него C — отрезок $[-1, +1]$, а

$$w(s) = \frac{t(s)}{\sqrt{1-s^2}}, \tag{5.3}$$

причём функция $t(s)$ непрерывна и положительна на C.

Пусть функция

$$x = \varphi(w) = cw + c_0 + \frac{c_1}{w} + \frac{c_2}{w^2} + \cdots, \qquad c > 0, \tag{5.4}$$

конформно отображает область G, лежащую вне C, на область $|w|>1$; обратная функция пусть будет $w=\delta(x)$.

После конформного отображения будем иметь

$$d\sigma(s)=d\tau(\Theta), \tag{5.5}$$

где $\tau(\Theta)$ некоторая ограниченная, неубывающая на отрезке $[0, 2\pi]$ функция; почти всюду на C имеем

$$\sigma'(s)\,|d\xi|=\tau'(\Theta)\,d\Theta=\tau'(\Theta)\,|\delta'(\xi)|\,|d\xi|, \tag{5.6}$$

откуда

$$\tau'(\Theta)=\frac{\sigma'(s)}{|\delta'(\xi)|}. \tag{5.7}$$

Как известно, условие

$$\int_0^{2\pi}\lg\tau'(\Theta)\,d\Theta>-\infty \tag{5.8}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы можно было построить аналитическую функцию $D_1(w)$, регулярную и неравную нулю в области $|w|>1$, так, чтобы почти всюду в $[0, 2\pi]$ иметь

$$\tau'(\Theta)=\lim_{R\to 1+0}\left|D_1\left(Re^{i\Theta}\right)\right|^{-p}; \tag{5.9}$$

эта функция даётся формулой [10]

$$D_1(w)=\exp\left\{-\frac{1}{2\pi p}\int_0^{2\pi}\frac{w+e^{i\Theta}}{w-e^{i\Theta}}\lg\tau'(\Theta)\,d\Theta\right\},\qquad |w|>1, \tag{5.10}$$

причём

$$D_1(\infty)=\exp\left\{-\frac{1}{2\pi p}\int_0^{2\pi}\lg\tau'(\Theta)\,d\Theta\right\}. \tag{5.11}$$

Полагая

$$\Delta(x)=D_1[\delta(x)], \tag{5.12}$$

мы приходим к аналитической функции $\Delta(x)$, регулярной и неравной нулю в области G, причём почти всюду на C имеем

$$\sigma'(s)=|\delta'(\xi)|\,|\Delta(\xi)|^{-p}, \tag{5.13}$$

где

$$\Delta(\xi)=\lim_{x\to\xi}\Delta(x),\qquad x\in G,\qquad \xi\in C, \tag{5.14}$$

существующая почти всюду на C (при приближении извне по всем некасательным путям) граничная функция, через которую функция $\Delta(x)$ может быть выражена интегралом Коши.

Мы имеем по (5.7) и (5.11)

$$\frac{1}{\Delta(\infty)}=\frac{1}{D_1(\infty)}=\exp\left\{\frac{1}{2\pi p}\int\limits_C \lg\frac{\sigma'(s)}{|\delta'(\xi)|}\cdot|\delta'(\xi)d\xi|\right\}. \qquad (5.15)$$

Условие (5.8) эквивалентно условию

$$\int\limits_C \lg\frac{\sigma'(s)}{|\delta'(\xi)|}\cdot|\delta'(\xi)\,d\xi|=\int\limits_C \lg\sigma'(s)\,|\delta'(\xi)\,d\xi|+\int\limits_0^{2\pi}\lg\left|\varphi'\left(e^{i\theta}\right)\right|d\theta>-\infty; \qquad (5.16)$$

последний интеграл существует, ибо $\varphi'(w)\in H_1$; следовательно, условие

$$\int\limits_C \lg\sigma'(s)\,|\delta'(\xi)\,d\xi|>-\infty, \qquad (5.17)$$

эквивалентное условию (5.8), необходимо и достаточно для возможности построения функции $\Delta(x)$, обладающей указанными свойствами.

Теорема 5.1. Если C — спрямляемая кривая Жордана, то следующие два утверждения эквивалентны:

I. существует интеграл (5.17);

II. система полиномов $\{P_n(\xi)\}_0^\infty$ незамкнута в пространстве L_σ^p.

Если C — аналитическая кривая Жордана, то утверждения I, II эквивалентны следующему утверждению:

III. существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{h_n}{c^n}\right)^p=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_C \lg\frac{\sigma'(s)}{|\delta'(\xi)|}\,|\delta'(\xi)\,d\xi|\right\}>0. \qquad (5.18)$$

Если C — выпуклая[1] аналитическая кривая Жордана, то утверждения I, II, III эквивалентны следующим двум утверждениям:

IV. имеет место сходимость „в среднем“

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_C\left|\left\{\frac{P_n(\xi)}{c^n\delta^n(\xi)}\right\}^{\frac{p}{2}}-\lambda^{\frac{p}{2}}(\xi)\right|^2 d\sigma(s)=0, \qquad (5.19)$$

где

$$\lambda(\xi)=\begin{cases}\dfrac{\Delta(\xi)}{\Delta(\infty)} & s\in E,\\ 0, & s\,\bar{\in}\,E;\end{cases}\qquad \xi=\xi(s), \qquad (5.20)$$

[1] Если p — чётное число, то оговорка о выпуклости ненужна.

V. равномерно для всех x вне или на кривой C_r ($r > 1$) имеет место асимптотическая формула[1]

$$P_n(x) \simeq \frac{c^n \delta^n(x) \Delta(x)}{\Delta(\infty)} \simeq h_n \delta^n(x) \Delta(x). \tag{5.21}$$

§ 6. Воспроизводя рассуждения Сегё ([12], § 16.4), введём систему полиномов, которая нам окажется весьма полезной для доказательства теоремы 5.1.

Пусть в окрестности точки $x = \infty$ имеем

$$g_n(x) = [\delta(x)]^n = f_n(x) + O\left(\frac{1}{x}\right), \quad f_n(x) = \frac{x^n}{c^n} + \ldots, \ (n=1, 2, \ldots); \tag{6.1}$$

очевидно функция $g_n(x)$ регулярна в замкнутой области вне или на кривой C_ρ при $\rho \geqslant r$, $r < 1$; пользуясь теоремой Коши, Сегё показывает, что в замкнутой области $\overline{G}$ имеем

$$|g_n(x) - f_n(x)| = O(r^n), \qquad r < 1. \tag{6.2}$$

Рассмотрим теперь полиномы

$$R_n(x) = c^n \sum_{k=0}^{m} \gamma_k f_{n-k}(x), \qquad 0 < m < n; \quad \gamma_0 = 1; \tag{6.3}$$

коэфициенты $\{\gamma_k\}_1^m$ и целое число m совершенно произвольны.

Пользуясь (6.1) и (6.2), имеем для $|w| \geqslant 1$

$$R_n[\varphi(w)] = c^n \sum_{k=0}^{m} \gamma_k g_{n-k}[\varphi(w)] + O(c^n r^n) =$$

$$= (cw)^n \left\{1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{\gamma_k}{w^k}\right\} + O(c^n r^n). \tag{6.4}$$

Приступим к доказательству теоремы 5.1.

Эквивалентность утверждений I и II сразу вытекает из теоремы 4.2.

Пусть теперь C — аналитическая кривая Жордана.

Мы имеем из (6.4)

$$h_n \leqslant \left\{\frac{1}{2\pi}\int_C |R_n(\xi)|^p d\sigma(s)\right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= c^n \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{|w|=1} \left|1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{\gamma_k}{w^k}\right|^p d\tau(\Theta)\right\}^{\frac{1}{p}} + O\left(c^n r^n\right); \tag{6.5}$$

[1] Для $p = 2$, а $d\sigma(s) = w(s)\,ds$, причём функция $w(s)$ положительна и непрерывна на отрезке [0, 1], формулы (5.18) и (5.21) были найдены впервые Сегё [10]—[12]; см. также П. П. Коровкин [16].

отсюда находим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{h_n}{c^n} \leqslant \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|w|=1} \left| 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{\gamma_k}{w^k} \right|^p d\tau(\Theta) \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{6.6}$$

Обозначим через A класс функций $f(w)$, регулярных и неравных нулю в замкнутой области $|w| \geqslant 1$, и нормированных условием $f(\infty) = 1$; пусть

$$\tau^2 = \operatorname*{Inf}_{\varphi \in A} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|w|=1} |\varphi(w)|^2 d\tau(\Theta) \right\}; \tag{6.7}$$

пусть также

$$\tau_\nu^2 = \operatorname*{Min}_{\alpha} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|w|=1} \left| 1 + \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k^{(\nu)} w^k \right|^2 d\tau(\Theta) \right\}, \quad (\nu = 1, 2, \ldots), \tag{6.8}$$

причём полиномы

$$1 + \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k^{(\nu)} w^k, \quad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{6.9}$$

неравны нулю в области $|w| \leqslant 1$.

Так как функция $\varphi\left(\frac{1}{w}\right)$ содержит, как частный случай, полином (6.9), то мы имеем

$$\tau \leqslant \tau_\nu \leqslant \tau_{\nu-1}, \tag{6.10}$$

откуда

$$\tau \leqslant \tau_0, \qquad \tau_0 = \lim_{\nu\to\infty} \tau_\nu \geqslant 0; \tag{6.11}$$

с другой стороны, из (6.6) находим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{h_n}{c^n} \leqslant \tau^{\frac{2}{p}} \leqslant \tau_0^{\frac{2}{p}}. \tag{6.12}$$

Как показано в нашей работе [17], полином $\overset{*}{P}_\nu(w)$, минимизирующий интеграл (6.8) и нормированный условием $\overset{*}{P}_\nu(0) = 1$, не обращается в нуль в области $|w| \leqslant 1$; кроме того, по [13] и [17] имеем

$$\tau_0^2 = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lg \tau'(\Theta)\, d\Theta \right\}^1, \tag{6.13}$$

откуда, пользуясь (6.12) и (5.7), находим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{h_n}{c^n} \leqslant \exp\left\{ \frac{1}{2\pi p} \int\limits_C \lg \frac{\sigma'(s)}{|\delta'(s)|} |\delta'(\xi)\, d\xi| \right\}^1. \tag{6.14}$$

[1] Если интеграл не существует, то правую часть полагаем равной нулю.

С другой стороны, при условии (5.17) имеем

$$h_n^p = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \left|P_n(\xi)\right|^p d\sigma(s) \geqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \left|\left|P_n(\xi)\right|^p \sigma'(s)\left|d\xi\right|\right| = \tag{6.15}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|P_n\left[\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right]\right|^p \tau'(\theta)\,d\theta = \lim_{R\to 1+0}\left\{\frac{R^{n-1}}{2\pi}\int\limits_{|w|=R}\left|\frac{P_n[\varphi(w)]}{w^n D_1(w)}\right|^p |dw|\right\};$$

так как функция под знаком модуля регулярна в области $|w|>1$ и имеет при $w=\infty$ значение $\frac{c^n}{\Delta(\infty)}$, то мы имеем неравенство

$$\frac{h_n}{c^n} \geqslant \frac{1}{\Delta(\infty)}; \tag{6.16}$$

сопоставление (6.16) с (6.14) и (5.15) показывает, что при условии (5.17) имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h_n}{c^n} = \exp\left\{\frac{1}{2\pi p}\int\limits_C \lg\frac{\sigma'(s)}{|\delta'(\xi)|}\cdot|\delta'(\xi)\,d\xi|\right\}. \tag{6.17}$$

Легко видеть, что оно справедливо и тогда, когда интеграл в правой части, или, что то же самое, интеграл (5.17) не существует; действительно, в этом случае правая часть (6.14) равна нулю и мы имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{h_n}{c^n} \leqslant 0, \tag{6.18}$$

т. е. в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{h_n}{c^n}=0$, и равенство (6.17) снова справедливо[1].

Из формулы (6.17) вытекает эквивалентность III с I и II.

Выведем теперь IV из I; пользуясь определением (5.20) функции $\lambda(\xi)$ мы имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_C\left[\frac{P_n(\xi)}{c^n\delta^n(\xi)}\right]^{\frac{p}{2}}\left[\overline{\lambda(\xi)}\right]^{\frac{p}{2}} d\sigma(s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C\left[\frac{P_n(\xi)\overline{\Delta(\xi)}}{c^n\delta^n(\xi)\Delta(\infty)}\right]^{\frac{p}{2}}\sigma'(s)\,|d\xi| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left\{\frac{P_n\left[\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right]\overline{D_1\left(e^{i\theta}\right)}}{c^n e^{in\theta} D_1(\infty)}\right\}^{\frac{p}{2}}\tau'(\theta)\,d\theta =$$

$$= \lim_{R\to 1+0}\left\{\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{|w|=R}\left\{\frac{P_n[\varphi(w)]}{c^n w^n D_1(w) D_1(\infty)}\right\}^{\frac{p}{2}}|dw|\right\}; \tag{6.19}$$

[1] Формула (6.17) в том случае, когда C — единичная окружность, а функция $\sigma(s)$ абсолютно непрерывна, была найдена Сегё [12] для $p=2$ и Н. Ахиезером [7] для $p\geqslant 1$; для того же C и произвольной функции распределения $\sigma(s)$ формулу (6.17) нашёл Верблунский [13] (при $p=2$).

Для $p=2$ и $d\sigma(s)=w(s)\,ds$, где $w(s)>0$ и непрерывна, формула (6.17) для аналитической кривой Жордана найдена Сегё [12].

так как C, по предположению, выпуклая кривая, то все корни полинома $P_n(x)$ лежат внутри C (см. [18]); поэтому подинтегральная функция в последнем интеграле регулярна в области $|w|>1$ и при $w=\infty$ имеет значение $\left[\frac{1}{\Delta(\infty)}\right]^p$; поэтому мы имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_C \left\{\frac{P_n(\xi)\overline{\lambda(\xi)}}{c^n\delta^n(\xi)}\right\}^{\frac{p}{2}} d\sigma(s)=\left[\frac{1}{\Delta(\infty)}\right]^p. \tag{6.20}$$

Легко находим далее

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_C \left|\lambda(\xi)\right|^p d\sigma(s)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_C\left|\frac{\Delta(\xi)}{\Delta(\infty)}\right|^p\sigma'(s)\,|d\xi|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{D_1(e^{i\theta})}{D_1(\infty)}\right|^p\tau'(\theta)\,d\theta= \tag{6.21}$$

$$=\lim_{R\to 1+0}\left\{\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{|w|=R}\left|\frac{D_1(w)}{D_1(\infty)}\right|^p\cdot\frac{|dw|}{|D_1(w)|^p}\right\}=\left[\frac{1}{\Delta(\infty)}\right]^p;$$

наконец, по (5.2) имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_C\left|\frac{P_n(\xi)}{c^n\delta^n(\xi)}\right|^p d\sigma(s)=\left(\frac{h_n}{c^n}\right)^p; \tag{6.22}$$

окончательно находим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_C\left|\left\{\frac{P_n(\xi)}{c^n\delta^n(\xi)}\right\}^{\frac{p}{2}}-\lambda^{\frac{p}{2}}(\xi)\right|^2 d\sigma(s)=\left(\frac{h_n}{c^n}\right)^p-\left[\frac{1}{\Delta(\infty)}\right]^p; \tag{6.23}$$

благодаря (5.18) и (5.15), получаем (5.19).

§ 7. Чтобы вывести III из IV, покажем, что III вытекает даже из соотношения

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_C\left|\left\{\frac{P_n(\xi)}{c^n\delta^n(\xi)}\right\}^{\frac{p}{2}}-\mu^{\frac{p}{2}}(\xi)\right|^2 d\sigma(s)=0, \tag{7.1}$$

где функция $\mu(\xi) \in L^p_\sigma$ не эквивалентна нулю. Из (7.1) вытекает существование такой подпоследовательности $\{n_\nu\}$, для которой

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_C \left| \left\{ \frac{P_{n_\nu}(\xi)}{c^{n_\nu}\,\delta^{n_\nu}(\xi)} \right\}^{\frac{p}{2}} - \mu^{\frac{p}{2}}(\xi) \right|^2 d\sigma(s) = 0; \tag{7.2}$$

отсюда следует, что из подпоследовательности $\{n_\nu\}$ можно выделить новую подпоследовательность $\{n_k\}$, для которой имеем

$$\lim_{k\to\infty} \left\{ \frac{P_{n_k}(\xi)}{c^{n_k}\,\delta^{n_k}(\xi)} \right\}^{\nu} = \mu(\xi) \tag{7.3}$$

почти всюду на множестве F точек роста функции $\sigma(s)$; покажем, что отсюда вытекает неравенство

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{h_{n_k}}{c^{n_k}} > 0 \tag{7.4}$$

и, следовательно, справедливость утверждения III.

Если бы мы имели

$$\lim_{k\to\infty} \frac{h_{n_k}}{c^{n_k}} = 0, \tag{7.5}$$

то по (6.22) из $\{n_k\}$ можно было бы выделить подпоследовательность $\{n_r\}$, для которой почти всюду на множестве F имели бы

$$\lim_{r\to\infty} \left\{ \frac{P_{n_r}(\xi)}{c^{n_r}\,\delta^{n_r}(\xi)} \right\} = 0, \qquad \xi = \xi(s); \tag{7.6}$$

сопоставление (7.6) с (7.3) приводит к противоречию, ибо функция $\mu(\xi)$ по условию не эквивалентна нулю.

Для вывода V из I заметим, что по (6.23) имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_C \left| \left\{ \frac{P_n(\xi)}{c^n\,\delta^n(\xi)} \right\}^{\frac{p}{2}} - \lambda^{\frac{p}{2}}(\xi) \right|^2 \sigma'(s)\,|d\xi| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_C \left| \left\{ \frac{P_n(\xi)\,\Delta(\infty)}{c^n\,\delta^n(\xi)\,\Delta(\xi)} \right\}^{\frac{p}{2}} - 1 \right|^2 \sigma'(s) \left| \frac{\Delta(\xi)}{\Delta(\infty)} \right|^p |d\xi| = \tag{7.7}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| \left\{ \frac{P_n(e^{i\Theta})\,D_1(\infty)}{c^n\,e^{in\Theta}\,D_1(e^{i\Theta})} \right\}^{\frac{p}{2}} - 1 \right|^2 \tau'(\Theta) \left| \frac{D_1(e^{i\Theta})}{D_1(\infty)} \right|^p d\Theta \leqslant \left(\frac{h_n}{c^n} \right)^p - \left[\frac{1}{\Delta(\infty)} \right]^p,$$

откуда, пользуясь (5.9), находим

$$\lim_{R\to 1+0}\left\{\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{|w|=R}\left|\left\{\frac{P_n[\varphi(w)]D_1(\infty)}{c^n w^n D_1(w)}\right\}^{\frac{p}{2}}-1\right|^2\frac{|dw|}{[D_1(\infty)]^p}\leqslant\left(\frac{h_n}{c^n}\right)^p-\left[\frac{1}{\Delta(\infty)}\right]^p; \tag{7.8}$$

функция

$$\psi_n(w)=\left\{\frac{P_n[\varphi(w)]D_1(\infty)}{c^n w^n D_1(w)}\right\}^{\frac{p}{2}}-1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^{(n)}}{w^k} \tag{7.9}$$

регулярна в области $|w|>1$ и принадлежит классу H_2; мы имеем, таким образом, из (7.9) и (7.8)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_k^{(n)}\right|^2\leqslant\left\{\frac{h_n\Delta(\infty)}{c^n}\right\}^p-1; \tag{7.10}$$

с другой стороны, для $|w|>1$ мы имеем, пользуясь неравенством Буняковского - Шварца

$$\left|\psi_n(w)\right|^2\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|w|^{-2k}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_k^{(n)}\right|^2\leqslant\frac{1}{|w|^2-1}\left[\left\{\frac{h_n\Delta(\infty)}{c^n}\right\}^p-1\right]. \tag{7.11}$$

Пользуясь (5.18) и (5.15), находим

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(w)=0 \tag{7.12}$$

равномерно для $|w|\geqslant r>1$; отсюда, пользуясь (7.9), получаем V.

Для вывода III из V достаточно заметить, что III вытекает даже из соотношения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_n(\infty)}{h_n\delta^n(\infty)}<+\infty, \tag{7.13}$$

ибо мы имеем

$$\frac{P_n(\infty)}{h_n\delta^n(\infty)}=\frac{c^n}{h_n}. \tag{7.14}$$

Примечание 7.1. В том частном случае, когда функция $\sigma(s)$ абсолютно непрерывна, теорему 5.1 можно сформулировать следующим образом:

если полиномы $\left\{P_n(\xi)=\xi^n+\ldots\right\}_0^{\infty}$ минимизируют интегралы

$$h_n^{(p)}=\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_C\left|P_n(\xi)\mu(\xi)\right|^p\left|\delta'(\xi)\,d\xi\right|\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_C\left|\mu(\xi)(\xi^n+\cdots)\right|^p|\delta'(\xi)\,d\xi|\right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{7.15}$$

где $\mu[\varphi(w)] \in A$, то независимо от p и от функции $\mu(x)$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_n^{(p)}}{c^n} = 1. \tag{7.16}$$

Этот результат является распространением на случай аналитических контуров результатов, полученных акад. С. Н. Бернштейном [14] для того случая, когда C—отрезок вещественной оси.

Примечание 7.2. В том частном случае, когда в предыдущем утверждении функция $\frac{\delta^n(x)}{\mu(x)}$ является полиномом степени n относительно x, мы можем указать не только асимптотическое, но и точное решение нашей задачи; в этом случае имеем

$$h_n^{(p)} = c^n, \qquad P_n(x) = \frac{[c\,\delta(x)]^n}{\mu(x)}; \tag{7.17}$$

в частности, это всегда имеет место, если C — окружность $|w| = 1$, а функция $\mu(w)$ такова (см. [15])

$$\mu(w) = \frac{1}{q(w)}, \qquad q(w) = \sum_{k=0}^{s} \frac{\alpha_k}{w^k}, \qquad \alpha_0 = 1; \tag{7.18}$$

в этом случае при $n \geqslant s$ имеем

$$h_n^{(p)} = 1; \qquad P_n(w) = w^n q(w) = w^{n-s} \sum_{k=0}^{s} \alpha_k w^{s-k}. \tag{7.19}$$

Примечание 7.3. При доказательстве теоремы 5.1 мы считали C аналитической кривой Жордана — на этом был основан вывод соотношения (6.2); однако все наши выводы справедливы, если C — спрямляемая кривая Жордана, обладающая тем свойством, что функция $\delta^n(\xi)$ может быть аппроксимирована на ней полиномом степени n с погрешностью $o(1)$, т. е.

$$|\delta^n(\xi) - f_n(\xi)| = |g_n(\xi) - f_n(\xi)| = o(1), \qquad \xi \in C. \tag{7.20}$$

П. Коровкин в своей работе [20] рассматривает тот случай, когда C — гладкая спрямляемая кривая Жордана, причём угол $\varphi = \varphi(s)$ касательной с осью абсцисс удовлетворяет условию Липшица

$$|\varphi(s_2) - \varphi(s_1)| < L|s_2 - s_1|^\alpha, \qquad 0 < \alpha \leqslant 1; \tag{7.21}$$

он показывает, что в этом случае полиномы Фабера $\Phi_n(x)$ для области G обладают следующим свойством

$$\frac{\Phi_n(x)}{c^n} = \delta^n(x) + \alpha_n[\delta(x)], \qquad \Phi_n(x) = x^n + \ldots, \qquad |\delta(x)| \geqslant 1, \tag{7.22}$$

причём

$$\alpha_n[\delta(x)] = O\left(\frac{1}{n^{\alpha_1}}\right), \quad 0<\alpha_1<\alpha; \quad |\delta(x)|\geqslant 1; \tag{7.23}$$

на основании (7.20) можно утверждать, что все наши выводы справедливы для гладкой спрямляемой кривой Жордана, удовлетворяющей условию (7.21).

§ 8. Выведем ещё одно асимптотическое свойство полиномов $\{P_n(\xi)\}$. Введём в рассмотрение функции[1]

$$\rho_n(x) = \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{P_k(x)}{h_k}\right|^p\right\}^{-\frac{1}{p}}, \quad (n=1,2,\ldots), \tag{8.1}$$

и докажем следующую теорему:

Теорема 8.1. При условии (5.17) имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\int_C\left|\{\rho_n(\xi)\}^{-p} - \lambda_0^p(\xi)\right| d\sigma(s)=0, \quad \lambda_0(\xi)=\lambda(\xi)\Delta(\infty), \tag{8.2}$$

т. е. имеет место сильная сходимость (в смысле метрики L_σ^1)

$$\{\rho_n(\xi)\}^{-p} \twoheadrightarrow |\lambda_0(\xi)|^p, \tag{8.3}$$

где функция $\lambda_0(\xi)$ определяется следующим образом

$$\lambda_0(\xi) = \begin{cases}\Delta(\xi), & s\in E,\\ 0, & s\,\bar{\in}\, E;\end{cases} \tag{8.4}$$

ещё иначе

$$\lim_{n\to\infty}\int_C\left|\frac{\sigma'(s)}{[\rho_n(\xi)]^p}-1\right| |d\xi| = 0, \tag{8.5}$$

т. е. имеет место сильная сходимость (в смысле метрики L)

$$\sigma'(s)\{\rho_n(\xi)\}^{-p} \twoheadrightarrow 1. \tag{8.6}$$

Для доказательства введём обозначение

$$\left(\frac{c^n}{h_n}\right)^{\frac{p}{2}} = [\Delta(\infty)]^{\frac{p}{2}} - \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n>0, \quad (n=1,2,\ldots); \tag{8.7}$$

пользуясь обозначением (1.2) и равенством (6.23), имеем

$$\left\|\left\{\frac{P_n(\xi)}{h_n\delta^n(\xi)}\right\}^{\frac{p}{2}} - \left\{\frac{c^n}{h_n}\lambda(\xi)\right\}^{\frac{p}{2}}\right\|_\sigma^2 = \sqrt{1-\left\{\frac{c^n}{h_n\Delta(\infty)}\right\}^p}, \tag{8.8}$$

[1] Свойства функций $\rho_n(x)$ в том случае, когда $p=2$, а C — отрезок $[-1,+1]$, или единичная окружность, играют роль при изучении асимптотики кристоффелевых чисел.

откуда, пользуясь (8,7), находим

$$\left\| \left\{ \frac{P_n(\xi)}{h_n \delta^n(\xi)} \right\}^{\frac{p}{2}} - \lambda_0^{\frac{p}{2}}(\xi) + \varepsilon_n \lambda^{\frac{p}{2}}(\xi) \right\|_\sigma^2 = \sqrt{\frac{2\varepsilon_n \left[\Delta(\infty)\right]^{\frac{p}{2}} - \varepsilon_n^2}{[\Delta(\infty)]^p}}. \tag{8.9}$$

Пользуясь очевидным неравенством

$$\| x \|_\sigma^2 \leqslant \| x + y \|_\sigma^2 + \| y \|_\sigma^2, \tag{8.10}$$

получаем из (8.9)

$$\left\| \left\{ \frac{P_n(\xi)}{h_n \delta^n(\xi)} \right\}^{\frac{p}{2}} - \lambda_0^{\frac{p}{2}}(\xi) \right\|_\sigma^2 \leqslant \sqrt{\frac{2\varepsilon_n \left[\Delta(\infty)\right]^{\frac{p}{2}} - \varepsilon_n^2}{[\Delta(\infty)]^p}} + \varepsilon_n \left\| \lambda^{\frac{p}{2}}(\xi) \right\|_\sigma^2. \tag{8.11}$$

Мы имеем далее

$$\left\| \left| \frac{P_n(\xi)}{h_n} \right|^p - \left| \lambda_0(\xi) \right|^p \right\|_\sigma^1 =$$

$$= \left\| \left\{ \left| \frac{P_n(\xi)}{h_n} \right|^{\frac{p}{2}} - \left| \lambda_0(\xi) \right|^{\frac{p}{2}} \right\} \cdot \left\{ \left| \frac{P_n(\xi)}{h_n} \right|^{\frac{p}{2}} + \left| \lambda_0(\xi) \right|^{\frac{p}{2}} \right\} \right\|^1 \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \left| \frac{P_n(\xi)}{h_n} \right|^{\frac{p}{2}} - \left| \lambda_0(\xi) \right|^{\frac{p}{2}} \right\|_\sigma^2 \cdot \left\| \left| \frac{P_n(\xi)}{h_n} \right|^{\frac{p}{2}} + \left| \lambda_0(\xi) \right|^{\frac{p}{2}} \right\|_\sigma^2 \leqslant \tag{8.12}$$

$$\leqslant \left\| \left\{ \frac{P_n(\xi)}{h_n \delta^n(\xi)} \right\}^{\frac{p}{2}} - \lambda_0^{\frac{p}{2}}(\xi) \right\|_\sigma^2 \cdot \left[\left\{ \left\| \frac{P_n(\xi)}{h_n} \right\|_\sigma^p \right\}^p + \left\{ \left\| \lambda_0(\xi) \right\|_\sigma^p \right\}^p \right];$$

пользуясь (8.11) и (8.12), находим

$$\left\| \left| \frac{P_n(\xi)}{h_n} \right|^p - \left| \lambda_0(\xi) \right|^p \right\|_\sigma^1 \leqslant \left\{ \sqrt{\frac{2\varepsilon_n \left[\Delta(\infty)\right]^{\frac{p}{2}} - \varepsilon_n^2}{[\Delta(\infty)]^p}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon_n}{\left[\Delta(\infty)\right]^{\frac{p}{2}}} \right\} \cdot 2 = \varepsilon_n'. \tag{8.13}$$

Отсюда легко находим

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{P_k(\xi)}{h_k} \right|^p - \left| \lambda_0(\xi) \right|^p \right\|_\sigma^1 \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \left| \frac{P_k(\xi)}{h_k} \right|^p - \right.$$

$$\left. - \left| \lambda_0(\xi) \right|^p \right\|_\sigma^1 \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k'; \tag{8.14}$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n' = 0$, то окончательно находим

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_C \left| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{P_k(\xi)}{h_k}\right|^p - \left|\lambda_0(\xi)\right|^p \right| d\sigma(s) = 0, \tag{8.15}$$

откуда легко вывести (8.5) и (8.6).

Примечание 8.1. В том частном случае, когда $p = 2$, а C — единичная окружность, мы видим, что при условии

$$\int\limits_0^{2\pi} \lg \sigma'(\Theta)\, d\Theta > -\infty \tag{8.16}$$

имеем по (8.5)

$$\frac{\sigma'(\Theta)}{\left[\rho_n\left(e^{i\Theta}\right)\right]^2} \ggg 1; \tag{8.17}$$

если же функция $\sigma(\Theta)$ абсолютно непрерывна, а функция $\sigma'(\Theta)$ непрерывна, то, воспроизводя рассуждения Н. И. Ахиезера [19], имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\rho_n\left(e^{i\Theta}\right)\right]^2 \leqslant \sigma'(\Theta); \tag{8.18}$$

если же, кроме того, $\sigma'(\Theta) \geqslant m > 0$ на всём отрезке $[0, 2\pi]$, то по [19] существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \left[\rho_n\left(e^{i\Theta}\right)\right]^2 = \sigma'(\Theta). \tag{8.19}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Смирнов, Работы В. А. Стеклова о разложениях по ортогональным функциям. Юбилейный сборник АН СССР, ч. 1, стр. 186—213.

2. В. И. Смирнов, Sur la théorie des polynomes orthogonaux à une variable complexe. Журн. Ленинград. Физ.-Математич. Общества, т. II, в. 1, 1928 г., стр. 155—179.

3. А. Н. Колмогоров, Стационарные последовательности в Гильбертовом пространстве. Бюллетень МГУ, Математика, т. II, вып. 6, 1941 г.

4. А. Н. Колмогоров, Интерполирование и экстраполирование случайных стационарных последовательностей. Известия АН СССР, сер. матем. т. 5, № 1, 1941 г., стр. 3—14.

5. М. Г. Крейн, Об одном обобщении исследований G. Szegö, В. И. Смирнова и А. Н. Колмогорова. Доклады АН СССР, т. XLVI № 3, 1945 г., стр. 95—98.

6. Н. И. Ахиезер, Об одном предложении А. Н. Колмогорова и одном предложении М. Г. Крейна. Доклады АН СССР, т L № 1; 1945 г., стр 35—39.

7. Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации. Москва, 1947 г.

8. И. И. Привалов, Граничные свойства однозначных аналитических функций. Москва, 1941 г.

9. М. Г. Крейн и М. А. Красносельский, Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов и некоторые их применения к теории ортогональных полиномов и проблеме моментов. Успехи Математических Наук, т. II, вып. 3 (19), 1947 г., стр. 60—106.

10. G. Szegö, A problem concerning orthogonal polynomials. Trans. Amer. Math. Soc., т. 37, № 1, 1935 г., стр. 196—206.

11. G. Szegö, Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören. Math. Zeitschrift, т. 9, № 3-4, 1921 г., стр. 218—270.

12. G. Szegö, Orthogonal polynomials. New-York—1939 г.

13. S. Verblunsky, On positive harmonic functions. II Proc. Lond. Math. Soc., т. 4, 1925, стр. 290—320.

14. С. Н. Бернштейн, О многочленах, ортогональных в конечном интервале. Харьков, 1937 г.

15. Я. Л. Геронимус, On some extremal properties of polynomials on the unit-circle. *Журнал Інституту Математ.* АН УРСР, № 4, 1936 г., стр. 21-31.

16. П. П. Коровкин, Асимптотическое выражение полиномов, ортогональных на спрямляемом контуре. Доклады АН СССР, т. XXVII, № 6, 1940 г., стр. 531—534.

17. Я. Л. Геронимус, Полиномы, ортогональные на круге, и их приложения. Записки Научно-Исследовательского Института Математики и Механики, т. XIX, 1948 г., стр. 35—120.

18. L. Fejér, Über die Lage der Nullstellen der Polynomen die aus Minimumforderungen gewisser Art entspringen. Math. Annalen, т. 85, 1922 г., стр. 41—48.

19. Н. И. Ахиезер, Про одну теорему акад. С. Н. Бернштейна відносно квадратурної формули П. Чебишова. Журнал інституту математики Акад. Наук УРСР, № 3, 1937 г., стр. 75—82.

20. П. П. Коровкин, О полиномах, ортогональных по спрямляемому контуру при наличии веса. Математический Сборник, т. 9 (51) 1941 г., стр. 469—488.