О ПОДПРОСТРАНСТВАХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В. И. Гурарий

С. Банах и С. Мазур установили, что любое сепарабельное банахово пространство E можно изометрично вложить в пространство C, то есть в C существует подпространство $\tilde{E}$, изометричное E [1]. При этом вопрос о том, из какого «функционального материала» устроено подпространство $\tilde{E}$ (в зависимости от свойств E), еще мало изучен. Из результатов в этом направлении отметим теорему Б. Я. Левина и Д. П. Мильмана [2], утверждающую, что если все элементы подпространства P пространства C являются функциями ограниченной вариации, то P конечномерно. В то же время известны примеры бесконечномерных подпространств в C, все элементы которых являются дифференцируемыми (и даже аналитическими) функциями на $(0,1)$. Таким подпространством является, например, замыкание в C линейной оболочки последовательности степеней $\{t^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $n_k > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k} < \infty$ [3].

В этой заметке рассматриваются подпространства в C, все элементы которых являются дифференцируемыми функциями на $[0,1]$ или на $(0,1)$. В частности, устанавливается, что бесконечномерное рефлексивное банахово пространство нельзя изометрично вложить в C так, чтобы при этом все его элементы были дифференцируемыми функциями на $(0,1)$. Все рассматриваемые здесь пространства и функции в целях простоты изложения предполагаются вещественными.

Определение. Последовательность $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ множеств на $[0,1]$ будем называть сгущающейся, если существует последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty} \downarrow 0$, такая, что A_k образует ε_k — сеть на $[0,1]$, $k = 1, 2, \ldots$

Условимся обозначать через $\mathfrak{N}(f)$ — множество всех нулей на $[0,1]$ функции $f(t) \in C$.

Теорема 1. *Если для нормированной последовательности функций $\{f_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ из C последовательность $\{\mathfrak{N}(f_k)\}_{k=1}^{\infty}$ является сгущающейся на $[0,1]$, то найдется последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k| < \infty$, такая, что функция $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k f_k(t)$ не является всюду дифференцируемой на $[0,1]$.*

Доказательство. Будем считать, что все функции $f_k(t)$ дифференцируемы на $[0,1]$ (в противном случае теорема очевидна). Обозначим через x_k одну из точек $x \in [0,1]$, таких, что $|f_k(x)| = 1$. Очевидно, не ограничивая общности, можно считать, что $f_k(x_k) = 1$, $(k = 1, 2, \ldots)$, $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x > 0$ (все остальные возможные случаи легко сводятся к этому). Обозначим через t_k ближайшую слева к x_k точку в которой $f_k(t_k) = 0$. Предположим сначала, что $x_k \neq x$, $k = 1, 2, \ldots$ Так как $x - t_k > x - x_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ и $\frac{f_k(x) - f_k(t_k)}{x - x_k} \leqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots$, то имеем

$$\frac{f_k(x) - f_k(t_k)}{x - t_k} - \frac{f_k(x) - f_k(x_k)}{x - x_k} \geqslant \frac{f_k(x) - f_k(t_k)}{x - t_k} - \frac{f_k(x) - f_k(x_k)}{x - t_k} = \frac{1}{x - t_k}. \quad (1)$$

Примем обозначение

$$M_k = \sup_{\substack{y \in [0,1] \\ y \neq x}} \left| \frac{f_k(y) - f_k(x)}{y - x} \right|.$$

Очевидно, $0 \leqslant M_k < \infty$, $k = 1, 2, \ldots$

Мы можем индуктивным путем построить положительную последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ и натуральную последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ так, чтобы выполнялись условия

$$\frac{a_k}{x - t_{n_k}} \geqslant 5 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} a_i M_{n_i}, \quad k = 2, 3, \ldots \quad (2)$$

$$t_{n_1} < x_{n_1} < t_{n_2} < x_{n_2} < \ldots \quad (3)$$

$$a_k < 2^{i-k}(x - x_{n_i}), \quad (k > i), \ i = 1, 2, \ldots \quad (4)$$

Из (4) вытекает, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i < \infty$.

Покажем, что функция $f(t) = \sum a_k f_{n_k}(t)$ не имеет производной в точке $t = x$. Действительно, предполагая противное, мы имели бы

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{f(x) - f(t_{n_k})}{x - t_{n_k}} - \frac{f(x) - f(x_{n_k})}{x - x_{n_k}} \right| = 0. \quad (5)$$

С другой стороны, имеем при произвольном $k = 1, 2, \ldots$ по (1)—(4)

$$\left| \frac{f(x) - f(t_{n_k})}{x - t_{n_k}} - \frac{f(x) - f(x_{n_k})}{x - x_{n_k}} \right| \geqslant a_k \left| \frac{f_{n_k}(x) - f_{n_k}(t_{n_k})}{x - t_{n_k}} - \frac{f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_{n_k})}{x - x_{n_k}} \right| -$$

$$- \left[\sum_{i=1}^{k-1} a_i \left| \frac{f_{n_i}(x) - f_{n_i}(t_{n_k})}{x - t_{n_k}} - \frac{f_{n_i}(x) - f_{n_i}(x_{n_k})}{x - x_{n_k}} \right| + \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i \left| \frac{f_{n_i}(x) - f_{n_i}(t_{n_k})}{x - t_{n_k}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{f_{n_i}(x) - f_{n_i}(x_{n_k})}{x - x_{n_k}} \right| \right] \geqslant \frac{a_k}{x - t_{n_k}} - \left[2 \sum_{i=1}^{k-1} a_i M_{n_i} + 4 \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{a_i}{x - x_{n_k}} \right] \geqslant$$

$$\geqslant 5 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} a_i M_{n_i} - \left[2 \sum_{i=1}^{k-1} a_i M_{n_i} + 4 \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{k-i} \right] = 1,$$

что противоречит (5). Таким образом, функция $f(t)$ не имеет производной при $t = x$.

Предположим теперь, что начиная с некоторого k $x_k = x$ (очевидно, можно считать, отбрасывая в случае надобности первые k членов последовательности $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, что $x_1 = x_2 = \ldots = x$). Мы можем индуктивным путем построить положительную последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ и натуральную последовательность $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ так, чтобы выполнялись условия

$$\frac{a_k}{x - t_{m_k}} \geqslant k + \sum_{i=1}^{k-1} a_i M_{m_i}, \quad k = 2, 3, \ldots \tag{6}$$

$$a_k < 2^{i-k}(x - x_{m_i}), \quad k > i, \ i = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Из (7), в частности, вытекает, что $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$.

При произвольном $k = 2, 3, \ldots$, применяя (6), (7), найдем

$$\left|\frac{f(x) - f(t_{m_k})}{x - t_{m_k}}\right| \geqslant a_k \left|\frac{f_{m_k}(x) - f_{m_k}(t_{m_k})}{x - t_{m_k}}\right| - \left[\sum_{i=1}^{k-1} a_i \left|\frac{f_{m_i}(x) - f_{m_i}(t_{m_k})}{x - t_{m_k}}\right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i \left|\frac{f_{m_i}(x) - f_{m_i}(t_{m_k})}{x - t_{m_k}}\right|\right] \geqslant k + \sum_{i=1}^{k-1} a_i M_{m_i} - \left[\sum_{i=1}^{k-1} a_i M_{m_i} + 2 \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{k-i}\right] = $$
$$= k - 2$$

и таким образом функция $f(t)$ не имеет производной при $t = x$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если все элементы некоторого подпространства E пространства C являются дифференцируемыми на* $[0,1]$ *функциями, то E конечномерно.*

Доказательство. Предполагая, что E бесконечномерно, мы получим существование последовательности функций $\{f_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$, $f_m \in E$, $\|f_m\| = 1$, $m = 1, 2, \ldots$ такой, что $f_m\left(\frac{k}{m}\right) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, m$; $m = 1, 2, \ldots$.

Но тогда по теореме 1 для некоторой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ будем иметь, что функция $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(t)$ не является всюду дифференцируемой на $[0,1]$. При этом очевидно $f(t) \in E$, что противоречит условию теоремы.

Определим класс P подпространств в C, считая, что $E \in P$, если все элементы подпространства E являются дифференцируемыми функциями на $(0,1)$.

Теорема 3. *Если $E \in P$, то для произвольных* $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $N > 0$ *и функции $g(t) \in E$ найдется такое $\delta = \delta(g, \varepsilon_1, \varepsilon_2, N)$, что если какая-либо функция $f(t) \in E$, $\|f\| \leqslant N$ интерполирует $g(t)$ в узлах, образующих δ-сеть на* $[0\ 1]$, *то имеет место неравенство*

$$\max_{t \in [\varepsilon_1, 1-\varepsilon_1]} |f(t) - g(t)| < \varepsilon_2.$$

Доказательство. Предполагая, что для некоторых $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $N > 0$ и $g \in E$ утверждение теоремы не имеет места, мы получим существование последовательности $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, $f_i \in E$, $\|f_i\| \leqslant N$, $i = 1, 2, \ldots$ такой, что последовательность $\{\mathfrak{R}(f_i - g)\}_{i=1}^{\infty}$ является сгущающейся на $[0,1]$ и

$$\max_{t \in [\varepsilon_1, 1-\varepsilon_1]} |f_i(t) - g(t)| \geqslant \varepsilon_2, \; i = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

По теореме 1 найдется последовательность $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$ такая, что функция $f(t) = \sum \frac{a_i (f_i - g)}{\|f_i - g\|_{C[\varepsilon_1, 1-\varepsilon_1]}}$ не является всюду дифференцируемой на интервале $[\varepsilon_1, 1-\varepsilon_1]$. Так как по (8)

$$\left\| \frac{f_i - g}{\|f_i - g\|_{C[\varepsilon_1, 1-\varepsilon_1]}} \right\| \leqslant \frac{1}{\varepsilon_2}(N + \|g\|),$$

то из условия $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$ вытекает, что $f(t) \in E$, а это противоречит условию теоремы 3. Теорема доказана.

Теорема 4. *Если $E \in P$, $\dim E < \infty$, то для произвольных $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ найдется функция $f \in E$, $\|f\| = 1$ такая, что*

$$\|f\|_{C[\varepsilon_1, 1-\varepsilon_1]} \leqslant \varepsilon_2.$$

Доказательство. Выберем столь большое натуральное n, чтобы выполнялось условие $\frac{1}{n} < \delta(g, \varepsilon_1, \varepsilon_2, 1)$, где функция $\delta(g, \varepsilon_1, \varepsilon_2, N)$ удовлетворяет условию теоремы 3, а $g(t) \equiv 0$. Так как $\dim E = \infty$, то найдется функция $f(t) \in E$, $\|f\| = 1$, такая, что $f\left(\frac{k}{n}\right) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Но тогда по теореме 3 $\|f\|_{C[\varepsilon_1, 1-\varepsilon_1]} \leqslant \varepsilon_2$. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Если $E \in P$, то для любого $\varepsilon > 0$ в E найдется подпространство E_ε, ε — изометричное* пространству c_0.*

Доказательство. Обозначим через E_1 подпространство в E, состоящее из всех функций $f \in E$, таких что $f(0) = f(1) = 0$. Очевидно, $\dim E_1 = \infty$. Для данного $\varepsilon > 0$ выберем положительную последовательность $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ так, чтобы выполнялось условие $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon$. Выберем произвольную функцию $f_1(t) \in E_1$, $\|f_1\| = 1$. Найдется такое $\delta_1 > 0$, что при $t \in [0, \delta_1] \cup [1 - \delta_1, 1]$ будем иметь $|f_1(t)| < \varepsilon_1$. По теореме 4 найдется функция $f_2(t) \in E_1$, $\|f_2\| = 1$, такая, что $\max_{t \in [\delta_1, 1-\delta_1]} |f_2(t)| < \varepsilon_1$. Так как $f_i(0) = f_i(1) = 0$ $i = 1, 2$, то найдется $\delta_2 > 0$ такое, что при $t \in [0, \delta_2] \cup [1 - \delta_2, 1]$ будем иметь

$$|f_1(t)| < \varepsilon_2, \quad |f_2(t)| < \varepsilon_2.$$

* Банаховы пространства E_1 и E_2 называются ε-изометричными, если существует изоморфизм T E_1 на E_2, такой, что для любого $x \in E_1$:

$$(1 - \varepsilon)\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant (1 + \varepsilon)\|x\|.$$

c_0 — это пространство всех сходящихся к нулю последовательностей $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ с естественно определенными векторными операциями и нормой $\|\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}\| = \max |\xi_i|$. Естественный базис в c_0 — это базис $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, где

$$e_i = \{\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, 0, \ldots\}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

По теореме 4 найдется функция $f_3(t) \in E_1$, $\|f_3\| = 1$, такая, что $\max\limits_{t \in [\delta_2,\, 1-\delta_2]} |f_3(t)| < \varepsilon_1$. Продолжая неограниченно этот процесс, мы получим последовательность $\{\delta_i\}_{i=1}^{\infty} \downarrow 0$ и последовательность функций $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ $f_i \in E_1$, $\|f_i\| = 1$, $i = 1, 2, \ldots$ такую, что выполнены условия

$$\max_{t \in [0,\, \delta_i] \cup [1-\delta_i,\, 1]} |f_j(t)| < \varepsilon_i, \quad j = 1, 2, \ldots, i \tag{9}$$

$$\max_{t \in [\delta_i,\, 1-\delta_i]} |f_{i+1}(t)| < \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — естественный базис в c_0. Обозначим подпространство в E_1, натянутое на $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, через E_ε и покажем, что линейный оператор T, определенный равенствами $Te_i = f_i$, $i = 1, 2, \ldots$, продолжается на все c_0 как ε-изометрия c_0 на E_ε. Пусть $x \in c_0$, $\|x\| = 1$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Тогда при некотором натуральном i_0 $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\alpha_i| = |\alpha_{i_0}| = 1$. Имеем

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i, \quad \|Tx\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \Big|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t)\Big|.$$

Оценивая $\|Tx\|$, рассмотрим множества

$$M_k = [\delta_{k+1}, \delta_k] \cup [1-\delta_k, 1-\delta_{k+1}], \quad k = 0, 1, \ldots \quad \left(\delta_0 = \frac{1}{2}\right)$$

$$N_k = [0, \delta_k] \cup [1-\delta_k, 1], \quad k = 1, 2 \ldots$$

Имеем по (9), (10)

$$\max_{t \in M_k} \Big|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t)\Big| \leqslant \max_{t \in M_k} |f_k(t)| + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \max_{t \in M_k} |f_i(t)| \leqslant 1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \varepsilon_i < 1 + \varepsilon,$$

$$k = 0, 1, \ldots, n$$

$$\max_{t \in N_{n+1}} \Big|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t)\Big| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \varepsilon_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i < \varepsilon,$$

и так как $\bigcup\limits_{k=0}^{n} M_k \cup N_{n+1} = [0,1]$, то

$$\|Tx\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \Big|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t)\Big| \leqslant 1 + \varepsilon, \tag{11}$$

С другой стороны, снова применяя (9), (10), имеем

$$\|Tx\| = \max_{t \in [0,1]} \Big|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t)\Big| \geqslant \max_{t \in M_{i_0}} \Big|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t)\Big| \geqslant \max_{t \in M_{i_0}} |\alpha_{i_0} f_{i_0}(t)| -$$

$$- \max_{t \in M_{i_0}} \Big|\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} \alpha_i f_i(t)\Big| \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Из (11), (12) получаем

$$1 - \varepsilon \leqslant \|Tx\| \leqslant 1 + \varepsilon,$$

Продолжая T на все c_0, получим требуемую ε-изометрию c_0 на E_ε. Теорема 5 доказана.

Так как в рефлексивном пространстве не существует подпространства, изоморфного c_0 [4], то из теоремы 5 вытекает следующее

Следствие. *Рефлексивное пространство класса P конечномерно.*

Обозначим через $E(\{n_k\}_1^\infty)$ замыкание в C линейной оболочки последовательности $\{t^{n_k}\}_1^\infty$, $n_k > 0$. Так как при $\sum_1^\infty \frac{1}{n_k} < \infty E(\{n_k\}_1^\infty) \in P$ [5], то с помощью теоремы 5 легко устанавливается следующее усиление известной теоремы Мюнтца о неполноте $\{t^{n_k}\}_1^\infty$ в C, $\sum_1^\infty \frac{1}{n_k} < \infty$.

Теорема 6. *Если* $\sum_1^\infty \frac{1}{n_k} < \infty$, *то* $E(\{n_k\}_1^\infty)$ *имеет меньшую линейную размерность, чем* C.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Банах. Курс функціонального аналізу. Вид-во «Радшкола». К., 1948.
2. Б. Я. Левин и Д. П. Мильман. О подпространствах в пространстве C, состоящих из функций ограниченной вариации. «Зап. Харьк. матем. об-ва», (4), 16 (1940), 102—105.
3. А. Ф. Леонтьев. Об одной последовательности полиномов. ДАН СССР, 72, № 4 (1950). 621—624.
4. М. Дэй. Нормированные линейные пространства. Изд-во иностр. лит., М., 1961.
5. L. Schwartz, Etude de sommes d'exponentielles reelles, Paris, 1943.

Поступила 12 апреля 1966 г.