Министерство образования и науки Украины
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ

методические указания к решению задач
по кинематике материальной точки для студентов биологического, химического и физического факультетов

Харьков 2005

УДК 53
ББК 22.3
Т 70

Горбач В. Н., Таранова И. А. Методика решения задач по общей физике. Методические указания к решению задач по кинематике материальной точки для студентов биологического, химического и физического факультетов: Учебное пособие. Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2005. – 44 с.

В учебном пособии рассмотрены методы решения различных типов задач по кинематике материальной точки. Пособие также содержит краткое теоретическое введение и набор задач различных уровней сложности для самостоятельной работы студентов.
Пособие предназначено для студентов биологического, химического и физического факультетов Харьковского национального университета.

В учбовому посібнику розглянуті методи розв'язання різних типів задач з кінематики матеріальної точки. Посібник також містить короткий теоретичний вступ та набір задач різних ступенів складності для самостійної роботи студентів.
Посібник призначено для студентів біологічного, хімічного та фізичного факультетів Харківського національного університету.

Рецензенты:
Кармазин В. В., канд. физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой естественных наук Харьковского национального университета радиоэлектроники,
Мацокин В. П., доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры физики кристаллов физического факультета ХНУ.

Рекомендовано методической комиссией физического факультета ХНУ
(протокол № 3 от 17.03.05)

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ФОРМУЛЫ. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ЗАДАЧ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Механическим движением тела называется изменение его положения в пространстве с течением времени. Изменение положения тела в пространстве может быть определено только по отношению к каким-либо телам. Поэтому любые движения относительны (т. е. определены только по отношению к *заданным* телам). *Тело, которое служит для определения движения тел, называется телом отсчета.*

Материальной точкой называется тело, размерами которого можно пренебречь в данной задаче. Абсолютные размеры тела при этом могут быть любыми. Важно другое – размеры тела должны быть значительно меньше характерного параметра движения.

Совокупность точек пространства, последовательно проходимых движущейся материальной точкой, образует линию, которая называется траекторией движения этой материальной точки.

Для аналитического определения положения тела в пространстве с телом отсчета связывают систему координат. Систем координат достаточно много: декартова прямоугольная, декартова косоугольная, полярная, сферическая, цилиндрическая, эллиптическая и т. д. Выбирается обычно та, в которой наиболее просто описывается движение материальной точки.

В бескоординатной форме положение материальной точки в пространстве задается радиус-вектором. *Радиус-вектором точки называется вектор, начало которого совпадает с телом отсчета (с точкой начала системы координат), а конец – с рассматриваемой материальной точкой.*

Если с телом отсчета связана прямоугольная система координат, то радиус-вектор можно представить в виде $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы направлений (орты); x, y, z – координаты точки.

Движение материальной точки описывается кинематическим законом

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

или, в координатном виде,

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t).$$

Скорость $\vec{\mathrm{v}}(t)$ и ускорение $\vec{a}(t)$ материальной точки определяются формулами:

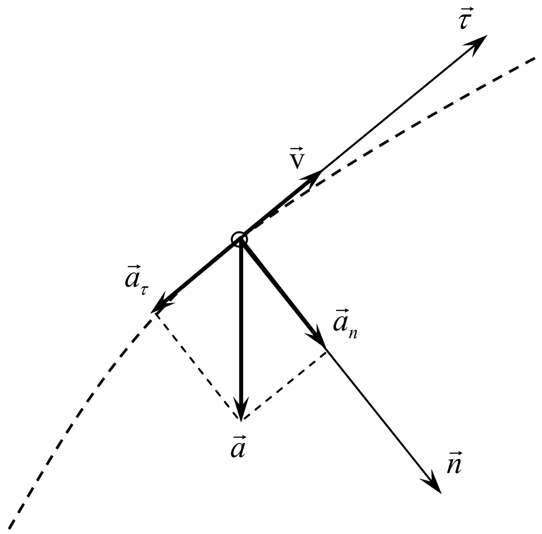
$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt}; \quad \vec{a} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

или, в координатной форме,

$$\mathrm{v}_x = \frac{dx}{dt},\ \mathrm{v}_y = \frac{dy}{dt},\ \mathrm{v}_z = \frac{dz}{dt};$$

$$a_x = \frac{d\mathrm{v}_x}{dt},\ a_y = \frac{d\mathrm{v}_y}{dt},\ a_z = \frac{d\mathrm{v}_z}{dt}.$$

При криволинейном движении тела удобно пользоваться прямоугольной системой координат, связанной с мгновенным положением тела на линии траектории. Вводятся две оси, определяемые единичными векторами $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$. Ось, определяемая единичным вектором $\vec{\tau}$, направлена вдоль скорости $\vec{\mathrm{v}}$ тела в данный момент времени. Ось, определяемая единичным вектором $\vec{n}$, направлена вдоль главной нормали к вектору скорости $\vec{\mathrm{v}}$ тела в данный момент времени, т. е. направлена перпендикулярно скорости в сторону максимальной кривизны траектории тела в данный момент времени. Полное ускорение материальной точки можно теперь представить как векторную сумму двух ускорений: $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$:



$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau,$$

где: $\vec{a}_n$ – нормальное ускорение материальной точки, $\vec{a}_\tau$ – тангенциальное ускорение материальной точки.

Нормальное ускорение точки $\vec{a}_n$ *– это составляющая полного ускорения точки вдоль главной нормали к траектории при разложении полного ускорения по направлениям* $\vec{\tau}$ *и* $\vec{n}$. Нормальное ускорение характеризует быстроту изменения направления вектора скорости и по модулю равно

$$a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{R},$$

где R – радиус кривизны траектории в этой точке.

В случае движения тела по окружности радиуса R нормальное ускорение называют еще центростремительным.

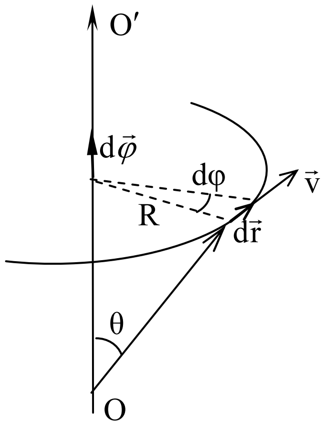
Тангенциальное (касательное) ускорение $\vec{a}_\tau$ *– это составляющая полного ускорения точки вдоль касательной к траектории (вдоль скорости) при разложении полного ускорения по направлениям* $\vec{\tau}$ *и* $\vec{n}$. Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения модуля вектора скорости и по модулю равно

$$a_\tau = \frac{d|\vec{\mathrm{v}}|}{dt}.$$

Величина полного ускорения будет равна

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{d\mathrm{v}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{v}^2}{R}\right)^2}\ .$$

При описании вращательного движения материальной точки или твердого тела вокруг неподвижной оси удобно пользоваться векторными величинами (угловое перемещение, угловая скорость, угловое ускорение), совпадающими по направлению с осью вращения. Такие векторные величины называются аксиальными.



Пусть материальная точка за время dt совершает поворот вокруг неподвижной оси OO' на бесконечно малый угол dφ. Соответствующий угол поворота можно охарактеризовать вектором $d\vec{\varphi}$. Модуль этого вектора будет равен углу поворота dφ, а направление определяется по правилу правого винта: если винт вращать в сторону увеличения φ, то направление движения винта должно совпадать с вектором $d\vec{\varphi}$. Обратите внимание, что только бесконечно малое угловое перемещение является вектором, конечное угловое перемещение не является векторной величиной.

Вектор угловой скорости определяется как

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Вектор $\vec{\omega}$ совпадает по направлению с вектором $d\vec{\varphi}$ и также представляет собой аксиальный вектор.

Вектор углового ускорения определяется как

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Направление вектора $\vec{\beta}$ совпадает с направлением $d\vec{\omega}$ – приращением вектора угловой скорости $\vec{\omega}$.

Линейные и угловые величины при движении материальной точки по окружности связаны следующим образом:

$$\vec{\mathrm{v}} = [\vec{\omega}\vec{r}], \quad \vec{a} = [\vec{\beta}\vec{r}] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}]],$$

$$\mathrm{v} = \omega R, \quad |\vec{a}_\tau| = \beta R, \quad a_n = \omega^2 R, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\beta^2 + \omega^4}\ .$$

В кинематике движение тел изучается формально, без учета масс материальных точек и действующих на эти материальные точки сил. Основные понятия, используемые в кинематике: закон движения, координата, скорость, ускорение, траектория. Положение тел относительно выбранной системы координат описывается радиус-вектором $\vec{r}$ или, в координатной форме, проекцией радиус-вектора на координатные оси. Со временем положение точки меняется. И если известна зависимость радиус-вектора от времени, то, вычисляя первую и вторую производные по времени, легко получить зависимости от времени скорости и ускорения материальной точки. *Поэтому зависимость радиус-вектора от времени называется законом движения материальной точки.* Задачу, связанную с нахождением кинематических параметров движения по известному закону движения, называют прямой задачей кинематики.

Обратная задача кинематики состоит в определении закона движения материальной точки по какому-либо известному параметру движения (вектору скорости или ускорения).

Решение прямых задач кинематики особых затруднений у студентов обычно не вызывает. В этом случае, как правило, закон движения удобнее записывать в координатном виде и придерживаться следующего порядка действий.

1. Внимательно прочитать условие задачи и сделать предварительный физический анализ задачи: записать и осмыслить данные и искомые величины; выяснить связь между ними; сделать чертеж (схему), обозначив на нем все данные и искомые величины; выбрать систему координат.
2. Для каждого тела записать начальные условия: координаты каждого тела в начальный момент времени (момент начала движения какого-либо тела; начало движений остальных тел должны быть синхронизированы по отношению к выбранному телу), проекции скоростей и ускорений в начальный момент времени для каждого тела.
3. Записать уравнения движения в векторном и скалярном виде для каждого тела для выбранной системы координат, используя начальные условия.
4. Провести анализ полученных уравнений движения: составляют ли они полную систему уравнений, достаточных для нахождения неизвестных величин, или необходимо найти недостающие уравнения. Это могут быть условия кинематических связей, конкретные условия задачи и т. д.

   Если начальные условия заданы, то неизвестные проекции векторов скорости и ускорения находят путем последовательного дифференцирования.
5. Аналитически решить полученную систему уравнений.
6. Согласовать единицы измерений всех величин и рассчитать численные значения всех неизвестных величин.

Нахождение закона движения по заданным функционально векторам скорости и ускорения (обратная задача кинематики), как правило, оказывается гораздо более трудной задачей. В этих случаях приходится применять интегрирование, т. е. решать дифференциальные уравнения. В пособии рассмотрены задачи, которые решаются наиболее простым способом – методом разделения переменных.

Если уравнение движения содержит только две переменные, то иногда путем алгебраических действий можно преобразовать уравнение так, что в левой и правой частях уравнения соберутся переменные только одного вида. Дальнейшее решение сводится к вычислению интегралов обоих частей уравнения.

Если же уравнение движения содержит более двух переменных, то нужно найти дополнительные соотношения, с помощью которых можно уменьшить число переменных до двух, а затем попробовать разделить переменные. Наиболее часто в кинематике с этой целью используется соотношение $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.

Например, если тело движется вдоль оси OX и его скорость зависит только от времени, то данное соотношение можно представить в виде $dx = \text{v}dt$. Подставив в это выражение скорость как функцию от времени, получают дифференциальное уравнение с разделенными переменными:

$$dx = \text{v}(\text{t})\,dt.$$

Проинтегрировав левую и правую части уравнения, получают закон движения тела:

$$x = \int \text{v}(t)dt + C.$$

Постоянную интегрирования C определяют из начальных условий.

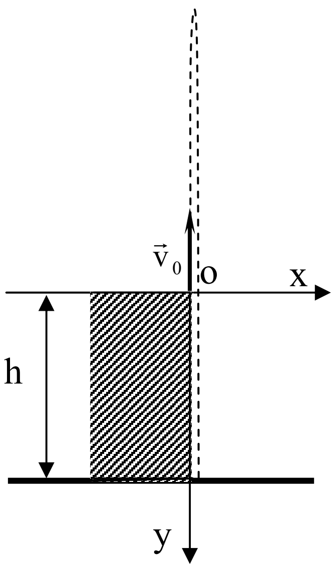
Если же скорость зависит только от координаты, то, использовав это же соотношение, получают уравнение с разделенными переменными вида:

$$dt = \frac{dx}{\text{v}(x)}.$$

После интегрирования получают закон движения материальной точки в неявном виде:

$$t = \int \frac{dx}{\text{v}(x)} + C.$$

Постоянную интегрирования, как и прежде, определяют из начальных условий.



ЗАДАЧА 1. С вершины утеса высотой 65 м брошен вертикально вверх камень со скоростью 10 м/с. Через какое время камень достигнет основания утеса? Какова его скорость перед ударом о землю?

АНАЛИЗ

При решении кинематических задач используются в основном два типа уравнений:

а) кинематические уравнения движения (зависимости координат тела от времени):

$$x = x_0 + \mathrm{v}_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2},$$

$$y = y_0 + \mathrm{v}_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

б) зависимости проекций скорости тела от времени:

$$\mathrm{v}_{\mathrm{kx}} = \mathrm{v}_{0x} + a_x t,$$

$$\mathrm{v}_{\mathrm{ky}} = \mathrm{v}_{0\mathrm{y}} + a_y t.$$

Здесь x_0, y_0 – координаты тела в начальный момент времени t = 0, $\mathrm{v}_{0\mathrm{x}}, \mathrm{v}_{0\mathrm{y}}$ – проекции вектора скорости в начальный момент времени, a_x, a_y – проекции вектора ускорения тела, $\mathrm{v}_{\mathrm{kx}}, \mathrm{v}_{\mathrm{ky}}$ – проекции вектора скорости в момент времени t.

Напомним, что эти уравнения справедливы лишь для равнопеременного движения.

Для того чтобы воспользоваться приведенными выше уравнениями, выберем на рисунке начало координат, направления координатных осей и определим в соответствии с нашим рисунком постоянные коэффициенты в этих уравнениях.

Выбор точки, с которой свяжем систему координат, так же как и выбор направлений координатных осей, принципиальной роли не играет.

Допустим, начало координат будет находиться в точке, откуда начал свое движение камень, а ось OY направим вниз. Тогда

$$y_0 = 0, \qquad \mathrm{v}_{0\mathrm{y}} = -\mathrm{v}_0, \qquad a_y = g.$$

Следовательно, для данной системы отсчета уравнение движения будет иметь вид

$$y = -\mathrm{v}_0 t + \frac{gt^2}{2}.$$

В момент времени $t = t_0$ камень окажется у основания утеса. В этот момент времени координата камня y будет равна h. Следовательно, имеем

$$h = -\mathrm{v}_0 t_0 + \frac{g t_0^2}{2}.$$

Это уравнение дает возможность найти время движения камня. Скорость камня перед ударом о землю можно найти из зависимости скорости камня от времени.

РЕШЕНИЕ

Составим систему уравнений, полученных на основе анализа задачи:

$$\begin{cases} h = -\mathrm{v}_0 t_0 + \dfrac{g t_0^2}{2} \\ \mathrm{v}_k = -\mathrm{v}_0 + g t_0 \end{cases}.$$

Из первого уравнения получим

$$gt_0^2 - 2v_0 t_0 - 2h = 0.$$

Это квадратное уравнение типа $ax^2 + bx + c = 0$, решение которого имеет вид

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Отсюда получим:

$$t_0 = \frac{2v_0 \pm \sqrt{4v_0^2 + 8gh}}{2g} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}.$$

Физический смысл имеет только положительное решение:

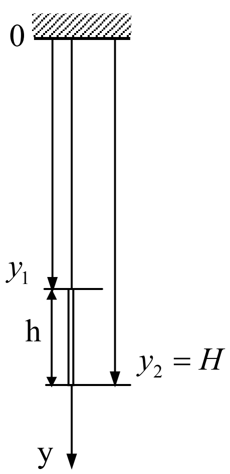
$$t_0 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} = \frac{10 + \sqrt{100 + 2 \cdot 9{,}8 \cdot 65}}{9{,}8} = 4{,}8 \text{ с.}$$

Из второго уравнения системы получим:

$$v_k = -v_0 + gt_0 = -10 + 9{,}8 \cdot 4{,}8 = 37 \text{ м/с.}$$

ЗАДАЧА 2. Мимо окна высотой 2,1 м за 0,30 с пролетает случайно столкнутая с подоконника пепельница. С какой высоты выпала пепельница?

АНАЛИЗ



Для нахождения высоты, с которой выпала пепельница, достаточно воспользоваться кинематическим уравнением движения тела вдоль оси OY:

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

Начало координат совместим с точкой начала движения пепельницы. Ось OY направим вниз. За начало отсчета времени примем момент, когда пепельница начала падение. Тогда

$$y_0 = 0, \qquad v_{0y} = 0, \qquad a_y = g.$$

Следовательно, уравнение движения пепельницы в данной системе отсчета будет выглядеть следующим образом:

$$y = \frac{gt^2}{2}.$$

Спустя t_1 секунд пепельница приблизится к окну наблюдателя, пройдя при этом расстояние y_1. Спустя еще Δt секунд пепельница пролетит окно высотой h, пройдя суммарное расстояние y_2. Высота окна будет равна разности координат тела в моменты времени $t_1 + \Delta t$ и t_1.

РЕШЕНИЕ

На основе анализа задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{gt_1^2}{2} \\ y_2 = \dfrac{g\left(t_1 + \Delta t\right)^2}{2} \\ h = y_2 - y_1 \end{cases}.$$

Решая совместно три уравнения, найдем время t_1:

$$h = y_2 - y_1 = \frac{g}{2}\left(t_1^2 + 2t_1\Delta t + \left(\Delta t\right)^2 - t_1^2\right) = \frac{g}{2}\left(2t_1\Delta t + \left(\Delta t\right)^2\right);$$

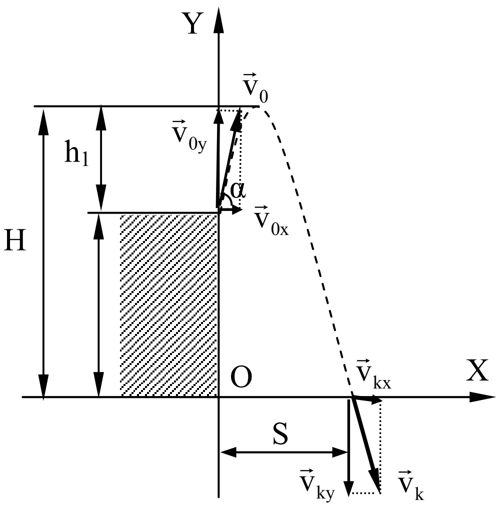
$$t_1 = \frac{h}{g\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} = \frac{2{,}1}{9{,}8 \cdot 0{,}3} - \frac{0{,}3}{2} = 0{,}56\,\text{с}.$$

Отсюда:

$$H = y_2 = \frac{g\left(t_1 + \Delta t\right)^2}{2} = \frac{9{,}8 \cdot \left(0{,}56 + 0{,}3\right)^2}{2} = 3{,}6\,\text{м}.$$

ЗАДАЧА 3. Прыгун в воду отрывается от прыжкового трамплина высотой 5 м и погружается в воду спустя 1,3 с на расстоянии 3 м от края трамплина. Рассматривая прыгуна как материальную точку, определите: а) начальную скорость v_0 прыгуна; б) максимальную высоту, которую он достигает; в) скорость v_k, с которой он погружается в воду.

АНАЛИЗ



Свяжем систему координат с основанием трамплина и проведем координатные оси, как показано на рисунке. (Как упоминалось выше, выбор начала координат и направлений координатных осей – не принципиален).

Движение прыгуна является равнопеременным с ускорением, равным ускорению свободного падения $\vec{g}$ (сопротивлением воздуха пренебрегаем). Прыгун будет двигаться по криволинейной траектории, т. к. ускорение свободного падения направлено под углом к вектору скорости. Такое движение можно рассматривать как сумму двух независимых прямолинейных движений по двум взаимноперпендикулярным направлениям – OX и OY.

Определим коэффициенты в кинематических уравнениях движения прыгуна:

$$\begin{cases} x = x_0 + \mathrm{v}_{0x} t + \dfrac{a_x t^2}{2} \\ y = y_0 + \mathrm{v}_{0y} t + \dfrac{a_y t^2}{2} \end{cases}.$$

Предполагается, что прыгуна можно рассматривать как материальную точку и отсчет времени начинается с момента отрыва прыгуна от трамплина. Из условий задачи для выбранной системы координат получим:

$\left.\begin{matrix} x_0 = 0 \\ y_0 = h \end{matrix}\right\}$ — координаты прыгуна в момент времени t = 0,

$\left.\begin{matrix} \mathrm{v}_{0x} = \mathrm{v}_0 \cos\alpha \\ \mathrm{v}_{0y} = \mathrm{v}_0 \sin\alpha \end{matrix}\right\}$ — проекции скорости прыгуна на координатные оси в момент времени t = 0,

$\left.\begin{matrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{matrix}\right\}$ — проекции ускорения.

Следовательно, составляющими движениями являются: равномерное движение вдоль оси OX с постоянной скоростью $\mathrm{v}_{kx} = \mathrm{v}_0 \cos\alpha$ и равнопеременное движение вдоль оси OY с начальной скоростью $\mathrm{v}_{0y} = \mathrm{v}_0 \sin\alpha$ и ускорением $a_y = -g$.

Таким образом, кинематические уравнения движения будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha \cdot t & (1) \\ y = h + v_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}. & (2) \end{cases}$$

Начальную скорость прыгуна можно определить из этих уравнений, учтя, что в момент приводнения прыгуна через t_0 секунд его координаты будут равны соответственно: x = s, y = 0.

Для определения скорости прыгуна в момент касания воды воспользуемся зависимостями проекций скорости от времени:

$$\begin{cases} v_{kx} = v_{0x} + a_x t \\ v_{ky} = v_{0y} + a_y t \end{cases}.$$

С учетом начальных условий получим

$$\begin{cases} v_{kx} = v_0 \cos\alpha & (3) \\ v_{ky} = v_0 \sin\alpha - gt_0 & (4) \end{cases}.$$

Определив составляющие вектора скорости, можно, используя теорему Пифагора, найти модуль вектора скорости прыгуна в момент приводнения, а также, если нужно, угол, под которым прыгун войдет в воду.

Максимальную высоту полета прыгуна можно найти, используя кинематическое уравнение движения по оси OY (2). Но для этого необходимо прежде определить время подлета к этой точке (t_1). Но чем же эта точка отличается от других точек? А тем, что в этой точке вертикальная составляющая вектора скорости равна нулю. Следовательно,

$$v_{ky} = v_0 \sin\alpha - gt_1 = 0.$$

РЕШЕНИЕ

а) Определим начальную скорость прыгуна. Подставив в кинематические уравнения движения прыгуна (1) и (2) его координаты в момент приводнения, получим систему уравнений

$$\begin{cases} s = v_0 \cos\alpha \cdot t \\ 0 = h + v_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}.$$

Приведем уравнения системы к виду

$$\begin{cases} v_0 \cos\alpha = \dfrac{s}{t_0} \\ v_0 \sin\alpha = \dfrac{gt_0}{2} - \dfrac{h}{t_0} \end{cases}.$$

Суммируя квадраты этих уравнений, получим

$$\mathrm{v}_0^2\cos^2\alpha+\mathrm{v}_0^2\sin^2\alpha=\frac{s^2}{t_0^2}+\left(\frac{gt_0}{2}-\frac{h}{t_0}\right)^2.$$

Воспользовавшись соотношением $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$, найдем

$$\mathrm{v}_0=\sqrt{\frac{s^2}{t_0^2}+\left(\frac{gt_0^2-2h}{2t_0}\right)^2},$$

$$\mathrm{v}_0=\sqrt{\frac{9}{(1.3)^2}+\left(\frac{9.8\cdot(1.3)^2-2\cdot5}{2\cdot1.3}\right)^2}=3.4\ \text{м/с}.$$

б) Для нахождения скорости прыгуна в момент его касания воды, воспользуемся выражениями (3) и (4):

$$\begin{cases}\mathrm{v}_k=\sqrt{\mathrm{v}_{kx}^2+\mathrm{v}_{ky}^2}\\ \mathrm{v}_{kx}=\mathrm{v}_0\cos\alpha\\ \mathrm{v}_{ky}=\mathrm{v}_0\sin\alpha-gt_0\end{cases}.$$

Подставив вместо $\mathrm{v}_0\cos\alpha$ и $\mathrm{v}_0\sin\alpha$ полученные для них выше выражения, найдем

$$\mathrm{v}_{kx}=\mathrm{v}_0\cos\alpha=\frac{s}{t_0},$$

$$\mathrm{v}_{ky}=\mathrm{v}_0\sin\alpha-gt_0=\frac{gt_0^2-2h}{2t_0}-gt_0=-\frac{gt_0^2+2h}{2t_0}.$$

Выражение для v_{ky} получилось отрицательным, но это лишь отражение того факта, что скорость прыгуна в момент касания им воды направлена противоположно выбранному положительному направлению оси OY.

Таким образом:

$$\mathrm{v}_k=\sqrt{\frac{s^2}{t_0^2}+\left(\frac{gt_0^2+2h}{2t_0}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{1.3^2}+\left(\frac{9.8\cdot1.3^2+2\cdot5}{2\cdot1.3}\right)^2}=10.47\ \text{м/с}.$$

в) Определим максимальную высоту, которую достигнет прыгун, оторвавшись от трамплина. С учетом того, что в момент времени $t = t_1$ (t_1 – время подлета к точке максимального подъема) $y = H$, а $\mathrm{v}_{ky} = 0$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} H = h + \mathrm{v}_0 \sin\alpha \cdot t_1 - \dfrac{gt_1^2}{2} \\ 0 = \mathrm{v}_0 \sin\alpha - gt_1 \end{cases}.$$

Из второго уравнения найдем

$$t_1 = \frac{\mathrm{v}_0 \sin\alpha}{g}.$$

Подставив t_1 в первое уравнение, имеем

$$H = h + \frac{\mathrm{v}_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{g\mathrm{v}_0^2 \sin^2\alpha}{2g^2} = h + \frac{\mathrm{v}_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Воспользовавшись ранее полученным выражением $\mathrm{v}_0 \sin\alpha = \dfrac{gt_0^2 - 2h}{2t_0}$, найдем

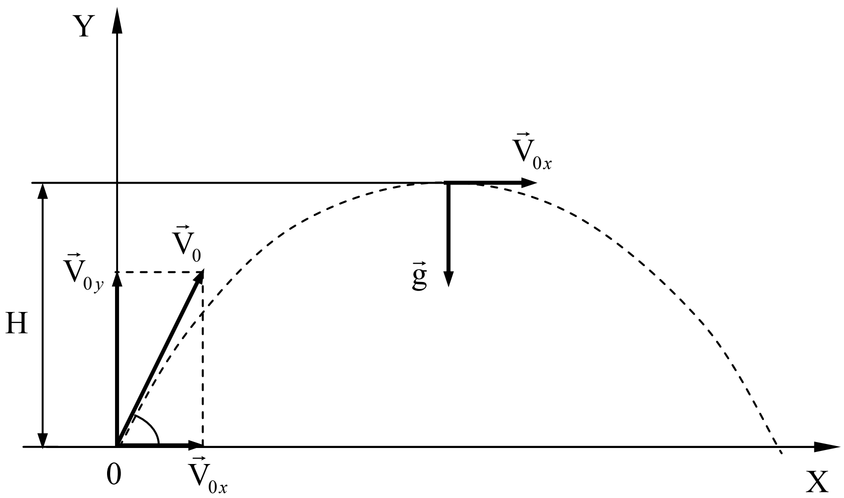
$$H = h + \frac{\left(gt_0^2 - 2h\right)^2}{8gt_0^2}.$$

Таким образом,

$$H = 5 + \frac{\left(9.8 \cdot 1.3^2 - 2 \cdot 5\right)}{8 \cdot 9.8 \cdot 1.3^2} = 5.32 \text{ м}.$$

Следовательно, прыгун подпрыгнул над трамплином на высоту $h_1 = H - h = 0.32$ м.

ЗАДАЧА 4. Наибольшая высота подъема тела, брошенного под углом к горизонту, – 10 м, а радиус кривизны траектории в точке наивысшего подъема – 20 м. Определите начальную скорость тела, а также скорость, радиус кривизны траектории, нормальное и тангенциальное ускорения тела через 1 секунду после бросания.



АНАЛИЗ

В данной задаче тело можно рассматривать как материальную точку. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то на тело во время движения будет действовать только одна сила – сила тяжести, сообщающая телу ускорение $\vec{a} = \vec{g}$.

Поскольку ускорение тела во время движения не меняется, то движение плоское и для его описания достаточно двух осей координат. Это позволяет рассматривать сложное криволинейное движение тела как сумму двух прямолинейных движений вдоль координатных осей.

В условии задачи не заданы величина и направление начальной скорости тела, но, тем не менее, как закон движения тела, так и зависимости проекций скорости тела от времени могут быть записаны.

Учитывая, что максимальная высота подъема тела известна, и тот факт, что в точке максимального подъема вертикальная составляющая скорости тела равна нулю, можно составить систему уравнений, позволяющую определить вертикальную составляющую начальной скорости.

Горизонтальная составляющая скорости не меняется со временем (на тело во время полета действует только сила тяжести и, следовательно, $a_x = 0$). В точке максимальной высоты полная скорость тела будет равна горизонтальной составляющей скорости. И если учесть тот факт, что в этой точке нормальное ускорение равно полному (то есть, $a_n = g$), то, используя связь нормального ускорения с радиусом кривизны, можно определить горизонтальную составляющую начальной скорости.

Зная законы изменения проекций v_{kx} и v_{ky} со временем, можно найти модуль и направление скорости в любой момент времени. Вектор полного ускорения постоянен и известен. Следовательно, для любого момента времени можно определить нормальное и тангенциальное ускорения тела (проекции полного ускорения на направления вдоль скорости и перпендикулярно скорости).

РЕШЕНИЕ

а) Используя проведенный анализ задачи, составим систему уравнений для определения проекций начальной скорости на оси OX и OY. Совместим начало координат с точкой бросания тела. Как видно из рисунка,

$$x_0 = 0,\ \mathrm{v}_{0x} = \mathrm{v}_0 \cos\alpha,\ a_x = 0,$$

$$y_0 = 0,\ \mathrm{v}_{0y} = \mathrm{v}_0 \sin\alpha,\ a_y = -g.$$

С учетом начальных параметров запишем закон движения тела и закон изменения проекции скорости на ось 0Y

$$\begin{cases} y = \mathrm{v}_{0y} t - \dfrac{gt^2}{2} \\ \mathrm{v}_{ky} = \mathrm{v}_{0y} - gt \end{cases}.$$

При $t = t_1$ (t_1 – время подлета к наивысшей точке траектории) $y = H$, $\mathrm{v}_{ky} = 0$. Следовательно,

$$\begin{cases} H = \mathrm{v}_{0y} t_1 - \dfrac{g t_1^2}{2} \\ 0 = \mathrm{v}_{0y} - g t_1 \end{cases}.$$

Решение данной системы уравнений позволяет определить проекцию начальной скорости на ось 0Y:

$$t_1 = \frac{\mathrm{v}_{0y}}{g}, \qquad H = \mathrm{v}_{0y} \cdot \frac{\mathrm{v}_{0y}}{\mathrm{g}} - \frac{\mathrm{v}_{0y}^2}{2g} = \frac{\mathrm{v}_{0y}^2}{2g},$$

$$\mathrm{v}_{0y} = \sqrt{2gH}\,.$$

Теперь определим горизонтальную составляющую начальной скорости тела, используя соотношение $a_n = \dfrac{\mathrm{v}_\mathrm{k}^2}{R}$. Так как в точке максимального подъема тела $a_n = g$ и $\mathrm{v}_\mathrm{k} = \mathrm{v}_{0\mathrm{x}}$, то $\dfrac{\mathrm{v}_{0x}^2}{R} = g$.

Отсюда

$$\mathrm{v}_{0x} = \sqrt{gR}\,.$$

Используя теорему Пифагора, получим

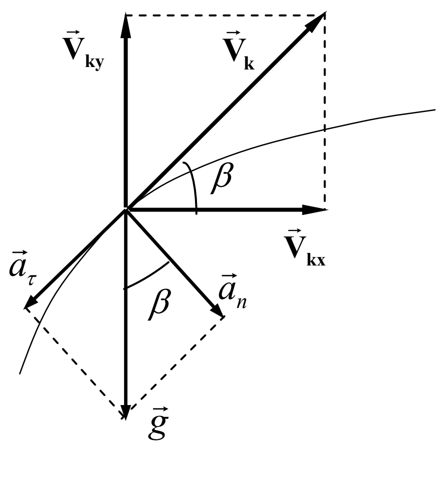
$$\mathrm{v}_0 = \sqrt{\mathrm{v}_{0x}^2 + \mathrm{v}_{0y}^2} = \sqrt{gR + 2gH} = \sqrt{9{,}8\left(20 + 20\right)} = 19{,}8 \text{ м/с.}$$

б) Определим скорость тела через 1 секунду полета. Для этого воспользуемся законом изменения проекций скорости тела со временем.

$$\begin{cases} \mathrm{v}_{kx} = \mathrm{v}_{0x} = \sqrt{gR} \\ \mathrm{v}_{ky} = \mathrm{v}_{0y} - gt = \sqrt{2gH} - gt \end{cases}.$$

Отсюда

$$\mathrm{v}_k = \sqrt{gR + \left(\sqrt{2gH} - gt\right)^2} = \sqrt{9{,}8 \cdot 20 + \left(\sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 10} - 9{,}8 \cdot 1\right)^2} = 14{,}6 \text{ м/с.}$$



в) Найдем нормальное и тангенциальное ускорения тела через одну секунду.

Нормальное ускорение — это проекция полного ускорения на главную нормаль к вектору скорости. Тангенциальное ускорение тела — это проекция полного ускорения на касательную к траектории. Как видно из рисунка,

$$a_n = g\cos\beta\,,\ a_\tau = g\sin\beta\,.$$

С другой стороны (см. рисунок):

$$\cos\beta = \frac{v_{kx}}{v_k}, \quad \sin\beta = \frac{v_{ky}}{v_k}.$$

Следовательно:

$$a_n = g\frac{v_{kx}}{v_k} = \frac{g\sqrt{gR}}{v_k} = \frac{9{,}8\sqrt{9{,}8\cdot 20}}{14{,}6} = 9{,}4 \text{ м/с}^2,$$

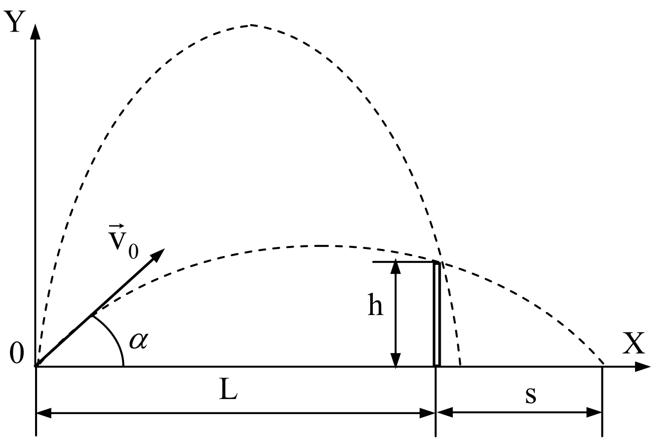
$$a_\tau = g\frac{v_{ky}}{v_k} = \frac{g\left(\sqrt{2gH} - gt\right)}{v_k} = \frac{9{,}8\left(\sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 10} - 9{,}8\cdot 1\right)}{14{,}6} = 2{,}82 \text{ м/с}^2.$$

г) Радиус кривизны траектории через одну секунду.

Из определения нормального ускорения $a_n = \frac{v_k^2}{R}$ получим:

$$R = \frac{v_k^2}{a_n} = \frac{(14{,}6)^2}{9{,}4} = 22{,}7 \text{ м}.$$

ЗАДАЧА 5. С поверхности земли бросают с минимально допустимой скоростью камень через препятствие высотой h на расстоянии L от точки бросания. На каком расстоянии от препятствия камень упадет на землю после перелета через него?



АНАЛИЗ

Очевидно, что неизвестное расстояние от места падения камня до препятствия можно легко определить, если предварительно найти начальную скорость и угол, под которым был брошен камень. Отметим, что независимо от угла бросания при минимальной для этого угла начальной скорости траектория камня должна проходить вплотную к верхней точке препятствия. Начальная же скорость камня будет различной для разных углов бросания. Следовательно, для определения искомой начальной скорости необходимо получить и исследовать функциональную зависимость начальной скорости камня от угла бросания на экстремум.

РЕШЕНИЕ

Начало координат удобно выбрать в точке бросания камня. Направление координатных осей выберем, как показано на рисунке. Определим коэффициенты в кинематических уравнениях движения камня:

$$x_0 = 0, \qquad v_{0x} = v_0 \cos\alpha, \qquad a_x = 0,$$
$$y_0 = 0, \qquad v_{oy} = v_0 \sin\alpha, \qquad a_y = -g.$$

Следовательно, закон движения камня будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha \\ y = v_0 t \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}.$$

Исключив t, найдем уравнение траектории камня:

$$y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}\left(1 + tg^2\alpha\right).$$

Как мы уже говорили, траектория камня обязательно должна проходить через верхнюю точку препятствия, координаты которой x = L, y = h. Отсюда находим:

$$2v_0^2 = \frac{gL^2\left(1 + tg^2\alpha\right)}{Ltg\alpha - h}.$$

Теперь исследуем это уравнение на экстремум:

$$4v_0 v_0' = \frac{2gL^2 tg\alpha}{\cos^2\alpha\left(Ltg\alpha - h\right)} - \frac{gL^2\left(1 + tg^2\alpha\right)L}{\left(Ltg\alpha - h\right)^2 \cos^2\alpha} = 0.$$

Откуда:

$$Ltg^2\alpha - 2htg\alpha - L = 0.$$

Решая это квадратное уравнение относительно $tg\alpha$, получим:

$$tg\alpha = \frac{h \pm \sqrt{h^2 + L^2}}{L} = \frac{h + \sqrt{h^2 + L^2}}{L}.$$

Знак "+" выбран из условия, что $tg\alpha$ не должен быть отрицательным.

Т. о., чтобы преодолеть препятствие с минимальной начальной скоростью, камень должен быть брошен под углом

$$\alpha = \alpha_0 = arctg\left(\frac{h + \sqrt{h^2 + L^2}}{L}\right)$$

и иметь начальную скорость

$$v_0 = v_{0\min} = \sqrt{\frac{gL^2\left(1+tg^2\alpha_0\right)}{2\left(Ltg\alpha_0 - h\right)}} = \sqrt{\frac{g\left[L^2+h^2+h\sqrt{h^2+L^2}\right]}{\sqrt{h^2+L^2}}}.$$

Теперь можно приступить ко второй части задачи: определению расстояния от препятствия до места падения камня.

Воспользуемся уравнением траектории камня:

$$y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}\left(1+tg^2\alpha\right).$$

Подставляя координаты точки приземления камня ($x = L+s$, $y = 0$) в уравнение траектории, получим:

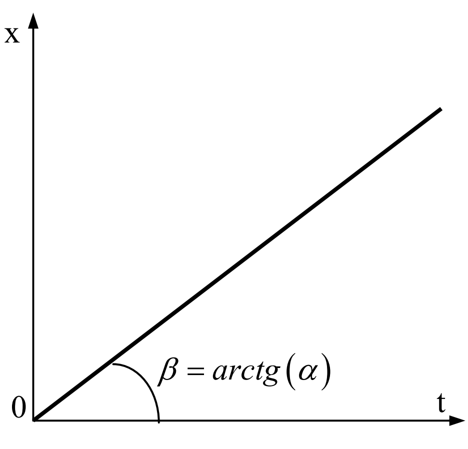
$$\left(L+s\right)tg\alpha_0 - \frac{g\left(L+s\right)^2}{2v_{0\min}^2}\left(1+tg^2\alpha_0\right) = 0,$$

$$L+s = \frac{2v_{0\min}^2 tg\alpha_0}{g\left(1+tg^2\alpha_0\right)} = \frac{2g\left(L^2+h^2+h\sqrt{h^2+L^2}\right)\cdot\left(h+\sqrt{h^2+L^2}\right)}{g\sqrt{h^2+L^2}\cdot L\cdot\left(1+\dfrac{\left(h+\sqrt{h^2+L^2}\right)^2}{L^2}\right)} = \frac{L\left(h+\sqrt{h^2+L^2}\right)}{\sqrt{h^2+L^2}}.$$

Т. о., расстояние от препятствия до точки падения камня равно:

$$s = \frac{L\left(h+\sqrt{h^2+L^2}\right)}{\sqrt{h^2+L^2}} - L = \frac{Lh}{\sqrt{h^2+L^2}}.$$

ЗАДАЧА 6. Точка движется в плоскости XY по закону $x = \alpha t$, $y = \alpha t\left(1-\beta t\right)$, где α и β – положительные постоянные. Найти: а) уравнение траектории точки; изобразить графики $x(t)$, $y(t)$ и траектории точки; б) скорость и ускорение точки в зависимости от времени; в) момент времени t_0, когда угол между скоростью и ускорением равен $\pi/4$.



АНАЛИЗ

В данной задаче рассматривается движение точки в плоскости XOY , т. к. по условию задачи z = 0. Координата x изменяется со временем по линейному закону. График зависимости $x(t)$ имеет вид прямой, проходящей через начало координат. Координата y изменяется по квадратичному закону: $y = -\alpha\beta t^2 + \alpha t$. Видно, что данное уравнение является уравнением параболы с вертикальной осью. Коэффициент перед t^2 отрицателен, поэтому парабола обращена вершиной вверх. Для построения графика необходимо определить характерные точки. В данном случае это координаты вершины параболы и точки пересечения параболы с осью OX.

Уравнение траектории материальной точки можно получить, исключив t из системы уравнений $x(t)$ и $y(t)$. Определив проекции векторов скорости и ускорения последовательным дифференцированием уравнений движения материальной точки, можно найти модули и направления векторов скорости и ускорения в любой момент времени.

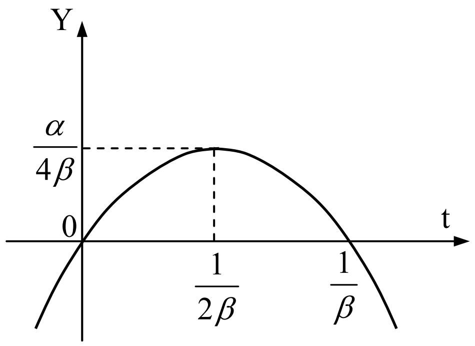
РЕШЕНИЕ

а) Как уже говорилось, зависимость координаты x от времени представляет собой прямую, проходящую через начало координат и имеющую тангенс угла наклона, равный α. График зависимости $x(t)$ приведен на рисунке.

Зависимость $y(t)$ представляет собой параболу. Для построения графика $y(t)$ найдем координаты вершины параболы и точки пересечения параболы с осью OX.

Вершина параболы отвечает точке, где y имеет экстремальное значение. Для определения этой точки приравняем нулю производную $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} = -2\alpha\beta t + \alpha = 0.$$



Отсюда:

$$t_1 = \frac{1}{2\beta}, \quad y(t_1) = \frac{\alpha}{4\beta}.$$

Для определения точек пересечения параболы с осью 0X приравняем нулю y(t):

$$\alpha t - \alpha\beta t^2 = 0.$$

Очевидно, что y(t) = 0 при $t_2 = 0$ и $t_3 = \frac{1}{\beta}$.

График зависимости *y(t)* приведен на рисунке.

Объединяя зависимости $x(t)$ и $y(t)$, получим уравнение траектории точки:

$$y = x - \frac{\beta}{\alpha}x^2.$$

Для построения графика траектории рассчитаем координаты *x* и *y* в наиболее характерных точках зависимостей *x(t)* и *y(t)*. В нашем случае зависимость

$x(t)$ имеет линейный характер. Поэтому график зависимости $y(x)$ будет подобен графику $y(t)$. Меняется только масштаб по оси абсцисс $(x = \alpha t)$. По этой причине координаты характерных точек траектории точки можно записать сразу.

Вершина параболы: $y = \dfrac{\alpha}{4\beta}$, $x = \dfrac{\alpha}{2\beta}$.

Точки пересечения параболой оси ОХ: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_2 = \dfrac{\alpha}{\beta}$, $y_2 = 0$. Сам же график аналогичен графику $y(t)$.

б) Теперь определим компоненты вектора скорости:

$$\mathrm{v}_x = \frac{dx}{dt} = \alpha; \quad \mathrm{v}_y = \frac{dy}{dt} = \alpha(1 - 2\beta t).$$

Отсюда находим модуль вектора скорости и вектор скорости:

$$|\vec{\mathrm{v}}| = \mathrm{v} = \alpha \cdot \sqrt{1 + (1 - 2\beta t)^2};$$

$$\vec{\mathrm{v}} = \alpha \vec{i} + \alpha(1 - 2\beta t)\vec{j}.$$

Ускорение материальной точки найдем аналогично:

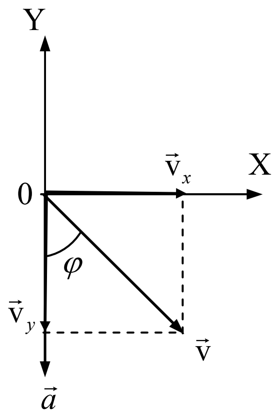
$$a_x = \frac{d\mathrm{v}_x}{dt} = 0; \quad a_y = \frac{d\mathrm{v}_y}{dt} = -2\alpha\beta;$$

$$|\vec{a}| = a = 2\alpha\beta;$$

$$\vec{a} = -2\alpha\beta\vec{j}.$$

Видно, что в любой момент времени вектор ускорения постоянен по величине и направлен по оси ординат вниз.

в) Теперь найдем момент времени, когда угол между вектором скорости и вектором ускорения будет равен $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.



Как видно из рисунка, в этот момент времени $tg\varphi = \dfrac{\mathrm{v}_x}{|\mathrm{v}_y|}$.

Т. к. проекция скорости на ось OY в этот момент времени отрицательна, то $|\mathrm{v}_y| = -\alpha(1 - 2\beta t_0)$.

Таким образом,

$$\frac{v_x}{|v_y|} = \frac{\alpha}{-\alpha(1-2\beta t_0)} = tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Отсюда получим: $t_0 = \dfrac{1}{\beta}$.

ЗАДАЧА 7. Тело движется, замедляясь, по прямой с ускорением, модуль которого зависит от скорости v по закону $a = \alpha\sqrt{v}$, где α – положительная постоянная. В начальный момент времени скорость тела равна v_0. Какой путь тело пройдет до остановки? За какое время этот путь будет пройден?

АНАЛИЗ

Пройденный телом путь можно определить по формуле

$$s = \int_0^{t_0} v\,dt,$$

где t_0 – время движения тела до остановки.

Время t_0 можно найти, зная, что в этот момент скорость тела равна нулю. Таким образом, прежде всего, необходимо выяснить функциональную зависимость скорости тела от времени. Для этого воспользуемся определением ускорения тела и заданной зависимостью ускорения от скорости:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\alpha\sqrt{v}. \qquad (1)$$

Затем, предварительно проведя разделение переменных, следует проинтегрировать обе части уравнения.

РЕШЕНИЕ

Разделяя переменные и интегрируя обе части уравнения (1), получим зависимость скорости тела от времени:

$$\frac{dv}{\sqrt{v}} = -\alpha dt,$$

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v}} = -\int \alpha dt,$$

$$v = \frac{(C-\alpha t)^2}{4}.$$

Постоянную интегрирования C определим из начальных условий: при t = 0 скорость тела была равна v_0. Следовательно,

$$v_0 = \frac{C^2}{4}, \quad C = 2\sqrt{v_0}\ .$$

Окончательное выражение для скорости тела будет иметь вид:

$$v = \frac{\left(2\sqrt{v_0} - \alpha t\right)^2}{4}.$$

Зная, как скорость тела зависит от времени, легко найти время движения тела. В момент остановки скорость тела должна быть равной нулю:

$$0 = \frac{\left(2\sqrt{v_0} - \alpha t_0\right)^2}{4}.$$

Отсюда $$t_0 = \frac{2\sqrt{v_0}}{\alpha}.$$

Теперь определим путь, пройденный телом до остановки:

$$s = \int_0^{t_0} v\,dt = \int_0^{t_0} \frac{\left(2\sqrt{v_0} - \alpha t\right)^2}{4} dt = \int_0^{t_0} \frac{\left(4v_0 - 4\alpha t\sqrt{v_0} + \alpha^2 t^2\right)}{4} dt =$$
$$= \left(\frac{4v_0 t_0}{4} - \frac{4\alpha t_0^2\sqrt{v_0}}{8} + \frac{\alpha^2 t_0^3}{12}\right) = \frac{2v_0\sqrt{v_0}}{3\alpha}.$$

ЗАДАЧА 8. Частица движется в плоскости XOY со скоростью $\vec{v} = \alpha\vec{i} + \beta x\vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – орты осей x и y, α и β – постоянные. В начальный момент частица находилась в точке $x_0 = y_0 = 0$. Найти: а) закон движения частицы $\vec{r} = \vec{r}\left(t\right)$; б) уравнение траектории $y = y\left(x\right)$; в) радиус кривизны траектории в зависимости от координаты x.

РЕШЕНИЕ

Для нахождения закона движения частицы воспользуемся определением скорости материальной точки:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}\ .$$

Найдем компоненты вектора скорости, используя заданный закон изменения скорости:

$$\mathrm{v}_x = \frac{dx}{dt} = \alpha, \quad \mathrm{v}_y = \frac{dy}{dt} = \beta x, \quad \mathrm{v}_z = \frac{dz}{dt} = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, из первого уравнения получим:

$$x = \alpha t + C_1.$$

Постоянную интегрирования C_1 определим из начальных условий: т. к. при $t = 0$ $x_0 = 0$, то $C_1 = 0$. Следовательно, $x = \alpha t$.

Подставив это соотношение во второе дифференциальное уравнение, разделив переменные и проинтегрировав, получим выражение для второй компоненты радиус-вектора:

$$y = \frac{\alpha\beta}{2} t^2 + C_2.$$

Из начальных условий ясно, что постоянная интегрирования C_2, а также третья компонента радиус-вектора равны нулю.

Т. о., закон движения частицы имеет следующий вид:

$$\vec{r} = \alpha t \vec{i} + \frac{\alpha\beta}{2} t^2 \vec{j}.$$

Зная закон движения частицы, можно определить любые параметры движения частицы, в том числе и уравнение траектории. Используя систему кинематических уравнений, получим:

$$\begin{cases} x = \alpha t \\ y = \dfrac{\alpha\beta}{2} t^2 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{\beta}{2\alpha} x^2.$$

Т. о., частица движется в плоскости XOY по параболе.

Радиус кривизны траектории связан со скоростью частицы в данной точке траектории известным соотношением:

$$R = \frac{\mathrm{v}^2}{a_n},$$

где a_n – нормальное ускорение частицы в данной точке траектории.

В задаче требуется найти зависимость радиуса кривизны траектории от координаты, поэтому прежде всего необходимо выразить v^2 и a_n через координаты.

Для определения v^2 воспользуемся заданным законом изменения скорости:

$$\mathrm{v}^2 = \vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{\mathrm{v}} = \left(\alpha\vec{i} + \beta x\vec{j}\right) \cdot \left(\alpha\vec{i} + \beta x\vec{j}\right) = \alpha^2 + \beta^2 x^2.$$

Нормальное ускорение a_n определим, воспользовавшись связью между a, a_n и a_τ:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\ ,$$

где a – полное ускорение частицы, a_τ – тангенциальное ускорение частицы.

Вектор полного ускорения частицы равен:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\alpha\vec{i} + \beta x\vec{j}\right) = \beta\frac{dx}{dt}\vec{j} = \alpha\beta\vec{j}\ .$$

Отсюда:

$$a^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = \alpha^2\beta^2\ .$$

По определению тангенциальное ускорение частицы равно:

$$a_\tau = \frac{d\left|\vec{\mathrm{v}}\right|}{dt}.$$

Следовательно,

$$a_\tau = \frac{d\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}\right)}{dt} = \frac{2\beta^2 x}{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha\beta^2 x}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}}\ .$$

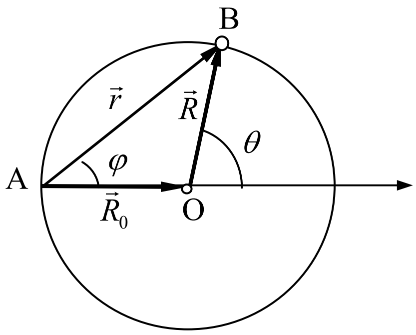
Используя полученные выражения для a, a_τ и v^2, получим окончательное выражение для радиуса кривизны траектории частицы:

$$R = \frac{\mathrm{v}^2}{a_n} = \frac{\mathrm{v}^2}{\sqrt{a^2 - a_\tau^2}} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 x^2}{\sqrt{\alpha^2\beta^2 - \dfrac{\alpha^2\beta^4 x^2}{\alpha^2 + \beta^2 x^2}}} = \frac{\left(\alpha^2 + \beta^2 x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\alpha^4\beta^2 + \alpha^2\beta^4 x^2 - \alpha^2\beta^4 x^2}} = \frac{\alpha}{\beta}\left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

ЗАДАЧА 9. Частица В движется по окружности радиуса R так, что ее радиус-вектор $\vec{r}$ относительно точки А поворачивается с постоянной угловой скоростью ω_1. Найти модуль скорости частицы, а также модуль и направление ее полного ускорения.

РЕШЕНИЕ

Так как точка В движется по окружности, то удобнее работать в системе координат, связанной с центром окружности, т. е. с точкой О.



Тогда радиус-вектор $\vec{r}$ можно представить как сумму двух векторов: неподвижного вектора $\vec{R}_0$ и вектора $\vec{R}$, направление которого непрерывно меняется со временем:

$$\vec{r} = \vec{R}_0 + \vec{R},$$

$$\left|\vec{R}_0\right| = \left|\vec{R}\right| = R.$$

Из рисунка видно, что углы φ и θ, определяющие положение векторов $\vec{r}$ и $\vec{R}$ относительно полярной оси, связаны между собой соотношением:

$$\theta = 2\varphi.$$

Дифференцируя это соотношение, получим связь между угловой скоростью ω_1, определяющей скорость поворота радиус-вектора $\vec{r}$, и угловой скоростью ω_2, определяющей скорость поворота радиус-вектора $\vec{R}$:

$$\omega_2 = 2\omega_1.$$

Линейная скорость движения точки В вдоль окружности будет равна:

$$\mathrm{v} = R\omega_2 = 2R\omega_1.$$

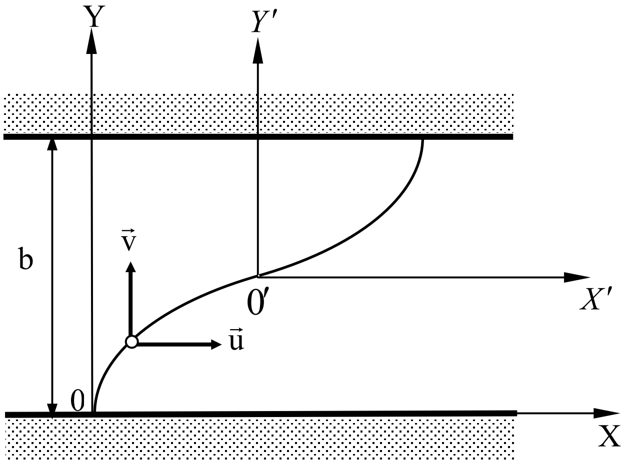
Видно, что точка В движется по окружности с постоянными угловой и линейной скоростями. Следовательно, тангенциальное ускорение точки равно нулю. Таким образом, полное ускорение равно нормальному ускорению a_n:

$$a = a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{R} = 4\omega^2 R.$$

ЗАДАЧА 10. Лодка пересекает реку с постоянной относительно воды скоростью v, перпендикулярной к течению. Скорость течения реки, ширина которой b, равна нулю у берегов и линейно возрастает по мере приближения к середине реки, где она достигает значения u_0. Найти траекторию лодки, а также снос лодки s вниз по течению от пункта ее отправления до места причала на противоположном берегу реки.

АНАЛИЗ

По условию задачи скорость реки линейно возрастает по мере приближения к середине реки с обеих сторон. Величина же сноса лодки зависит от скорости реки, поэтому лодка будет двигаться по криволинейной траектории.



Из соображений симметрии следует, что величина сноса лодки на первом участке пути будет равна величине сноса лодки на втором участке пути. Также очевидно, что траектория лодки на обоих участках пути должна быть симметричной.

Решение задачи сводится к нахождению закона движения лодки. Но, так как скорость лодки вдоль оси X зависит от координаты Y, придется применить интегрирование.

РЕШЕНИЕ

В данной задаче удобно использовать две системы координат. Начало первой системы координат совместим с начальной точкой движения лодки; ось X направим вдоль течения реки, а ось Y – по перпендикуляру к линии берега.

Начало второй системы координат выберем в точке, которую достигнет лодка, пройдя первую половину пути.

Для нахождения траектории лодки на первом участке пути запишем приращения y- и x-координат лодки за малый промежуток времени dt:

$$\begin{cases} dy = \mathrm{v}_y dt \\ dx = \mathrm{v}_x dt \end{cases}.$$

Интегрируя первое уравнение и используя начальные условия ($y_0 = 0$ при $t = 0$ и $\mathrm{v}_{0y} = \mathrm{v} = const$), получим:

$$y = \int_0^t \mathrm{v}_y dt = \mathrm{v}t\,.$$

Рассмотрим теперь второе уравнение системы. В этом уравнении v_x – это проекция скорости лодки относительно берега реки на ось OX. Но она равна скорости течения реки в данной точке траектории лодки и меняется с координатой y по закону:

$$\mathrm{v}_x = ky\,.$$

Коэффициент k легко определяется из условия, что на середине реки $\left(y = \dfrac{b}{2}\right)$ скорость течения реки равна u_0. Т. е.

$$k = \frac{2u_0}{b}\,.$$

Отсюда получим:

$$dx = kydt = \frac{2u_0}{b} ydt .$$

Чтобы уменьшить число переменных, входящих в уравнение, воспользуемся полученным нами соотношением между координатой y и временем t:

$$dx = \frac{2u_0}{b} \mathrm{v} tdt .$$

Интегрируя это уравнение с учетом начальных условий ($x_0 = 0$ при $t = 0$), получим:

$$x = \int_0^t \frac{2u_0}{b} \mathrm{v} tdt = \frac{\mathrm{v} u_0}{b} t^2 .$$

Исключая время t из двух кинематических уравнений, получим уравнение траектории лодки для первой половины пути:

$$x = \frac{u_0}{\mathrm{v} b} y^2$$

или

$$y = \sqrt{\frac{b \mathrm{v} x}{u_0}} .$$

Таким образом, траектория лодки на первом участке пути представляет собой одну из ветвей параболы. Величина сноса лодки относительно берега на первом участке пути будет равна:

$$l_1 = \frac{u_0}{\mathrm{v} b} \left(\frac{b}{2} \right)^2 = \frac{b u_0}{4 \mathrm{v}} .$$

Для определения траектории лодки на втором участке пути перейдем к системе координат, связанной с конечной точкой первого участка пути (см. рисунок). Начало отсчета времени свяжем с началом движения лодки в новой системе координат. Дальнейшая схема решения задачи аналогична схеме решения для первого участка пути. Но для разнообразия попробуем решить задачу по стандартной методике, которую мы применяли ранее.

Для этого необходимо определить коэффициенты в кинематических уравнениях движения:

$$\left. \begin{aligned} x'_0 &= 0 \\ y'_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{– координаты лодки в начальный момент времени,}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{v}_{0x} = u_0 \\ \mathrm{v}_{0y} = \mathrm{v} \end{array}\right\}$$ – проекции скорости лодки на оси $O'X'$ и $O'Y'$ при t = 0,

$a_y = 0$ – проекция ускорения на ось $O'Y'$.

Осталось определить проекцию ускорения на ось $O'X'$. Очевидно, что природа этого ускорения связана с тем обстоятельством, что лодка во время движения переходит из области с одной скоростью течения в область с другой скоростью течения. Скорость течения реки (но это и проекция v_x скорости лодки относительно берега на ось $0'X'$) зависит от координаты следующим образом:

$$\mathrm{v}_x = u_0 - ky' = u_0 - \frac{2u_0}{b} y'.$$

По определению, ускорение лодки вдоль оси $O'X'$ равно

$$a_x = \frac{d\mathrm{v}_x}{dt}.$$

Очевидно, что $d\mathrm{v}_x = -\frac{2u_0}{b} dy'$.

Отсюда:

$$a_x = \frac{d\mathrm{v}_x}{dt} = -\frac{2u_0}{b}\frac{dy}{dt} = -\frac{2u_0 \mathrm{v}}{b}.$$

Запишем кинематические уравнения движения лодки в общем виде:

$$\begin{cases} x' = x'_0 + \mathrm{v}_{0x} t + \dfrac{a_x t^2}{2} \\ y' = y'_0 + \mathrm{v}_{0y} t + \dfrac{a_y t^2}{2} \end{cases}.$$

После подстановки коэффициентов, получим

$$\begin{cases} x' = u_0 t - \dfrac{u_0 \mathrm{v}}{b} t^2 \\ y' = \mathrm{v} t \end{cases}.$$

Теперь определим траекторию лодки на втором участке пути. Исключая время t, получим:

$$x' = \frac{u_0}{\mathrm{v}} y' - \frac{u_0}{\mathrm{v} b} y'^2,$$

или:

$$y'^2 - by' + \frac{b\text{v}x'}{u_0} = 0\,.$$

Далее, решая это квадратное уравнение, получим:

$$y' = \frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{b\text{v}x'}{u_0}} = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{b\text{v}x'}{u_0}}\,.$$

(Здесь знак "минус" выбран по той причине, что при $x' = 0$ координата y' также должна быть равна нулю.) Как и для первого случая, траектория лодки на втором участке представляет собой одну из ветвей параболы. Очевидно, что эта ветвь является зеркальным отражением ветви первой параболы.

Величину сноса определим из следующих соображений. При достижении берега координата по оси $O'Y'$ будет равна:

$$y' = \frac{b}{2}.$$

Подставляя это выражение в уравнение траектории, получим величину сноса на втором участке пути:

$$\frac{b}{2} = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{b\text{v}l_2}{u_0}}\,,$$

$$l_2 = \frac{u_0 b}{4\text{v}}.$$

Теперь вернемся к прежним координатам. Для этого воспользуемся следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= x' + l_1 = x' + \frac{u_0 b}{4\text{v}} \\ y &= y' + \frac{b}{2} \end{aligned}\,.$$

Получим окончательно:

уравнение траектории для первого участка пути – $y = \sqrt{\dfrac{b\text{v}x}{u_0}}$,

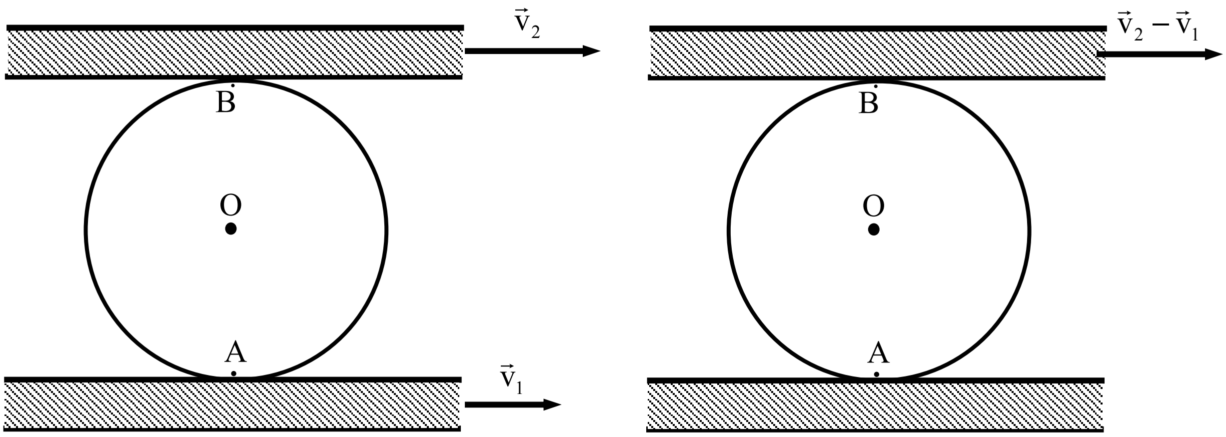
для второго участка – $y = b - \sqrt{\dfrac{b^2}{2} - \dfrac{b\text{v}x}{u_0}}$.

Полная величина сноса лодки: $s = l_1 + l_2 = \dfrac{u_0 b}{2\text{v}}$.

Задача 11. Цилиндр радиуса R вращается без скольжения между двумя параллельными досками, которые движутся в одном и том же направлении перпендикулярно образующим цилиндра со скоростями v_1 и $v_2 > v_1$ вдоль своих длин. Найти угловую скорость вращения цилиндра и скорость его центра масс.

АНАЛИЗ

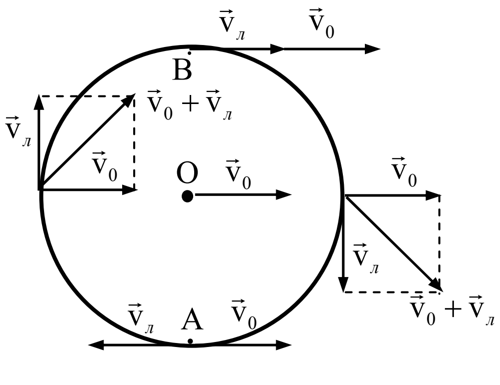
Задачу удобно решать в системе координат, жестко связанной с нижней



доской. В этом случае можно считать, что цилиндр катится без скольжения по нижней неподвижной доске. Тогда скорость точки B (верхней точки цилиндра) будет равна разности скоростей досок. Это и понятно – так как цилиндр катится без скольжения, то скорость точки B цилиндра должна быть равна скорости верхней доски в системе координат, связанной с нижней доской. С другой стороны, движение точек обода цилиндра можно рассматривать как результат сложения двух движений: поступательного движения со скоростью $\vec{v}_0$ центра масс цилиндра и вращения вокруг оси, проходящей через центр масс, с линейной скоростью $\vec{v}_л$.

При отсутствии скольжения мгновенная скорость точки A должна быть равна нулю. Отсюда следует равенство скоростей $|\vec{v}_0|$ и $|\vec{v}_л|$.

Это обстоятельство дает возможность определить как поступательную скорость центра масс цилиндра, так и угловую скорость вращения цилиндра.



РЕШЕНИЕ

Из рисунка и анализа задачи ясно, что линейная скорость точки B в системе координат, связанной с нижней доской, будет равна:

$$\mathrm{v}_B = \mathrm{v}_0 + \mathrm{v}_л = 2\mathrm{v}_0 = \mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_1.$$

Отсюда получим значение скорости центра масс цилиндра в системе отсчета, связанной с нижней доской:

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_1}{2}.$$

Эта же скорость в лабораторной системе координат будет равна:

$$\mathrm{v}_0' = \mathrm{v}_0 + \mathrm{v}_1 = \frac{\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2}{2}.$$

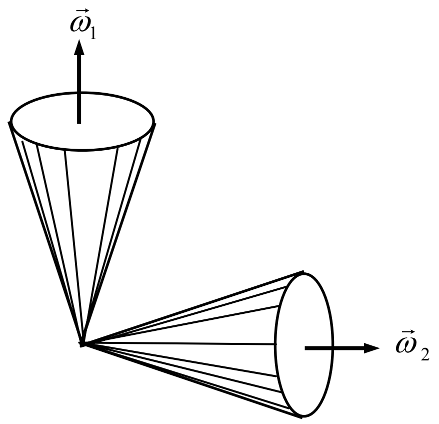
Угловую скорость вращения цилиндра можно определить по формуле:

$$\omega = \frac{\mathrm{v}_л}{R}.$$

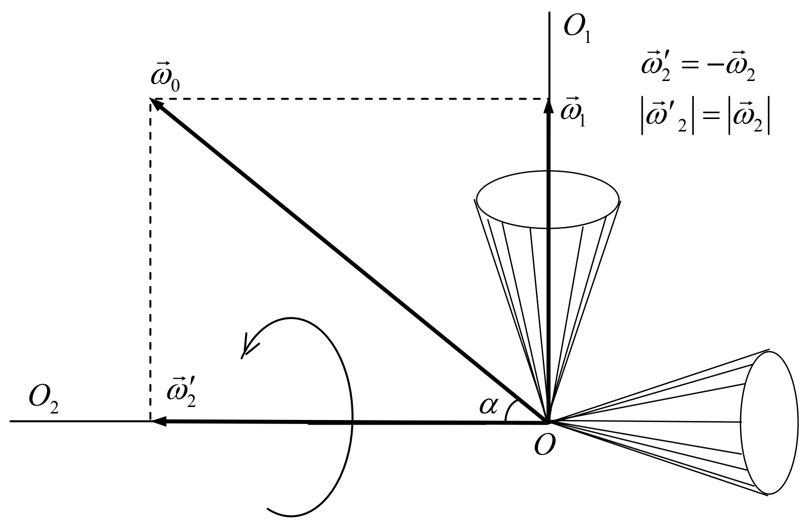
Отсюда получим: $\omega = \dfrac{\mathrm{v}_л}{R} = \dfrac{\mathrm{v}_0}{R} = \dfrac{\mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_1}{2R}$.

Задача 12. Два твердых тела вращаются вокруг неподвижных взаимно перпендикулярных пересекающихся осей с постоянными угловыми скоростями ω_1 и ω_2. Найти угловую скорость и угловое ускорение первого тела относительно второго.

АНАЛИЗ



В задаче требуется найти угловую скорость и угловое ускорение первого тела относительно второго, т. е. определить угловую скорость и угловое ускорение первого тела в системе координат, жестко связанной со вторым телом. В такой системе координат первое тело будет участвовать одновременно в двух движениях: вращаться с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ вокруг оси, имеющей неизменное положение относительно первого тела, и вращаться с угловой скоростью $\vec{\omega}_2'$ относительно оси, имеющей неизменное направление в пространстве (в системе координат, связанной со вторым телом). С другой стороны, согласно теореме Эйлера, движение закрепленного в точке твердого тела в каждый данный момент времени может рассматриваться как вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через точку закрепления.



Положение мгновенной оси меняется как относительно точек вращения тела, так и относительно неподвижной системы координат. В данном случае вектор мгновенной скорости $\vec{\omega}_0$ вращается вокруг оси OO_2 с угловой скоростью $\vec{\omega}_2'$, при этом описывая конус с углом раствора равным α.

Величина вектора мгновенной скорости $\vec{\omega}_0$ будет определяться векторной суммой векторов $\vec{\omega}_2'$ и $\vec{\omega}_1$. Т. к. модули этих векторов не меняются во времени, то и модуль вектора мгновенной скорости также не будет меняться во времени. Следовательно, угловое ускорение будет связано только с изменением направления вектора мгновенной скорости в пространстве.

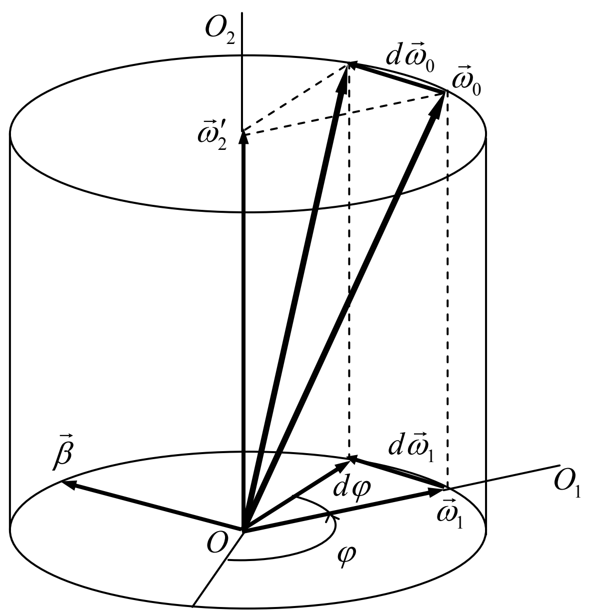
РЕШЕНИЕ

Значение мгновенной угловой скорости можно определить по теореме Пифагора:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2'^2} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}\,.$$

Из рисунка видно, что приращение вектора мгновенной скорости $d\vec{\omega}_0$ за время dt равно приращению вектора угловой скорости $\vec{\omega}_1$. В свою очередь, приращение вектора угловой скорости $\vec{\omega}_1$ за это же время равно:

$$d\omega_1 = \omega_1 d\varphi\,.$$



Отсюда, угловое ускорение первого тела относительно второго будет равно:

$$\beta = \frac{d\omega_0}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{\omega_1 d\varphi}{dt} = \frac{\omega_1\omega_2' dt}{dt} = \omega_1\omega_2\,.$$

Или в векторном виде для системы координат, связанной со вторым телом:

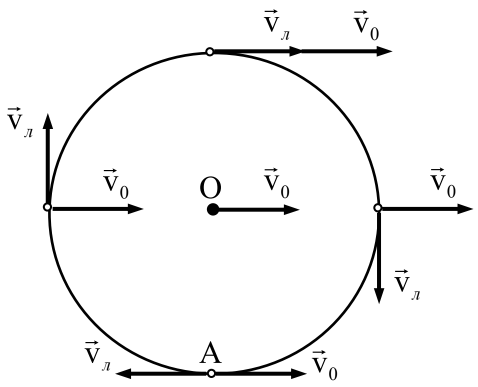
$$\vec{\beta} = \left[\vec{\omega}_2'\vec{\omega}_1\right].$$

В лабораторной системе координат это выражение выглядит так:

$$\vec{\beta} = \left[\vec{\omega}_1\vec{\omega}_2\right].$$

Задача 13. Точка А находится на ободе колеса радиуса R = 0,50 м, которое катится без скольжения по горизонтальной поверхности со скоростью v = 1,0 м/с. Найти:
а) модуль и направление ускорения точки А;
б) полный путь s, проходимый точкой А между двумя последовательными моментами ее касания поверхности;
в) координаты x и y точки А, выразив их как функции времени t или угла поворота колеса φ, полагая, что при t = 0 φ = 0, x = 0, y = 0. По найденным выражениям для x и y построить график траектории точки на ободе колеса.

АНАЛИЗ



Движение точек обода колеса можно рассматривать как результат сложения двух движений: поступательного движения со скоростью $\vec{v}_0$ оси колеса и вращения вокруг этой оси. Поступательное движение не дает вклада в ускорение точек обода колеса: производная от постоянного вектора $\vec{v}_0$ по времени равна нулю. Следовательно, ускорение точек обода колеса будет определяться их вращательным движением с постоянной линейной скоростью по окружности радиуса R. При таком движении все точки обода колеса имеют одинаковые по модулю ускорения $a = a_n = \dfrac{v_л^2}{R}$, направленные к центру колеса.

Условие "колесо катится без скольжения" означает, что точка обода колеса, соприкасающаяся в данный момент времени с полотном дороги, имеет нулевую скорость относительно дороги (нет проскальзывания). Из этого условия следует, что (см. рисунок, точка А) линейная скорость вращательного движения обода колеса $v_л$ должна быть равна по модулю скорости поступательного движения колеса v_0.

Пройденный путь s, проходимый точкой А между двумя последовательными ее касаниями полотна дороги, можно определить по формуле

$$s = \int_0^{t_0} v\,dt\,,$$

где t_0 – промежуток времени между двумя последовательными касаниями;
v – модуль скорости точки А относительно полотна дороги.

В свою очередь, и модуль скорости точки А и время движения этой точки можно связать с углом поворота колеса φ и, таким образом, перейти от интегрирования по времени к интегрированию по углу поворота колеса.

РЕШЕНИЕ

а) Модуль и направление ускорения точки А.

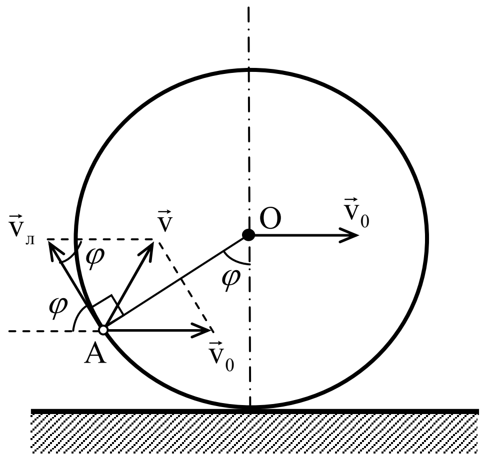
Из анализа задачи ясно, что ускорение любой движущейся точки на ободе колеса направлено к центру катящегося колеса и равно

$$a = a_n = \frac{v_л^2}{R} = \frac{v_0^2}{R},$$

$$a = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ м/с}^2.$$

б) Пройденный точкой А путь между двумя последовательными моментами ее касания поверхности дороги, как видно из анализа задачи, определяется по формуле

$$s = \int_0^{t_0} v\,dt.$$



Найдем связь между модулем скорости точки А относительно дороги и углом поворота колеса. Как видно из рисунка, вектор скорости $\vec{v}$ точки А можно представить как векторную сумму линейной скорости вращательного движения точки $\vec{v}_л$ относительно центра колеса и скорости $\vec{v}_0$ поступательного движения оси колеса. Воспользуемся рисунком и теоремой косинусов для нахождения связи между модулями всех скоростей:

$$v^2 = v_л^2 + v_0^2 - 2v_л v_0 \cos\varphi.$$

Ход нахождения угла φ ясен из рисунка. Учтем равенство модулей линейной скорости вращательного движения точки А и скорости поступательного движения $v_л = v_0$. Отсюда

$$v^2 = 2v_0^2 - 2v_0^2\cos\varphi = 2v_0^2(1-\cos\varphi) = 4v_0^2\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Или

$$v = 2v_0\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Теперь воспользуемся связью между линейной скоростью вращательного движения точки и угловой скоростью колеса

$$v_л = v_0 = \omega R = \frac{d\varphi}{dt}R.$$

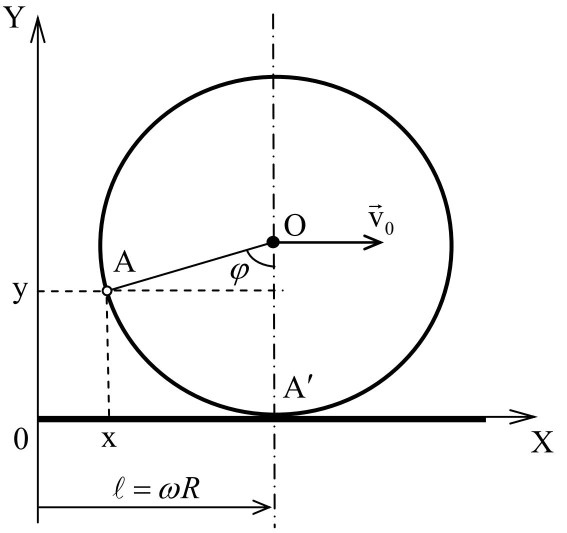
Очевидно, что угол поворота колеса φ между двумя последовательными касаниями дороги точкой А изменяется в пределах от 0 до 2π. Таким образом, пройденный путь между двумя последовательными касаниями дороги одной и той же точкой на ободе колеса будет равен

$$s = \int_0^{t_0} \mathrm{v}dt = \int_0^{t_0} 2\mathrm{v}_0 \sin\frac{\varphi}{2} \cdot dt = 2R\int_0^{2\pi} \sin\frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi = 8R .$$

s = 8 R = 4 м.

в) Координаты точки А.

Согласно условию задачи, в начальный момент времени точка соприкосновения колеса с полотном дороги (точка А) совпадает с началом координат. Спустя время t колесо повернется на угол φ и точка А займет новое положение (см. рисунок). За это же время ось вращения колеса переместится вдоль оси 0X на расстояние равное длине дуги АА′



$$\ell = R\varphi = \mathrm{v}_0 t .$$

Используя это выражение и тригонометрические соотношения, легко получаемые на основе анализа рисунка, определим координаты точки А в зависимости от угла поворота колеса:

$$x = R\varphi - R\sin\varphi = R(\varphi - \sin\varphi),$$

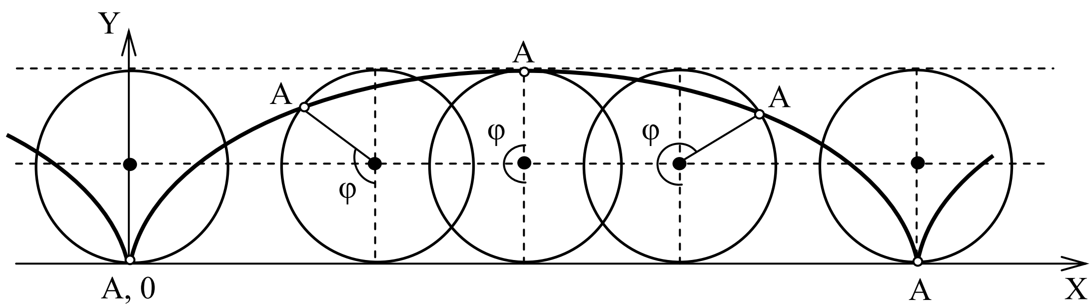
$$y = R - R\cos\varphi = R(1 - \cos\varphi),$$

или времени:

$$x = R(\omega t - \sin\omega t) = R\left(\frac{\mathrm{v}_0}{R}t - \sin\frac{\mathrm{v}_0}{R}t\right),$$

$$y = R(1 - \cos\omega t) = R\left(1 - \cos\frac{\mathrm{v}_0}{R}t\right).$$

Линия, которую описывает точка, закрепленная на ободе движущегося без скольжения колеса, называется обыкновенной циклоидой (или просто циклоидой). Полученные нами уравнения являются уравнениями циклоиды в параметрической форме.



Примечание. Положение материальной точки относительно выбранной системы отсчета описывается ее радиус-вектором или ее координатами. Зная зависимость радиус-вектора от времени (закон движения), легко можно найти скорость и ускорение материальной точки, вычисляя первую и вторую производную по времени от радиус-вектора. Предлагаем самостоятельно вычислить модуль и вектор скорости, модуль и вектор ускорения точки А и сравнить результаты с полученными выше.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Две материальные точки движутся согласно уравнениям $x_1 = A_1t + B_1t^2 + C_1t^3$ и $x_2 = A_2t + B_2t^2 + C_2t^3$, где $A_1 = 4$ м/с; $B_1 = 8$ м/с^2; $C_1 = -16$ м/с^3; $A_2 = 2$ м/с; $B_2 = -4$ м/с^2; $C_1 = 1$ м/с^3. В какой момент времени ускорения этих точек будут одинаковы? Найти скорости точек в этот момент.

2. Движение точки по кривой задано уравнениями $x = A_1t^3$; $y = A_2t$, где $A_1 = 1$ м/с^3; $A_2 = 2$ м/с. Найти уравнение траектории точки, ее скорость и полное ускорение в момент времени $t = 0{,}8$ с.

3. Вертикально вверх с начальной скоростью 20 м/с брошен камень. Через одну секунду после этого брошен вертикально вверх другой камень с такой же скоростью. На какой высоте встретятся камни?

4. Свободно падающее тело в последнюю секунду своего падения проходит половину пути. Найти, с какой высоты падает тело и продолжительность его падения.

5. Камень, брошенный горизонтально, упал на землю через 0,5 с на расстоянии 5 м по горизонтали от места бросания. Найти высоту, с которой был брошен камень, начальную скорость камня, скорость, с которой он упал на землю, угол, который составляет траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю.

6. Мяч, брошенный горизонтально, ударяется о стенку, находящуюся на расстоянии 5 м от места бросания. Высота места удара мяча о стенку на 1 м меньше высоты, с которой брошен мяч. С какой скоростью был брошен мяч? Под каким углом мяч подлетает к поверхности стенки?

7. Пуля пущена с начальной скоростью 200 м/с под углом 60° к горизонту. Определить максимальную высоту подъема, дальность полета и радиус кривизны траектории пули в ее наивысшей точке. Сопротивлением воздуха пренебречь.

8. Наибольшая высота подъема тела, брошенного под углом к горизонту со скоростью 20 м/с, составляет 10 м. Под каким углом оно брошено?

9. Расстояние между двумя лодочными станциями моторная лодка проходит по течению реки за 10 мин, а против течения – за 30 мин. За какое время это расстояние проплывет по течению бревно?

10. Лодка движется перпендикулярно берегу со скоростью 7,2 км/ч. Течение относит ее на 150 м вниз по реке. Найти скорость течения реки и время, затраченное на переезд через реку. Ширина реки 0,5 км.

11. Поезд движется прямолинейно со скоростью $v_0 = 180$ км/ч. Внезапно на пути возникает препятствие, и машинист включает тормозной механизм. С этого момента скорость поезда изменяется по закону $v = v_0 - \alpha t^2$, где $\alpha = 1$ м/с^3. Каков тормозной путь поезда? Через какое время после начала торможения он остановится?

12. Частица в момент времени $t = 0$ вышла из начала координат системы отсчета и дальше двигалась прямолинейно так, что ее скорость изменялась со временем по закону $v = v_0\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$, где v_0 и τ – постоянные величины. Определить для данного движения зависимости пути и ускорения от времени.

13. Вектор скорости движения задан уравнением $\vec{v} = \alpha\vec{i} + \beta x\vec{j}$, где α и β – постоянные величины. В начальный момент времени тело имело координаты $x_0 = y_0 = 0$. Определить радиус-вектор, векторы скорости и ускорения как функции времени.

14. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением 2 рад/с^2. Через 0.5 с после начала движения полное ускорение колеса стало равно 13.6 см/с^2. Найти радиус колеса.

15. Колесо радиусом 10 см вращается с постоянным угловым ускорением 3.14 рад/с^2. Найти для точек на ободе колеса к концу первой секунды после начала движения угловую скорость, линейную скорость, тангенциальное, нормальное и полное ускорения, угол, составляемый направлением полного ускорения с радиусом колеса.

Вариант 2

1. Определить модуль скорости материальной точки в момент времени $t = 2$ с, если точка движется по закону $\vec{r} = \alpha t^2 \cdot \vec{i} + \beta \sin(\pi t) \cdot \vec{j}$, где $\alpha = 2$ м/с^2, $\beta = 3$ м.

2. Радиус-вектор тела задан в виде $\vec{r} = 2\cos\omega t \cdot \vec{i} + 2\sin\omega t \cdot \vec{j}$, где $\omega = \text{const}$. Какой вид имеет траектория движения тела? Определить векторы скорости и ускорения, их модули, нормальную и тангенциальную составляющие ускорения, а также радиус кривизны траектории как функции времени.

3. Тело брошено с балкона вертикально вверх со скоростью 10 м/с. Высота балкона над поверхностью земли 12,5 м. Написать уравнение движения и

определить среднюю путевую скорость с момента бросания до момента падения на землю.

4. Камень брошен с вышки в горизонтальном направлении со скоростью 20 м/с. Определить скорость, тангенциальное и нормальное ускорения камня в конце второй секунды после начала движения.

5. Камень бросают горизонтально с вершины горы, имеющей уклон α. С какой скоростью должен быть брошен камень, чтобы он упал на гору на расстоянии L от вершины?

6. Камень, брошенный со скоростью 12 м/с под углом 45° к горизонту, упал на землю на расстоянии s от места бросания. С какой высоты надо бросить камень в горизонтальном направлении, чтобы при той же начальной скорости он упал на то же место?

7. С башни высотой 25 м бросили камень со скоростью 15 м/с под углом 30° к горизонту. Найти, сколько времени камень будет в движении, на каком расстоянии от основания башни он упадет на землю, с какой скоростью он упадет на землю, какой угол составит траектория камня с горизонтом в точке падения.

8. Самолет летит на высоте H со скоростью v_0. На горизонте летчик замечает цель, движущуюся ему навстречу с постоянной скоростью. Спикировав прямо на цель, самолет сбрасывает бомбу, которая поражает цель. Определить начальное расстояние между целью и самолетом по горизонтали и скорость цели, если угол пикирования α.

9. Лодка движется относительно воды со скоростью в $\eta = 2{,}0$ раза меньшей скорости течения реки. Под каким углом к направлению течения лодка должна держать курс, чтобы ее снесло течением как можно меньше?

10. Туристы, определяя скорость течения воды в реке, около лагеря опустили в воду кусок пенопласта и начали на лодке грести по течению. Через 20 мин они достигли деревни, находящейся ниже лагеря на 0,5 км и повернули лодку назад. Поймав пенопласт, они снова повернули лодку по течению и через 10 мин вернулись в деревню. Какова скорость течения воды в реке, если считать скорость воды и лодки постоянной и время на повороты лодки не учитывать?

11. Ускорение материальной точки изменяется по закону $\vec{a} = \alpha t^2 \vec{i} - \beta \vec{j}$, где $\alpha = 3$ м/с^4, $\beta = 3$ м/с^2. Найти, на каком расстоянии от начала координат она будет находиться в момент времени $t = 1$ с, если $\vec{v}_0 = 0$ и $\vec{r}_0 = 0$ при $t = 0$.

12. В момент $t = 0$ частица вышла из начала координат в положительном направлении оси x. Ее скорость меняется со временем как $\vec{v} = \vec{v}_0(1 - t/\tau)$, где $\vec{v}_0$ – начальная скорость, модуль которой $v_0 = 10{,}0$ см/с, $\tau = 5{,}0$ с. Найти: а) координату x частицы, когда $t = 6$, 10 и 20 с; б) моменты времени, когда частица будет находиться на расстоянии 10,0 см от начала координат.

13. Частица движется в положительном направлении оси x так, что ее скорость меняется по закону $v = \alpha\sqrt{x}$, где α – положительная постоянная. В момент $t = 0$ частица находилась в точке $x = 0$. Найти: а) ее скорость и ускорение как функции времени; б) среднюю скорость за время, в течение которого она пройдет первые s метров пути.

14. Найти угловое ускорение колеса, если известно, что через 2 с после начала равноускоренного движения вектор полного ускорения точки, лежащей на ободе, составляет угол 60° с направлением линейной скорости этой точки.

15. Точка движется по окружности радиусом R = 10 см с постоянным тангенциальным ускорением. Найти нормальное ускорение точки через 20 с после начала движения, если известно, что к концу пятого оборота после начала движения линейная скорость точки равна 10 см/с.

Вариант 3

1. Частица движется в плоскости xy с постоянным ускорением $\vec{a}$, противоположным положительному направлению оси y. Уравнение траектории частицы имеет вид $y = \alpha x - \beta x^2$, где α и β – положительные постоянные. Найти скорость частицы в начале координат.

2. Материальная точка движется по закону $\vec{r} = \alpha \sin(5t) \cdot \vec{i} + \beta \cos^2(5t)\vec{j}$, где $\alpha = 2$ м/с^2, $\beta = 3$ м. Определить вектор скорости, вектор ускорения и траекторию движения материальной точки.

3. Два шарика бросили одновременно из одной точки в горизонтальном направлении в противоположные стороны со скоростями $v_1 = 3{,}0$ м/с и $v_2 = 4{,}0$ м/с. Найти расстояние между шариками в момент, когда их скорости окажутся взаимно перпендикулярными.

4. Под каким углом к горизонту надо бросить шарик, чтобы: а) радиус кривизны начала его траектории был в $\eta = 8{,}0$ раз больше, чем в вершине; б) центр кривизны вершины траектории находился на земной поверхности.

5. Из пушки выпустили последовательно два снаряда со скоростью $v_o = 250$ м/с: первый – под углом $\theta_1 = 60°$ к горизонту, второй – под углом $\theta_2 = 45°$ (азимут один и тот же). Найти интервал времени между выстрелами, при котором снаряды столкнутся друг с другом.

6. Шарик падает с нулевой начальной скоростью на гладкую наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом. Пролетев расстояние h, он упруго отразился от плоскости. На каком расстоянии от места падения шарик отразится второй раз?

7. Мяч, упавший с высоты 1 м, два раза ударяется о наклонно поставленную доску. Расстояние между точками удара мяча о доску 4 м. Удар мяча о доску абсолютно упругий. Определить угол между доской и горизонтом; уравнение траектории мяча; радиус кривизны траектории в точке наивысшего подъема после первого удара.

8. Камень брошен на склоне горы под углом α к ее поверхности. а) Определить дальность полета камня и его наибольшую высоту подъема над склоном, если начальная скорость камня v_0, угол наклона горы к горизонту β. б) По какому закону изменяется с течением времени нормальная и тангенциальная составляющие полного ускорения камня, а также радиус кривизны траектории?

9. Гребец ведет лодку, удерживая ее все время перпендикулярно направлению течения, со скоростью 1 м/с относительно воды. Ширина реки – 200 м. Определить время переезда через реку, а также расстояние от исходного места до места причаливания лодки, если скорость течения реки меняется по закону $v = (-4\frac{y^2}{b^2} + 4\frac{y}{b} + 0{,}5)$ м/с, где y – расстояние от берега, b – ширина реки.

10. Воздушный шар начинает подниматься с поверхности земли. Скорость его подъема постоянна и равна v_0. Благодаря ветру шар приобретает горизонтальную компоненту скорости $v_x = ay$, где α – постоянная, y – высота подъема. Найти зависимости от высоты подъема: а) сноса шара x(y); б) полного, тангенциального и нормального ускорений шара.

11. Скорость материальной точки изменяется по закону $\vec{v} = \alpha\left(2t^3 - \beta\right)\vec{i} - \gamma \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)\vec{j}$, где $\alpha = 1$ м/с^4, $\beta = 1$ с^3, $\gamma = 1$ м/с. Определить закон движения, если в начальный момент времени тело находилось в начале координат, т. е. $\vec{r}_0 = \{0,0,0\}$.

12. Точка движется по дуге окружности радиуса R. Ее скорость зависит от пройденного ею пути s по закону $v = \alpha\sqrt{s}$, где α – постоянная. Найти зависимости s(t), v(t) и a(t), а также угол между вектором полного ускорения и вектором скорости в зависимости от s.

13. Точка движется, замедляясь, по дуге окружности радиуса R так, что в каждый момент времени ее тангенциальное и нормальное ускорения по модулю равны друг другу. В начальный момент времени скорость точки равна v_0. Найти зависимость: а) скорости точки от времени и от пройденного пути; б) полного ускорения точки от скорости и пройденного пути.

14. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\beta = \alpha t$, где $\alpha = 0{,}02$ рад/с^3. Через сколько времени после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол $\varphi = 60°$ с ее вектором скорости?

15. Катушка с намотанной на нее нитью лежит на горизонтальной поверхности стола и может катиться по ней без скольжения. С какой скоростью будет перемещаться ось катушки, если конец нити тянуть в горизонтальном направлении со скоростью v? Радиус внутренней части катушки – r, внешней – R. Каковы будут скорость и ускорение точек, лежащих на расстоянии R от центра катушки?

ОТВЕТЫ

Вариант 1

1. 0,235 с; 5,1 м/с; 0,286 м/с. **2.** $y^3 - 8x = 0$; 2,77 м/с; 4,8 м/с^2. **3.** 19,2 м. **4.** 57 м; 3,4 с. **5.** 1,22 м; 10 м/с; 11,1 м/с; 26°12'. **6.** 11,1 м/с; 68°12'. **7.** 1,53 км; 3,53 км; 1,02 км. **8.** 45°. **9.** 30 мин. **10.** 0,6 м/с; 250 с. **11.** 230 м; 7 с. **12.** $s = v_0 t\left(1 - \dfrac{t}{2\tau}\right)$; $a = -\dfrac{v_0}{\tau}$. **13.** $\vec{r} = \alpha t\vec{i} + \dfrac{\alpha\beta}{2}t^2\vec{j}$; $\vec{v} = \alpha\vec{i} + \alpha\beta t\vec{j}$; $\vec{a} = \alpha\beta\vec{j}$. **14.** 6,1 м. **15.** 3,14 рад/с; 0,314 м/с; 0,314 м/с^2; 0,986 м/с^2; 1,03 м/с^2; 17°46'.

Вариант 2

1. 12,4 м/с. **2.** Траектория – окружность ($x^2 + y^2 = 4$);
$\vec{v} = 2\omega\left(-\sin\omega t\cdot\vec{i} + \cos\omega t\cdot\vec{j}\right)$; $v = 2\omega$; $\vec{a} = -2\omega^2\left(\cos\omega t\cdot\vec{i} + \sin\omega t\cdot\vec{j}\right)$; $a = 2\omega^2$; $a_\tau = 0$; $a_n = 2\omega^2$; $R = 2$. **3.** $x = h + v_0 t - \dfrac{gt^2}{2}$; 7,77 м/с. **4.** 35,8 м/с; 5,37 м/с^2; 8,22 м/с^2.
5. $v_0 = \cos\alpha\sqrt{gL/2\sin\alpha}$. **6.** 7,4 м. **7.** 3,16 с; 41,1 м; 26,7 м/с; 61°. **8.** $L = H\cdot \mathrm{ctg}\alpha$;

$$v = \frac{gH\cdot\mathrm{ctg}\alpha - v_0^2\cos\alpha\cdot\sin\alpha\left[\sqrt{1+\dfrac{2gH}{v_0^2\cdot\sin^2\alpha}} - 1\right]}{v_0\cdot\sin\alpha\left[\sqrt{1+2gH/v_0^2\cdot\sin^2\alpha} - 1\right]}.$$

9. 120°. **10.** 0,104 м/с.
11. 1,52 м. **12.** а) 0,24; 0; -4,0 м; б) 1,1; 9; 11 с. **13.** а) $v = \alpha^2 t/2$, $a = \alpha^2/2$; б) $\langle v\rangle = (\alpha/2)\sqrt{s}$. **14.** 0,43 рад/с^2. **15.** 0,01 м/с^2.

Вариант 3

1. $v_0 = \sqrt{\left(1+\alpha^2\right)a/2\beta}$. **2.** Траектория – парабола $y = 3 - {}^{3}\!/_{4}\,x^2$. **3.** 2,5 м.
4. а) $\cos\alpha = 1/\eta^{1/3}$, α = 60°; б) $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{2}$, α = 54,8° **5.** 11 с. **6.** $L = 8h\cdot\sin\alpha$.
7. 30°; $y = s\cdot\sin\alpha + \mathrm{tg}2\alpha\cdot x - \dfrac{g}{2v^2\sin 2\alpha}x^2$; 1,5 м. **8.** а) $s = \dfrac{2v_0\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)}{g\cos^2\beta}$;

$H = \dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g\cos\beta}$; б) $a_\tau = \dfrac{(v_0\sin(\alpha+\beta) - gt)g}{\sqrt{(v_0\cos(\alpha+\beta))^2 + (v_0\sin(\alpha+\beta) - gt)^2}}$;

$$a_n = \frac{v_0 g\cos(\alpha+\beta)}{\sqrt{(v_0\cos(\alpha+\beta))^2 + (v_0\sin(\alpha+\beta) - gt)^2}};$$

$$R = \frac{\left[(v_0\cos(\alpha+\beta))^2 + (v_0\sin(\alpha+\beta) - gt)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{v_0 g\cos(\alpha+\beta)}.$$

9. 200 с; 316 м.

10. а) $x = (\alpha/2v_0)y^2$; б) $a = \alpha v_0$, $a_\tau = \alpha^2 y/\sqrt{1+(\alpha y/v_0)^2}$,

$a_n = \alpha v_0 / \sqrt{1+(\alpha y / v_0)^2}$. **11.** $\vec{r}(t) = \alpha\left(\frac{1}{2}t^4 - \beta t\right)\vec{i} + \frac{3\gamma}{2\pi}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) - 1\right]\vec{j}$.

12. $s = \frac{\alpha^2 t^2}{4}$; $v = \frac{\alpha^2 t}{2}$; $a = \alpha^2\sqrt{4R^2 + \alpha^4 t^4} / 4R$; $\text{tg}\varphi = 2s / R$.

13. а) $v = v_0 / (1 + v_0 t / R) = v_0 e^{-s/R}$; б) $a = \sqrt{2} v_0^2 / Re^{2s/R} = \sqrt{2} v^2 / R$.

14. $t = \sqrt[3]{(4/\alpha)\text{tg}\varphi} = 7$ с. **15.** $v' = \frac{2Rv}{R - r}$; $a' = \frac{v^2 R}{(R - r)^2}$.