О КОЭФФИЦИЕНТАХ СТЕПЕННОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

М. Н. Шеремета

Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

— целая функция, а $M(r)$ — ее максимум модуля на круге $|z| \leqslant r$. Изучению связи между ростом $M(r)$ при $r \to \infty$ и коэффициентами a_n посвящено много работ (см., например [1—6]). В этих работах рост $M(r)$ сравнивался с достаточно правильно возрастающей функцией, при помощи которой тогда изучалось поведение коэффициентов a_n. Однако универсальной шкалы роста для целых функций построить нельзя [7, стр. 494]. Наша цель — изучить поведение коэффициентов a_n при помощи функции $\Phi^*(x)$, которая является обратной к функции $\Phi(x) =$

$= \ln M(e^x)$. Такая функция $\Phi^*(x)$ существует и строго монотонно стремится к ∞ при $x \to \infty$, ибо $\Phi(x)$ — строго монотонно возрастающая функция, стремящаяся к ∞ при $x \to \infty$.

Теорема. *Если для целой функции (1) выполняется*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \ln \ln M(r) (\ln \ln r)^{-2} = \infty, \tag{2}$$

то имеет место равенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} n\Phi^*(n) (-\ln |a_n|)^{-1} = 1.$$

Доказательство. Прежде всего из (2) следует, что $f(z)$ — трансцендентная функция, а из определения функции $\Phi(x)$ — $M(r) = \exp\{\Phi(\ln r)\}$.

Из неравенств Коши для функции (1) выполняется $|a_n| \leqslant r^{-n} M(r) = r^{-n} \exp\{\Phi(\ln r)\}$ для всех r, в том числе и для $r = r(n) = \exp\{\Phi^*(n)\} \to \infty$ при $n \to \infty$. Подставим $r = r(n)$ в последнее неравенство. Тогда $|a_n| \leqslant \exp\{-n(\Phi^*(n) - 1)\}$, откуда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} n\Phi^*(n) (-\ln |a_n|)^{-1} \leqslant 1. \tag{3}$$

Осталось доказать, что в (3) возможно лишь равенство. Доказательство поведем от противного. Предположим, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} n\Phi^*(n) (-\ln |a_n|)^{-1} < 1.$$

Тогда существует число q, $0 < q < 1$, такое, что для всех $n \geqslant n_0(q)$ выполняется $|a_n| \leqslant 1$ и $n\Phi^*(n)(-\ln (a_n))^{-1} \leqslant q$, т. е.

$$|a_n| \leqslant \exp\left\{-\frac{n}{q}\Phi^*(n)\right\}. \tag{4}$$

Для всех r $0 \leqslant r < \infty$ из (1) имеем

$$M(r) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = \sum_{n=0}^{n_0(q)-1} |a_n| r^n +$$

$$+ \sum_{n=n_0(q)}^{n_1(r)} |a_n| r^n + \sum_{n=n_1(r)+1}^{n_2(r)} |a_n| r^n + \sum_{n=n_2(r)+1}^{\infty} |a_n| r^n, \tag{5}$$

где $n_1(r) = [\Phi(q \ln r)]$, $n_2(r) = [\Phi(q \ln 2r)]$ (здесь $[a]$ — целая часть числа a).

Оценим суммы, стоящие в правой части (5). Так как $f(z)$ — трансцендентная функция, то при $r \to \infty$ выполняется

$$\sum_{n=0}^{n_0(q)-1} |a_n| r^n = 0(r^{n_0(q)-1}) = 0(M(r)). \tag{6}$$

Далее при $r > 1$ имеем

$$\sum_{n=n_0(q)}^{n_1(r)} |a_n| r^n \leqslant \sum_{n=n_0(q)}^{n_1(r)} r^n \leqslant n_1(r) r^{n_1(r)} \leqslant \Phi(q \ln r) \exp\{\Phi(q \ln r) \ln r\}, \tag{7}$$

а так как при $n > n_1(r)$ выполняется $\Phi^*(n) \geqslant q \ln r$, то

$$\sum_{n=n_1(r)+1}^{n_2(r)} |a_n| r^n \leqslant \sum_{n=n_1(r)+1}^{n_2(r)} \exp\left\{-\frac{n}{q}\Phi^*(n)\right\} r^n =$$

$$= \sum_{n=n_1(r)+1}^{n_2(r)} \exp\left\{\frac{n}{q}(q\ln r - \Phi^*(n))\right\} \leqslant \sum_{n=n_1(r)+1}^{n_2(r)} 1 \leqslant n_2(r) \leqslant \Phi(q\ln 2r). \quad (8)$$

И, наконец,

$$\sum_{n=n_2(r)+1}^{\infty} |a_n| r^n \leqslant \sum_{n=n_2(r)+1}^{\infty} \left(r\exp\left\{-\frac{1}{q}\Phi^*(n)\right\}\right)^n \leqslant \sum_{n=n_2(r)+1}^{\infty} 2^{-n} \leqslant 2. \quad (9)$$

Подставляя (6), (7), (8), (9) в (5), имеем

$$M(r) \leqslant \Phi(q\ln r)\exp\{\Phi(q\ln r)\cdot\ln r\} + \Phi(q\ln 2r) + 2 + 0(M(r)).$$

Так как $q < 1$, то $\Phi(q\ln 2r) = \ln M(2^q r^q) = 0(M(r))$ при $r\to\infty$, последнее неравенство можно переписать так: $M(r)(1+0(1)) \leqslant \Phi(q\ln r)\exp\{\Phi(q\ln r)\ln r\}$, откуда $\ln M(r) \leqslant \Phi(q\ln r)\ln r(1+0(1))$ или

$$\Phi(\ln r) \leqslant (1+0(1))\,\Phi(q\ln r)\ln r. \quad (10)$$

В неравенстве (10) сделаем замену $q\ln r = x$, $\frac{1}{q} = a > 1$. Тогда получим неравенство $\Phi(ax) \leqslant (1+0(1))\,ax\Phi(x)$, т. е., начиная с некоторого $x = x_0$, выполняется

$$\Phi(ax) \leqslant 2ax\Phi(x). \quad (11)$$

Пусть $x > x_0$ и $n = \left[\frac{\ln x - \ln x_0}{\ln a}\right]$. Тогда $a^n x_0 \leqslant x \leqslant a^{n+1}x_0$ и в силу (11) имеем

$$\Phi(x) \leqslant (2x_0)^{n+1} a^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \Phi(x_0),$$

откуда, учитывая, что $n = \frac{\ln x}{\ln a}(1+0(1))$, при $x\to\infty$ имеем $\ln\Phi(x) \leqslant \frac{(\ln x)^2}{2\ln a} \times (1+0(1))$ или в силу того, что $\ln x = (1+0(1))\ln\ln r$, получаем $\ln\ln M(r) \leqslant \frac{1+0(1)}{2\ln a}(\ln\ln r)^2$, а это противоречит условию (2). Теорема доказана.

Покажем теперь, что если условие (2) не выполняется, то утверждение теоремы, вообще говоря, не верно. Как известно [8], существует целая функция (1), для которой

$$\ln M(r) = (1+0(1))\exp\{K(\ln\ln r)^2\}, \quad (12)$$

где $K > 0$ — некоторая постоянная величина. Тогда $\Phi^*(x) = \exp\left\{\sqrt{\frac{\ln x + 0(1)}{K}}\right.$. С другой стороны, из неравенств Коши и (12) получаем

$$|a_n| \leqslant r^{-n}\exp\{(1+0(1))\exp\{K(\ln\ln r)^2\}\}. \quad (13)$$

Пусть число p такое, что $1 < p < \exp\left\{\frac{1}{2K}\right\}$. Выберем $r = \exp\left\{p\exp\times\right.$ $\left.\times\left\{\sqrt{\frac{\ln n}{K}}\right\}\right\}$ и подставим в (13). Тогда

$$|a_n| \leqslant \exp\left\{-np\exp\left\{\sqrt{\frac{\ln n}{K}}\right\} + (1+0(1))\exp\left\{K\left(\ln p + \sqrt{\frac{\ln n}{K}}\right)^2\right\}\right\} =$$

$$= \exp\left\{- np \exp\left\{\sqrt{\frac{\ln n}{K}}\right\}\left(1 - (1 + o(1)) \exp\left\{K \ln^2 p - \ln p - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - (1 - 2K \ln p) \sqrt{\frac{\ln n}{K}}\right\}\right)\right\} = \exp\left\{- np \exp\left\{\sqrt{\frac{\ln n}{K}}\right\}\left(1 + o(1)\right)\right\},$$

ввиду того, что $2K \ln p < 1$. Значит, получаем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{n\Phi^*(n)}{-\ln|a_n|} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n \exp\left\{\sqrt{\frac{\ln n + 0(1)}{K}}\right\}}{np \exp\left\{\sqrt{\frac{\ln n}{K}}\right\}(1 + 0(1))} = \frac{1}{p} < 1.$$

Автор выражает благодарность А. А. Гольдбергу за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Hadamard. Essai sur l'étude des fonctions données par leur developpement de Taylor. J. math. pures et appl., v. 8, 1892, 154—186.

2. Г. А. Фридман. Зависимость роста модуля аналитической функции от роста модуля коэффициентов ее степенного разложения. Автореф. канд. дисс., М., 1951.

3. Г. А. Фридман. Медленно возрастающие функции и их приложение. «Сиб. матем. ж.», т. 7, № 5, 1966, 1139—1160.

4. М. Н. Шеремета. О связи между ростом максимума модуля целых функций и модулями коэффициентов их степенных разложений. «Изв. вузов, Математика», № 2, 1967, 100—108.

5. М. Н. Шеремета. О связи между ростом целых или аналитических в круге функций нулевого порядка и коэффициентами их степенных разложений. «Изв. вузов, Математика», № 6, 1968, 115—121.

6. A. Schönhage. Über das Wachstum der zusammengesetzen Funktionen. Math. Z., Bd. 73, 1960, 22—44.

7. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, 1956.

8. J. Clunie. On integral functions having prescribed asymptotic growth. Canad. J. Math., v. 17, 1965, 396—404.

Поступила 15 декабря 1970 г.