МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені В. Н. КАРАЗІНА

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

В 3-х частинах

Частина 2. Криві та поверхні другого порядку

Навчально-методичний посібник
для самостійної роботи та практичних занять

Харків – 2023

УДК 514.12(075.8)
А 64

Рецензенти:

К. В. Максименко-Шейко – доктор технічних наук, професор, заступник директора з наукової роботи Інституту проблем машинобудування імені А. М. Підгорного НАН України;

М. Г. Кокодій – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах ННІ комп'ютерної фізики та енергетики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

Затверджено до друку рішенням Науково-методичної ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (протокол № 3 від 19 грудня 2023 року)

А 64 **Аналітична** геометрія. В 3-х частинах. Частина 2. Криві та поверхні другого порядку : навчально-методичний посібник для самостійної роботи та практичних занять / уклад. Т. Г. Віхтинська, К. Е. Нємченко. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2023. – 40 с.

Навчально-методичний посібник для самостійної роботи та практичних занять призначено для ознайомлення з основами аналітичної геометрії в її застосуваннях у задачах фізики.

Основна увага приділена набуттю студентами навичок розв'язання задач і, зокрема, формулюванню фізичних задач мовою математики. Цей посібник є складовою частиною загального навчально-методичного комплексу з аналітичної геометрії і містить задачі для проведення практичних занять за темою «Криві та поверхні другого порядку». Посібник розрахований на студентів фізичних спеціальностей університетів, зокрема студентів першого курсу науково-навчального інституту комп'ютерної фізики та енергетики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

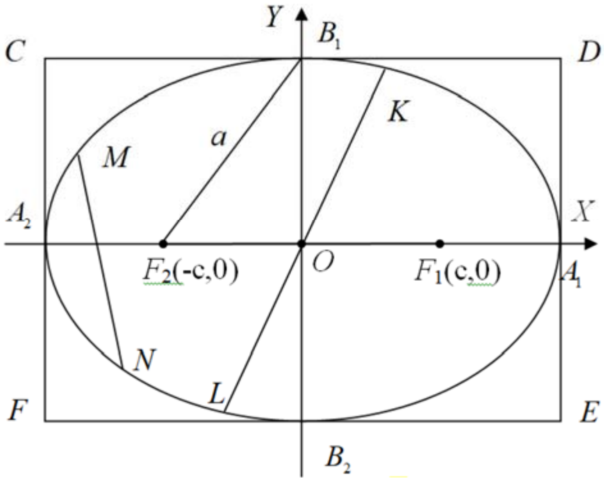
УДК 514.12(075.8)

© Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, 2023
© Віхтинська Т. Г., Нємченко К. Е., уклад., 2023
© Дончик І. М., макет обкладинки, 2023

Зміст

Довідковий матеріал. Геометрія визначень

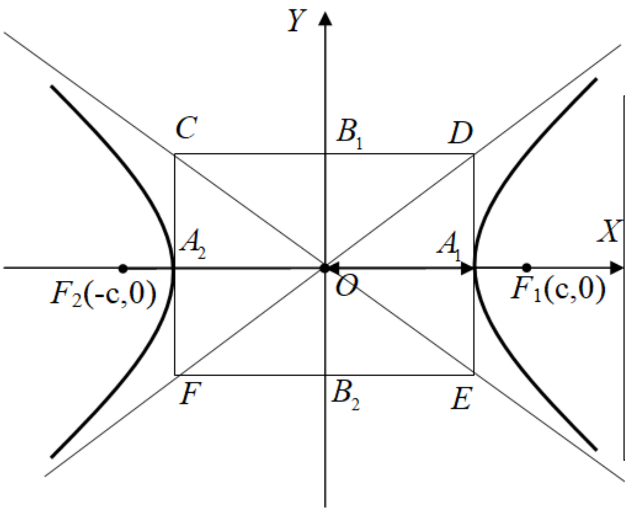
1. **Еліпс –** це геометричне місце точок площини, для кожної з яких сума відстаней до двох фіксованих точок є величина стала, більша за відстань між фокусами, і дорівнює 2*a*.



O - центр еліпса,
A_1, A_2, B_1, B_2 - вершини,
OA_1, OA_2 - великі півосі,
OB_1, OB_2 - малі півосі,
$CDEF$ основний прямокутник,
KL - приклад діаметра,
MN - приклад хорди

Рис. 1. *Основні параметри еліпса*

2. **Гіпербола –** це геометричне місце точок площини, для кожної з яких модуль різниці відстаней від фокусів є сталою величиною, меншою за віддаль між фокусами, і дорівнює 2*a*.



F_1, F_2 - фокуси гіперболи,
O - центр гіперболи,
A_1, A_2- вершини,
FD, CE - асимптоти
A_1A_2 - дійсна вісь,
B_1B_2 - уявна вісь,
$CDEF$ - основний прямокутник

Рис. 2. *Основні параметри гіперболи*

3. **Парабола** – це геометричне місце точок площини, рівновіддалених від заданої точки (фокуса) і заданої прямої (директриси).

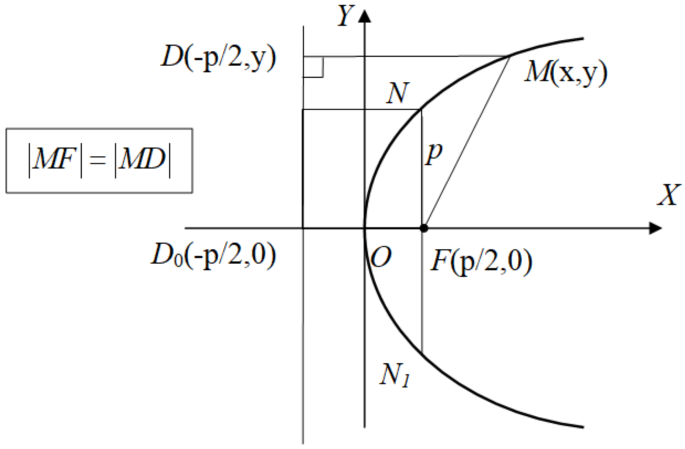


Рис. 3. *Основні параметри параболи*

Теорема про визначення еліпса, параболи й гіперболи за допомогою директриси й ексцентриситету.

Множина точок, для кожної з яких відношення відстані до заданої точки (фокуса) до відстані до заданої прямої (директриси) є сталою величиною і дорівнює ексцентриситету, являє собою

а) еліпс, якщо $e < 1$;

б) параболу, якщо $e = 1$;

в) гіперболу, якщо $e > 1$.

Окремому випадку $e = 0$ відповідає окружність, $e = \sqrt{2}$ – рівнобічна гіпербола.

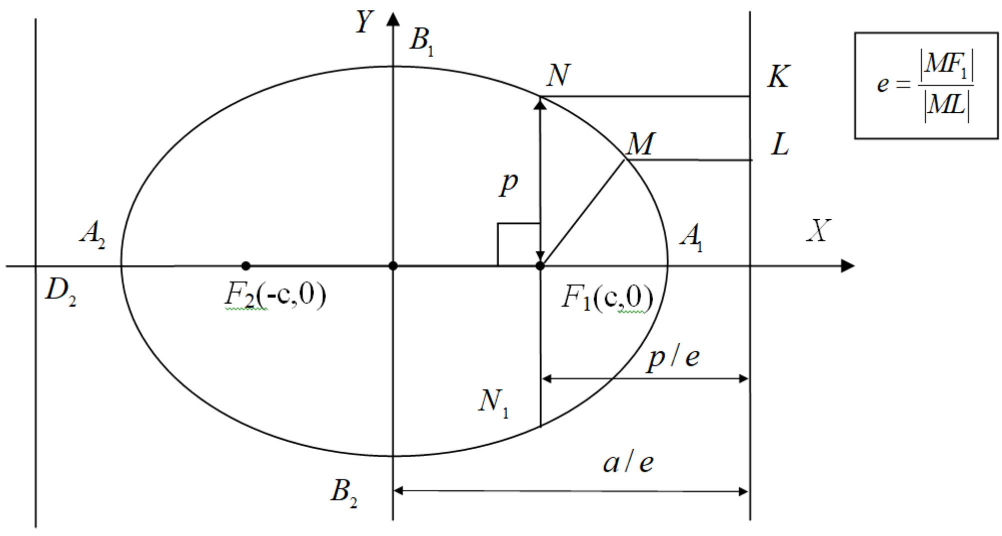


Рис. 4. *До визначення еліпса через директрису й ексцентриситет*

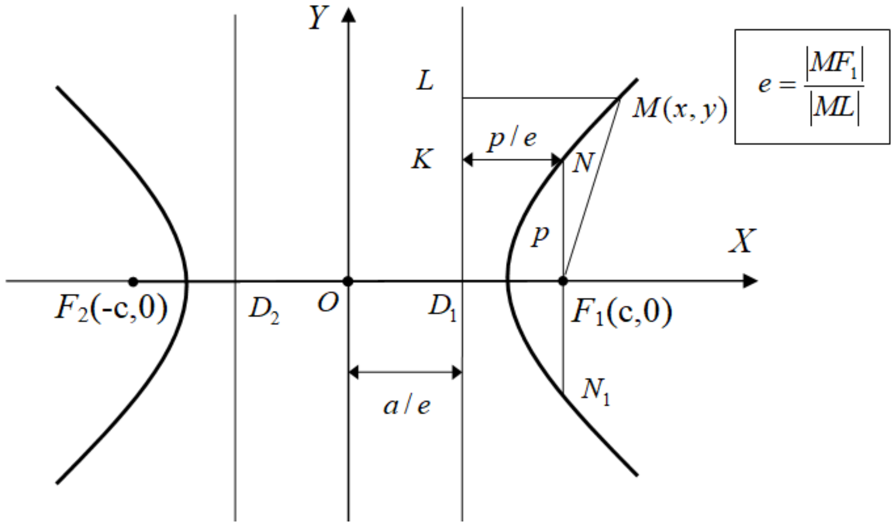
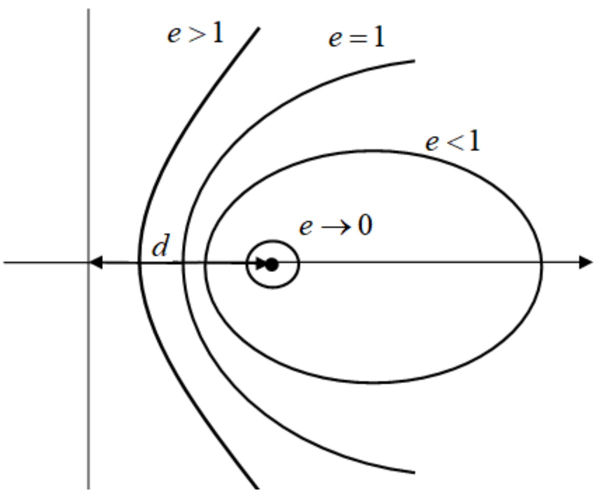


Рис. 5. *До визначення гіперболи через директрису й ексцентриситет*

Порівняльний аналіз характеристик кривих другого порядку

<table>
<tr><th></th><th>Парабола</th><th>Еліпс</th><th>Гіпербола</th></tr>
<tr><td>1. Визначення</td><td>$|FM| = |MD|$</td><td>$|MF_1| + |MF_2| = 2a$</td><td>$\big||MF_1| - |MF_2|\big| = 2a$</td></tr>
<tr><td>2. Канонічне рівняння</td><td>$y^2 = 2px$</td><td>$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$</td><td>$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3. Фокуси</td><td rowspan="2">$F\left(\frac{p}{2},0\right)$</td><td colspan="2">$F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$</td></tr>
<tr><td>$c^2 = a^2 - b^2$</td><td>$c^2 = a^2 + b^2$</td></tr>
<tr><td>4. Фокальний параметр</td><td>p</td><td colspan="2">$p = b^2/a$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5. Ексцентриситет</td><td rowspan="2">$e = 1$</td><td colspan="2">$e = c/a$</td></tr>
<tr><td>$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$, $e < 1$</td><td>$e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$, $e > 1$</td></tr>
<tr><td>6. Відстань від фокуса до директриси</td><td>$|FD| = \frac{p}{e} = p$</td><td colspan="2">$|F_1D_1| = |F_2D_2| = \frac{p}{e}$</td></tr>
<tr><td>7. Відстань від початку координат до директриси</td><td>$|OD| = \frac{p}{2}$</td><td colspan="2">$|OD_1| = |OD_2| = \frac{a}{e}$</td></tr>
<tr><td>8. Основний прямокутник</td><td>–</td><td colspan="2">$x = \pm a$, $y = \pm b$</td></tr>
</table>



$$r = \frac{de}{1 - e\cos\varphi}$$

Рис. 6. *Лінії другого порядку в полярній системі відліку при різних значеннях ексцентриситету і при постійній відстані від фокуса до директриси*

Таблиця елементарних властивостей еліпса

Канонічне рівняння еліпса	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b>0$
Вершини еліпса	$A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$ – вершини еліпса на осі *Ox* $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ – вершини еліпса на осі *Oy*
Велика і мала осі еліпса	a – велика піввісь; $2a$ – велика вісь; b – мала піввісь; $2b$ – мала вісь **Велика піввісь та, на якій знаходяться фокуси!**
Основний прямокутник	$x=\pm a$, $y=\pm b$
Відстань від центра еліпса до фокуса	$c^2=a^2-b^2$ $c=\sqrt{a^2-b^2}$
Координати фокусів	$F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$
Відстань між фокусами (фокальна відстань)	$F_1F_2=2c$
Фокальна властивість еліпса	Еліпс – множина точок, сума відстаней яких від фокусів є стала і ***більша*** за відстань між фокусами $r_{1,}+r_2=2a>2c$ Фокуси знаходяться всередині еліпса
Ексцентриситет	$\varepsilon=\frac{c}{a},\ \varepsilon<1$ Ексцентриситет дорівнює відношенню ***відстані від центра*** еліпса ***до великої осі***
Директриси	$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ Директриси еліпса паралельні осі *Oy* *(паралельні малій осі),* симетричні відносно осі *Oy і* знаходяться поза еліпсом на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від центра еліпса (точки O(0;0) для канонічного еліпса)
Фокальні радіуси	$r_{1,2}=a\mp\varepsilon x$, $r_1+r_2=2a$
Фокальний параметр	$p=\frac{b^2}{a}$
Фокально-директоріальна властивість еліпса	$\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon<1$
Відстань від фокуса до відповідної директриси	$\lvert F_1D_1\rvert=\lvert F_2D_2\rvert=\frac{p}{e}$

Відстань від початку координат до відповідної директриси	$\lvert OD_1\rvert = \lvert OD_2\rvert = \frac{a}{e}$
Відстань d_1 і d_2 точки $M_0(x_0, y_0)$ еліпса до директриси	$d_1 = \frac{a}{\varepsilon} - x_0$, $d_2 = \frac{a}{\varepsilon} + x_0$
Оптична властивість еліпса	Якщо помістити в один з фокусів еліпса точкове джерело світла, то всі промені після відбиття від еліпса зійдуться в іншому його фокусі
Спряжені діаметри	$y = kx \qquad y = -\frac{b^2}{ka^2}x$
Зв'язок між кутовими коефіцієнтами спряжених діаметрів	$kk' = -\frac{b^2}{a^2}$
Параметричне рівняння еліпса	$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi)$
Рівняння еліпса у полярній системі координат	$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$, $\qquad \varepsilon < 1$
Канонічне рівняння кола	$x^2 + y^2 = R^2$
Параметричне рівняння кола	$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi)$
Рівняння еліпса, який повернений на 90 градусів (переорієнтування осей)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\underline{b > a} > 0$
Вершини еліпса	$A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$ – вершини еліпса на осі *Ox* $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ – вершини еліпса на осі *Oy*
Велика і мала осі еліпса	a – мала піввісь; $2a$ – мала вісь; b – велика піввісь; $2b$ – велика вісь
Основний прямокутник	$x = \pm a$, $y = \pm b$
Відстань від центра еліпса до фокуса	$c^2 = b^2 - a^2 \qquad c = \sqrt{b^2 - a^2}$
Координати фокусів	$F_1(0;c)$, $F_2(0;-c)$
Ексцентриситет	$\varepsilon = \frac{c}{b} \qquad \varepsilon < 1$
Директриси	$y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$ Директриси еліпса паралельні осі *Ox* *(паралельні малій осі),* симетричні відносно осі *Ox і* знаходяться поза еліпсом на відстані $\frac{b}{\varepsilon}$ від центра еліпса (точки O(0;0) для канонічного еліпса)

Фокальна властивість еліпса	Еліпс – множина точок, сума відстаней яких від фокусів є стала і ***більша*** за відстань між фокусами $r_{1,} + r_2 = 2b > 2c$
Відстань від початку координат до відповідної директриси	$\lvert OD_1 \rvert = \lvert OD_2 \rvert = \frac{b}{e}$
Фокальні радіуси	$r_{1,2} = b \pm \varepsilon y$
Фокальний параметр	$p = \frac{a^2}{b}$
Відстань d_1 і d_2 точки $M_0(x_0,y_0)$ еліпса від директриси	$d_1 = \frac{a}{\varepsilon} - y_0 \qquad d_2 = \frac{a}{\varepsilon} + y_0$

Таблиця елементарних властивостей гіперболи

Канонічне рівняння гіперболи	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$
Вершини гіперболи	$A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$ – вершини еліпса на осі *Ox*
Дійсна та уявна осі гіперболи	a – дійсна піввісь; $2a$ – дійсна вісь; b – уявна піввісь; $2b$ – уявна вісь
Основний прямокутник	$x = \pm a$, $y = \pm b$
Асимптоти гіперболи	$y = \pm \frac{b}{a}$
Відстань від центра гіперболи до фокуса	$c^2 = a^2 + b^2$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
Координати фокусів	$F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$
Відстань між фокусами (фокальна відстань)	$F_1F_2=2c$ $2c>2a$
Фокальна властивість гіперболи	Гіпербола – множина точок, модуль різниці відстаней яких від фокусів є сталою і **меншою** за відстань між фокусами $\lvert r_1 - r_2 \rvert = 2a < 2c$ або $r_{2,} - r_1 = \pm 2a < 2c$
Ексцентриситет	$\varepsilon = \frac{c}{a}$, $\varepsilon > 1$ Ексцентриситет дорівнює відношенню ***відстані від центра*** гіперболи ***до дійсної осі***
Директриси	$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ Директриси гіперболи паралельні осі *Oy* *(паралельні уявній осі),* симетричні відносно осі *Oy і* знаходяться між вершинами на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від центра гіперболи (точки O(0;0) для канонічної гіперболи)
Фокальні радіуси	$r_{1,2} = \lvert \varepsilon x \mp a \rvert$ Права гілка $r_2 = \varepsilon x + a$, $r_1 = \varepsilon x - a$ Ліва гілка $r_2 = -\varepsilon x - a$ $r_1 = -\varepsilon x + a$

Фокальний параметр	$p=\dfrac{b^2}{a}$
Фокально-директоріальна властивість гіперболи	$\dfrac{r_1}{d_1}=\dfrac{r_2}{d_2}=\varepsilon>1$
Відстань від фокуса до відповідної директриси	$\lvert F_1D_1\rvert=\lvert F_2D_2\rvert=\dfrac{p}{e}$
Відстань від початку координат до відповідної директриси	$\lvert OD_1\rvert=\lvert OD_2\rvert=\dfrac{a}{e}$
Відстань d_1 і d_2 точки $M_0(x_0,y_0)$ еліпса до директриси	$d_1=x_0-\dfrac{a}{\varepsilon_0}$, $d_2=x_0+\dfrac{a}{\varepsilon_0}$
Оптична властивість гіперболи	Якщо помістити в один з фокусів гіперболи точкове джерело світла, то кожний промінь після відбиття від гіперболи начебто виходить з іншого фокуса
Спряжені (сполучені) діаметри	$y=kx$ $y=k'=-\dfrac{b^2}{ka^2}x$
Зв'язок між кутовими коефіцієнтами спряжених діаметрів	$kk'=\dfrac{b^2}{a^2}$
Параметричні рівняння гіперболи	$\begin{cases}x=\pm a\cdot cht\\ y=b\cdot sht\end{cases}$ $t\in R$
Рівняння гіперболи у полярній системі координат	$\rho=\dfrac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$, $\varepsilon>1$

Таблиця елементарних властивостей сполученої гіперболи

Канонічне рівняння гіперболи	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$, $a,b>0$
Вершини гіперболи	$B_1(0;b)$, $B_2(0;b)$ – вершини еліпса на осі Oy
Дійсна та уявна осі гіперболи	a – уявна піввісь; $2a$ – уявна вісь; b – дійсна піввісь; $2b$ – дійсна вісь
Основний прямокутник	$x=\pm a$, $y=\pm b$
Асимптоти гіперболи	$y=\pm\frac{b}{a}$
Відстань від центра гіперболи до фокуса	$c^2=a^2+b^2$ $c=\sqrt{a^2+b^2}$
Координати фокусів	$F_1(0;c)$, $F_2(0;-c)$
Відстань між фокусами (фокальна відстань)	$F_1F_2=2c$ $2c>2a$
Фокальна властивість гіперболи	Гіпербола – множина точок, модуль різниці відстаней яких від фокусів є сталою і **меншою** за відстань між фокусами $\left\|r_1-r_2\right\|=2b<2c$ або $r_{2,}-r_1=\pm 2b<2c$
Ексцентриситет	$\varepsilon=\frac{c}{b}$, $\varepsilon>1$ Ексцентриситет дорівнює відношенню ***відстані від центра*** гіперболи ***до дійсної осі***
Директриси	$y=\pm\frac{b}{\varepsilon}$ Директриси гіперболи паралельні осі *Ox* *(паралельні уявній осі),* симетричні відносно осі *Ox і* знаходяться між вершинами на відстані $\frac{b}{\varepsilon}$ від центра гіперболи (точки O(0;0) для канонічної гіперболи)
Фокальні радіуси	$r_{1,2}=\left\|\varepsilon x\mp b\right\|$
Фокальний параметр	$p=\frac{a^2}{b}$

Фокально-директоріальна властивість гіперболи	$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon > 1$
Відстань від фокуса до відповідної директриси	$\lvert F_1D_1 \rvert = \lvert F_2D_2 \rvert = \frac{p}{e}$
Відстань від початку координат до відповідної директриси	$\lvert OD_1 \rvert = \lvert OD_2 \rvert = \frac{b}{e}$
Відстань d_1 і d_2 точки $M_0(x_0,y_0)$ еліпса до директриси	$d_1 = y_0 - \frac{b}{\varepsilon_0}, \quad d_2 = y_0 + \frac{b}{\varepsilon_0}$

Таблиця елементарних властивостей параболи

Канонічне рівняння параболи	$y^2 = 2px, \quad p > 0$
Вершини гіперболи	O(0;0) – вершини параболи в початку координат
Координати фокуса	$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
Фокально-директоріальна властивість параболи	Парабола – множина точок, які рівновіддалені від фокуса і директриси $r = d$
Ексцентриситет	$\varepsilon = \frac{r}{d}, \ \varepsilon = 1$
Директриси	$x = -\frac{p}{2}$
Фокальний радіус	$r = x + \frac{p}{2}$
Фокальний параметр	p
Відстань від фокуса до директриси	$\lvert FD \rvert = \frac{p}{e} = p$
Відстань від початку координат до директриси	$\lvert OD \rvert = \frac{p}{2}$
Відстань d точки $M_0(x_0,y_0)$ параболи до директриси	$d = x_0 + \frac{p}{2}$
Оптична властивість параболи	Якщо помістити у фокус параболи точкове джерело світла, то всі промені, відбиті від параболи, спрямовуються паралельно фокальній осі параболи
Спряжені (сполучені) діаметри	$y = \frac{p}{k}$
Рівняння параболи у полярній системі координат	$\rho = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$

Загальне рівняння кривої другого порядку

1. Канонічні рівняння кривих другого порядку

Канонічне рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

Канонічне рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

Канонічне рівняння параболи

$$y^2=2px.$$

2. Загальне рівняння кривої другого порядку

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0.$$

3. Інваріанти кривих другого порядку

Перший інваріант – *шпур* (*Sp*), *трек* (*Tr*) або *слід* матриці $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$:

$$I_1=Sp\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}=Tr\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}=a_{11}+a_{22}.$$

Другий інваріант – малий, або другий визначник

$$I_2=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\equiv\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{12}.$$

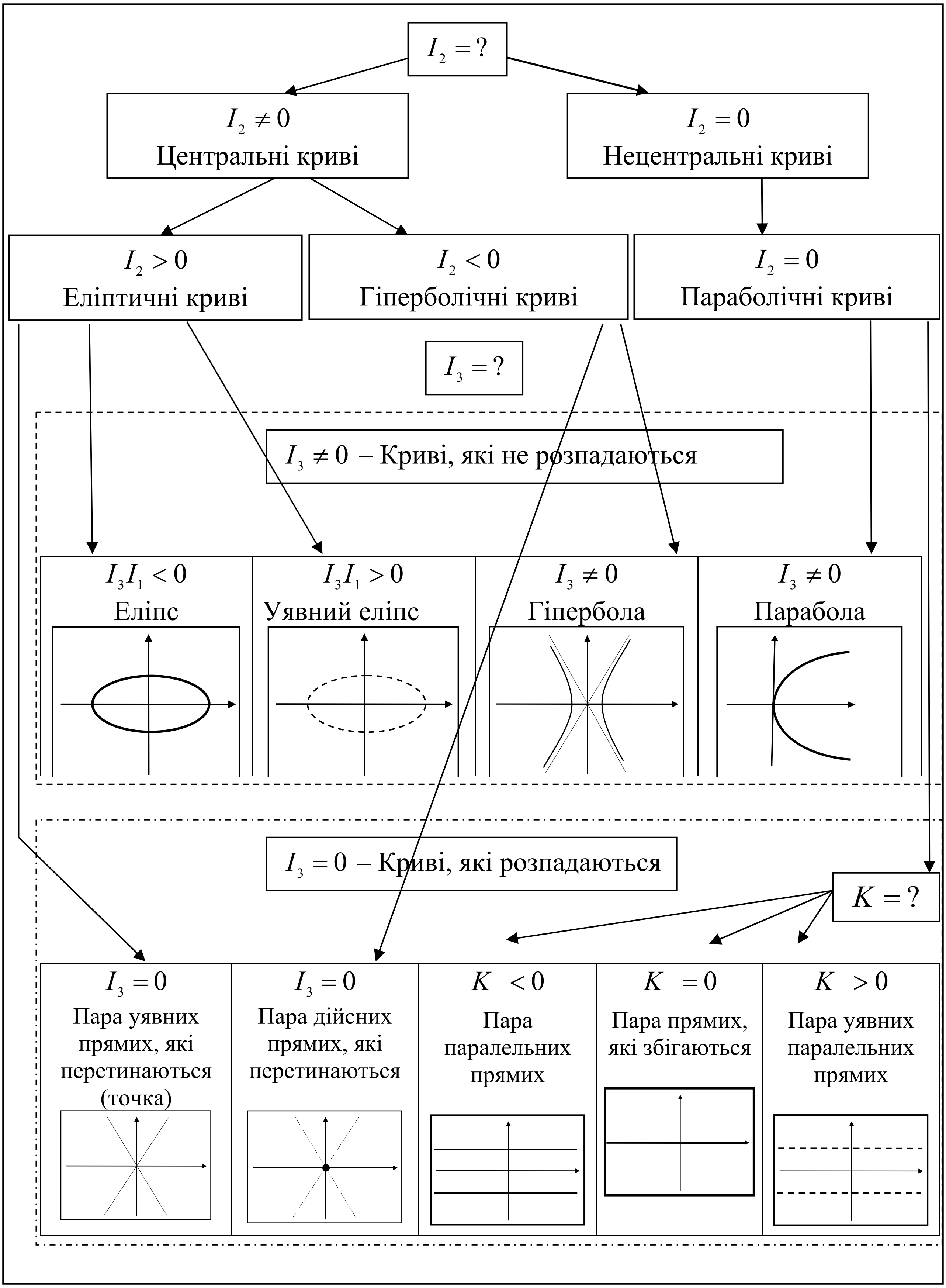
Третій інваріант – великий, або третій визначник

$$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}\equiv\det\left\|a_{ij}\right\|, \text{ де } i,j=1,2,3.$$

Напівінваріант K є інваріантом при поворотах, а для кривих, у яких другий і третій інваріанти дорівнюють нулю, є інваріантом і при паралельних перенесеннях.

$$K=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

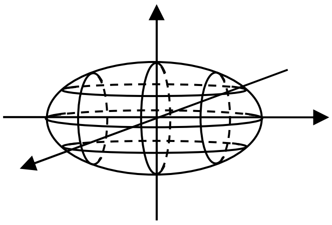
Класифікація і алгоритм визначення виду кривої другого порядку за допомогою інваріантів



Поверхні другого порядку

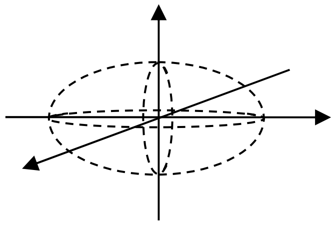
Дійсний еліпсоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



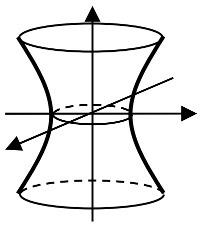
Уявний еліпсоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$



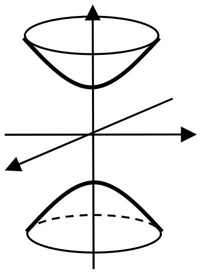
Гіперболоїд з однією порожниною

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



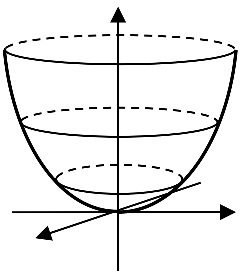
Гіперболоїд з двома порожнинами

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



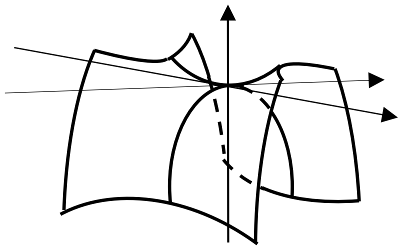
Еліптичний параболоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$



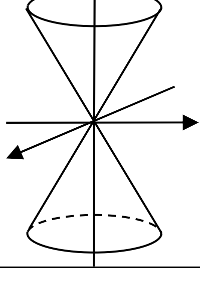
Гіперболічний параболоїд

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$



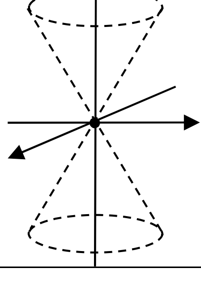
Реальний конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

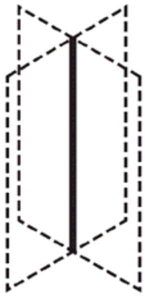
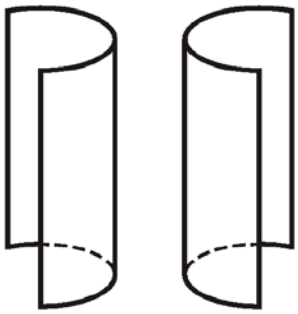
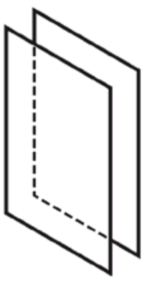
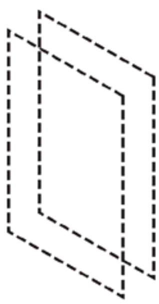


Уявний конус (точка)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$



Дев'ять циліндрів, що відповідають дев'ятьом лініям другого порядку

Еліптичний циліндр  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Пряма лінія (дві уявні площини, які перетинаються)  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	Уявний еліптичний циліндр  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$
Гіперболічний циліндр  $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	Дві площини, які перетинаються  $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	Параболічний циліндр  $y^2=2px$
Дві паралельні площини  $y^2=h^2$	Дві площини, які збігаються  $y^2=0$	Дві уявні паралельні площини  $y^2=-h^2$

Практичне заняття № 1

Визначення ліній. Канонічне рівняння

Задача 1.01. Знайти велику піввісь, малу піввісь, координати фокусів та вершин даних еліпсів і зобразити їх на рисунку:

а) $x^2/16 + y^2/9 = 1$; б) $x^2/9 + y^2/16 = 1$;

в) $36x^2 + 49y^2 = 256$; г) $x^2 + y^2 = 1$.

Задача 1.02. Знайти дійсну піввісь, уявну піввісь, координати фокусів та вершин даних гіпербол і зобразити їх на рисунку:

а) $x^2/16 - y^2/9 = 1$; б) $x^2/9 - y^2/4 = 1$; в) $4x^2 - 25y^2 = 100$;

г) $36x^2 - 49y^2 = 256$; д) $-x^2 + 16y^2 = 64$; є) $4x^2 - 9y^2 = 3 - 6$;

е) $-25x^2 + 4y^2 = -100$; ж) $-x^2 + y^2 = 1$; з) $x^2 - 9y^2 = -1$.

Задача 1.03. Визначити величину параметра, координати фокуса наступних парабол і зобразити їх на рисунку

а) $y^2 = 8x$; б) $x^2 = -8y$; в) $y^2 = -6x$; г) $x^2 = 6y$.

Задача 1.04. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться на осі абсцис, а центр у початку координат, якщо:

1) він є вписаний у прямокутник зі сторонами 4 та 9;

2) його велика піввісь дорівнює 4, а мала вісь – 2;

3) його осі дорівнюють 10 та 6;

4) велика вісь дорівнює 12, а відстань між фокусами – 6.

Задача 1.05. Скласти канонічне рівняння гіперболи у канонічний системі, якщо:

1) основним прямокутником є прямокутник зі сторонами 4 та 9;

2) її дійсна піввісь дорівнює 4, а уявна вісь – 2.

Задача 1.06. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться на осі абсцис, а центр у початку координат, якщо:

1) її осі дорівнюють 10 та 6;

2) дійсна вісь дорівнює 12, а відстань між фокусами – 6.

Задача 1.07. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо вона розміщена симетрично відносно осі

1) Ox і має фокус F(-5, 0);

3) Oy, а відстань від вершини до фокуса дорівнює 5.

Завдання для самостійної роботи № 1

Визначення ліній. Канонічне рівняння

Задача 1.08. Знайти велику піввісь, малу піввісь, координати фокусів та вершин даних еліпсів і зобразити їх на рисунку:

а) $x^2 + 16y^2 = 64$; б) $16x^2 + y^2 = 64$;

в) $4x^2 + 9y^2 = 36$; г) $25x^2 + 4y^2 = 100$.

Задача 1.09. Знайти дійсну піввісь, уявну піввісь, координати фокусів та вершин даних гіпербол і зобразити їх на рисунку:

а) $36x^2 - 9y^2 = 324$; б) $x^2/9 - y^2/4 = -1$;

в) $-4x^2 + 9y^2 = 36$; г) $25x^2 - 4y^2 = 100$;

д) $x^2/16 - y^2/9 = -1$; е) $-5x^2 + 16y^2 = 80$;

ж) $-x^2 + 9y^2 = -36$; з) $-x^2 + y^2 = 4$.

Задача 1.010. Визначити величину параметра, координати фокуса наступних парабол і зобразити їх на рисунку:

а) $y^2 = 10x$; б) $x^2 = -2y$; в) $y^2 = -10x$; г) $x^2 = 2y$.

Задача 1.011. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться на осі абсцис, а центр у початку координат, якщо:

1) він є вписаний у прямокутник зі сторонами 25 та 16;
2) його велика вісь дорівнює 10, а мала піввісь – 1;
3) його осі дорівнюють 12 та 8;
4) мала вісь дорівнює 8, а відстань між фокусами – 10.

Задача 1.012. Скласти канонічне рівняння гіперболи у канонічний системі, якщо:

1) основним прямокутником є прямокутник зі сторонами 25 та 16;
2) її дійсна вісь дорівнює 10, а уявна піввісь – 1.

Задача 1.013. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться на осі абсцис, а центр у початку координат, якщо:

1) її осі дорівнюють 12 та 8;
2) уявна вісь дорівнює 8, а відстань між фокусами – 10.

ача 1.014. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо вона розміщена симетрично відносно осі

1) Oy і має фокус F(0, 3);
2) Ox, а відстань від вершини до фокуса дорівнює 5.

Практичне заняття № 2

Визначення ліній. Канонічна система координат

Задача 2.1. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо вона розміщена симетрично відносно осі Ox і проходить через точку М(9, 6).

Задача 2.2. Скласти рівняння параболи, якщо вона проходить крізь дві точки (0, 0) і (2, -4) та симетричної відносно осі Oy.

Задача 2.3. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться на осі абсцис, а центр у початку координат, якщо:

1) мала вісь дорівнює 4 і точка $M(-1, 1)$ належить еліпсу;
2) велика вісь дорівнює 12, точка $M(1, 2)$ належить еліпсу;
3) точки $M(5, 2)$ і $M(4, 1)$ належать еліпсу;
4) відстань між фокусами дорівнює 8 і точка $M(\sqrt{15}, 1)$ належить еліпсу.

Задача 2.4. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо вона розміщена симетрично відносно осі Ox і директрисою є пряма $x = -5$.

Завдання для самостійної роботи № 2

Визначення ліній. Канонічна система координат

Задача 2.5. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо вона розміщена симетрично відносно осі Oy і проходить через точку M(10, 20).

Задача 2.6. Скласти рівняння параболи, якщо вона проходить крізь дві точки
(0, 0) і (1, -3) та симетричної відносно осі Ox.

Задача 2.7. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться на осі абсцис, а центр у початку координат, якщо:
1) уявна вісь дорівнює 4 і точка $M(-1, 1)$ належить гіперболі;
2) дійсна вісь дорівнює 12, точка $M(1, 2)$ належить гіперболі;
3) точки $M(5, 2)$ і $M(4, 1)$ належать гіперболі;
4) відстань між фокусами дорівнює 8 і точка $M(\sqrt{15}, 1)$ належить гіперболі.

Задача 2.8. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо вона розміщена симетрично відносно осі Oy і директрисою є пряма $y = 1$.

Практичне заняття № 3

Директриси, асимптоти та дотичні

Задача 3.1. Знайти ексцентриситет та рівняння директрис наступних еліпсів і зобразити їх на рисунку:

а) $9x^2 + 25y^2 = 225$; б) $25x^2 + 9y^2 = 225$.

Задача 3.2. Знайти ексцентриситет, рівняння асимптот і директрис даних гіпербол та зобразити їх на рисунку:

а) $36x^2 - 9y^2 = 324$; б) $x^2/9 - y^2/4 = 1$;

в) $-4x^2 + 9y^2 = 36$; г) $25x^2 - 4y^2 = 100$;

д) $x^2/16 - y^2/9 = -1$; е) $-5x^2 + 16y^2 = 80$;

ж) $-x^2 + 9y^2 = -36$; з) $-x^2 + y^2 = 4$.

Задача 3.3. Знайти довжину фокальних радіусів точки *M* для кожного з цих еліпсів:

а) $9x^2 + 25y^2 = 225$ $M(-\frac{3}{5}, 2\sqrt{5})$; б) $25x^2 + 9y^2 = 225$ $M(\frac{12}{5}, 3)$;

в) $5x^2 + 16y^2 = 80$ $M(2, -\frac{\sqrt{15}}{2})$; г) $16x^2 + 5y^2 = 80$ $M(-\frac{\sqrt{265}}{8}, -\frac{\sqrt{11}}{2})$.

Задача 3.4. Знайти довжину фокальних радіусів точки *M* для кожної з цих гіпербол:

а) $16x^2 - 9y^2 = 144$ $M(-6, 4\sqrt{3})$; б) $-16x^2 + 9y^2 = 144$ $M(6\sqrt{2}, 12)$.

Задача 3.5. Записати рівняння директриси наступних парабол і знайти довжину фокального радіуса точки *M* для кожної з цих парабол:

а) $y^2 = 12x$ $M(4, -4\sqrt{3})$; б) $y^2 = -12x$ $M(-4, 4\sqrt{3})$;

в) $x^2 = 12y$ $M(6\sqrt{2}, 6)$; г) $x^2 = -6y$ $M(-6\sqrt{2}, -6)$.

Задача 3.6. Скласти рівняння дотичної до кривої в точці, якщо

а) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$, A(-5; 7); б) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ A(3; 1);

в) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{5} = 1$, A(6;-5); г) $y^2 = 6x$, A(3/2; -3);

д) $x^2 = -4y$, A(-4; -4).

Завдання для самостійної роботи № 3
Директриси, асимптоти та дотичні

Задача 3.7. Знайти ексцентриситет та рівняння директрис наступних еліпсів і зобразити їх на рисунку:

а) $x^2+16y^2=64$; б) $16x^2+y^2=64$;

в) $4x^2+9y^2=36$; г) $25x^2+4y^2=100$.

Задача 3.8. Знайти ексцентриситет, рівняння асимптот і директрис даних гіпербол та зобразити їх на рисунку:

а) $36x^2-9y^2=324$; б) $x^2/9-y^2/4=1$;

в) $-4x^2+9y^2=36$; г) $25x^2-4y^2=100$;

д) $x^2/16-y^2/9=-1$; е) $-5x^2+16y^2=80$;

ж) $-x^2+9y^2=-36$; з) $-x^2+y^2=4$.

Задача 3.9. Знайти довжину фокальних радіусів точки M для кожного з цих еліпсів:

а) $36x^2+49y^2=256$; $M(0, 16/7)$; б) $x^2+16y^2=64$; $M(-1, \sqrt{63/16})$;

в) $4x^2+9y^2=36$; $M(2, -\sqrt{20/9})$; г) $4x^2+25y^2=100$; $M(\sqrt{75/4}, -1)$.

ча 3.10. Знайти довжину фокальних радіусів точки M для кожної з цих гіпербол:

а) $5x^2-16y^2=80$; $M(8,-\sqrt{15})$; б) $-5x^2+16y^2=80$; $M(-8,-5)$.

Задача 3.11. Записати рівняння директриси наступних парабол і зобразити їх на рисунку. Знайти довжину фокального радіуса точки M для кожної з цих парабол;

а) $y^2=8x$ $M(8, -8)$; б) $y^2=-8x$ $M(-8, 8)$;

в) $x^2=8y$ $M(12, 18)$; г) $x^2=-8y$ $M(-12,-18)$;

д) $y^2=6x$ $M(4,-2\sqrt{6})$; е) $y^2=-6x$ $M(-2,2\sqrt{3})$;

ж) $x^2=6y$ $M(3\sqrt{2},3)$; з) $x^2=-6y$ $M(6, -6)$.

Задача 3.12. Скласти рівняння дотичної до кривої в точці, якщо

а) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$, A(3; -3); б) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=1$ A(-15/2; 3);

в) $-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$ A(4; 6); г) $x^2+y^2=5$, A(-1; 2);

д) $y^2=-10x$ A(-2/5; 2); е) $x^2=12y$ A(6; 3).

Практичне заняття № 4

Криві другого порядку. Загальні задачі

Задача 4.1. Знайти малу піввісь, ексцентриситет, рівняння директриси канонічного еліпса і зобразити їх на рисунку, якщо $a = 5$, $c = 3$.

Задача 4.2. Знайти велику піввісь, ексцентриситет, рівняння директриси канонічного еліпса і зобразити їх на рисунку, якщо $b = 4$, $c = 3$.

Задача 4.3. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться на осі абсцис, а центр у початку координат, якщо:
1) відстань між фокусами дорівнює 8, а ексцентриситет – 3/5;
2) велика вісь дорівнює 14, а ексцентриситет – 4/5;
3) мала вісь дорівнює 24, а ексцентриситет – 5/14;
4) ексцентриситет дорівнює 3/4, а велика піввісь дорівнює 5.

Задача 4.4. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться на осі абсцис, а центр у початку координат, якщо:
1) велика вісь дорівнює 8, а відстань між директрисами – 16;
2) мала вісь дорівнює 6, а відстань між директрисами – 14;
3) відстань між директрисами дорівнює 6, а ексцентриситет – 1/2;
4) відстань між директрисами дорівнює 8, а відстань між фокусами – 4.

Задача 4.5. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться на осі абсцис, а центр у початку координат, якщо:
1) ексцентриситет дорівнює 1,5 і точка $M(-2, 5)$ належить гіперболі;
2) точка $M(5, 2)$ належить гіперболі і відстань від неї до правого фокуса дорівнює 3;
3) відстань між директрисами дорівнює 4 і точка $M(3, -1)$ належить гіперболі;
4) відстань між фокусами дорівнює 8, а ексцентриситет дорівнює 2.

Задача 4.6. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо вона розміщена симетрично відносно осі
а) Ox і директрисою є пряма $x = 2$;
б) Oy і директрисою є пряма $y = 0$.

Завдання для самостійної роботи № 4
Криві другого порядку. Загальні задачі

Задача 4.7. Знайти малу піввісь, ексцентриситет, наступних еліпсів і зобразити їх на рисунку, якщо $a = 5$, $c = 4$.

Задача 4.8. Знайти велику піввісь, ексцентриситет, рівняння директриси канонічного еліпса і зобразити їх на рисунку, якщо $b = 3$, $c = 4$.

Задача 4.9. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться на осі абсцис, а центр у початку координат, якщо:
1) ексцентриситет дорівнює 3/4 і точка $M(-2, 5/3)$ належить еліпсу;
2) точка $M(5, 2)$ належить еліпсу і відстань від неї до правого фокуса дорівнює 3;
3) відстань між директрисами дорівнює 12 і точка $M(3, -1)$ належить еліпсу.

Задача 4.10. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться на осі абсцис, а центр у початку координат, якщо:
1) велика вісь дорівнює 4, а відстань між директрисами – 8;
2) мала вісь дорівнює 3, а відстань між директрисами – 6;
3) відстань між директрисами дорівнює 10, а ексцентриситет – 1/4;
4) відстань між директрисами дорівнює 20, а відстань між фокусами – 10.

Задача 4.11. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться на осі абсцис, а центр у початку координат, якщо:
1) відстань між фокусами дорівнює 8, а ексцентриситет – 4;
2) дійсна вісь дорівнює 14, а ексцентриситет – 2;
3) уявна вісь дорівнює 24, а ексцентриситет – 3;
4) дійсна вісь дорівнює 8, а відстань між директрисами – 6;
5) уявна вісь дорівнює 6, а відстань між директрисами – 14;
6) відстань між директрисами дорівнює 6, а ексцентриситет – 2;
7) відстань між директрисами дорівнює 2, а відстань між фокусами – 4.

Задача 4.12. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо вона розміщена симетрично відносно осі
д) Ox і директрисою є пряма $x = -5$;
е) Oy і директрисою є пряма $y = 1$.

Практичне заняття № 5

Визначення кривих як геометричного місця точок

Задача 5.1. Скласти рівняння геометричного місця точок, сума відстаней від яких до точок F_1 і F_2 є величина стала і дорівнює $2a$, якщо
1) $F_1(0, 0)$ і $F_2(6, 0)$, $a = 5$;
2) $F_1(0, 20)$ і $F_2(0, 0)$, $a = 13$;
3) $F_1(1, -1)$ і $F_2(-1, 1)$, $a = 2$.
Знайти ексцентриситет кривої другого порядку.

Задача 5.2. Скласти рівняння геометричного місця точок, модуль різниці відстані від яких до заданих точок F_1 і F_2 є величина стала і дорівнює $2a$:
1) $F_1(2, 0)$, $F_2(2, -10)$, $a = 4$;
2) $F_1(0, 6)$, $F_2(0, -20)$, $a = 12$;
3) $F_1(0, 0)$, $F_2(2, 6)$, $a = 3$.
Знайти ексцентриситет кривої другого порядку.

Задача 5.3. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки $F(1, 0)$ і прямої $x + y - 2 = 0$.

Задача 5.4. Скласти рівняння геометричного місця точок, відношення відстані від яких до точки F до відстані до прямої γ є величина стала та дорівнює:
1) $F(-6, 1)$, γ: $5x - 2 = 0$, $e = 5/3$;
2) $F(2, 2)$, γ: $5y - 1 = 0$, $e = 5/4$;
3) $F(1, 1)$, γ: $x + y = 0$, $e = 2$;
4) F (2, 4), γ: $3y + 20 = 0$, $e = 3/5$.

Задача 5.5. Скласти рівняння еліпса, якщо:
а) велика вісь дорівнює 26, а фокусами є точки $F_1(-10, 0)$ і $F_2(14, 0)$;
б) ексцентриситет еліпса дорівнює $\sqrt{2}/2$, а фокусами є точки $F_1(-2, 3/2)$ і $F_2(2, 3/2)$;
в) фокусами є точки $F_1(5, 1)$ і $F_2(-1, 1)$, а пряма $3x = 31$ однією з директрис;
г) точка F (-6, 2) є одним з фокусів, а точка A(2; 2) – кінцем великої осі, ексцентриситет дорівнює 2/3;
д) осі еліпса паралельні координатним осям, точки A(4; 0) та B(0; 4) належать еліпсу, а точка B знаходиться на відстані $3/\sqrt{2}$ від одного з фокусів та на відстані 6 від відповідної директриси.

Завдання для самостійної роботи № 5
Визначення кривих як геометричного місця точок

Задача 5.6. Скласти рівняння геометричного місця точок, модуль різниці відстані від яких до заданих точок F_1 і F_2 є величина стала і дорівнює $2a$:
1) $F_1(0, 0)$, $F_2(10, 0)$, $a = 3$; 2) $F_1(15, –3)$, $F_2(–5, –3)$, $a = 6$;
3) $F_1(1, 1)$, $F_2(–1, –1)$, $a = 1$; 4) $F_1(–1, 2)$, $F_2(1, –2)$, $a = 2$;
5) $F_1(1, 0)$, $F_2(–1, 2)$, $a = 1$.

Задача 5.7. Скласти рівняння геометричного місця точок, сума відстаней від яких до точок F_1 і F_2 є величина стала і дорівнює 2a, якщо
1) $F_1(6,1)$ і $F_2(-10, 1)$, $a = 10$; 2) $F_1(2, 1)$ і $F_2(2, -7)$, $a = 5$;
3) $F_1(1,0)$ і $F_2(3, 2)$, $a = 2$; 4) $F_1(0, 0)$ і $F_2(2, -6)$, $a = 4$.

Задача 5.8. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки F і прямої, якщо $F(-2, 2)$, $y+2=0$.

Задача 5.9. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки F і прямої, якщо $F(1, 2)$, $x+1=0$.

Задача 5.10. Скласти рівняння геометричного місця точок, відношення відстані від яких до точки F до відстані до прямої γ є величина стала та дорівнює:
1) $F(2, 2)$, γ: $5y – 1= 0$, $e = 5/4$;
2) $F(2, 1)$, γ: $4x-5=0$, $e = 4/5$;
3) $F(2, –2)$, γ: $x – y – 1= 0$, $e = 2$;
4) $F(1, 0)$, γ: $x + 2y – 1= 0$, $e = 5/2$.

Задача 5.11. Скласти рівняння еліпса, якщо
а) мала вісь дорівнює 2, а фокусами є точки $F_1(-1, -1)$ і $F_2(1, 1)$;
б) відстань між директрисами дорівнює $12\sqrt{2}$, а фокусами є точки $F_1(1, 3)$ і $F_2(3,1)$;
в) ексцентриситет еліпса дорівнює 2/3, а фокус F (2, 1) і рівняння відповідної директриси $x-5=0$;
г) точка F (–2, 2) є одним з фокусів, а точка A(0; 2) – кінцем великої осі, ексцентриситет дорівнює 1/3;
д) осі еліпса паралельні координатним осям, точки A(2; 0) та B(0; 2) належать еліпсу, а точка B знаходиться на відстані $1/\sqrt{2}$ від одного з фокусів та на відстані 8 від відповідної директриси.

Практичне заняття № 6

Загальні задачі. Директриси, асимптоти та дотичні

Задача 6.1. Скласти рівняння еліпса, якщо задано:
а) ексцентриситет еліпса дорівнює 1/2, а фокус F (-4, 1) і рівняння відповідної директриси $y+3=0$;
б) фокус F (-1, -4) і рівняння відповідної директриси $x=2$, а також відомо, що точка M(-3,-5) належить еліпсу;
в) ексцентриситет еліпса дорівнює $\sqrt{2}/2$, точка M(3,-1) є кінцем малої осі, а також відомо, що фокуси лежать на прямій $y+6=0$.

Задача 6.2. Скласти рівняння гіперболи, якщо
1) дійсна вісь дорівнює 24, а фокусами є точки $F_1(-10, 2)$ і $F_2(16, 2)$;
2) уявна вісь дорівнює 2, а фокусами є точки $F_1(-1-1)$ і $F_2(1, 1)$;
3) ексцентриситет дорівнює 5/4, а фокусами є точки $F_1(-1, 2)$ і $F_2(1, -8)$;
4) точки $F_1(3, -2)$ і $F_2(5, -2)$ є фокусами, а пряма $2x = 7$ – однією з директрис;
5) відстань між директрисами дорівнює 18/5, а фокусами є точки $F_1(3, 4)$ і $F_2(-3, -6)$, точки $F_1(4, -4)$ і $F_2(-2, 2)$ є фокусами, а асимптоти перетинаються під прямим кутом;
7) точки $F_1(3, -2)$ і $F_2(5, -2)$ є фокусами, а пряма $2x = 7$ – однією з директрис;
8) точка F (1, 3) є одним з фокусів, точка $A(-4, 3)$ – вершиною, а ексцентриситет дорівнює 3/2;
9) точка F (0, 0) є одним з фокусів, а прямі $x \pm y + 2 = 0$ – асимптотами.

Задача 6.3. Скласти рівняння параболи, якщо
1) точка $F(4, 3)$ є фокусом, а пряма $y = -5$ – директрисою;
2) точка $F(0, 1)$ є фокусом, парабола симетрична відносно осі Oy і дотикається до осі Ox.

Задача 6.6. Дано рівняння дотичної $x-3y+9=0$ до параболи $y^2=2px$. Скласти рівняння параболи.

Задача 6.7. Написати рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, які паралельні до прямої $x+y-1=0$.

Задача 6.8. Гіпербола, осі якої співпадають з осями координат, дотикається до прямої $x-y-2=0$ у точці $M=(4,2)$. Скласти рівняння цієї гіперболи.

Задача 6.9. Еліпс, фокуси якого знаходяться в точках (–3, 0), (3, 0), дотикається до прямої $x+y-5=0$. Скласти рівняння цього еліпса.

Задача 6.10. Знайти відстань від параболи $y^2=64x$ до прямої $4x+3y+46=0$.

Завдання для самостійної роботи № 6
Загальні задачі. Директриси, асимптоти та дотичні

Задача 6.11. Скласти рівняння еліпса, якщо задано:
а) ексцентриситет еліпса дорівнює 1/2, а фокус F (3, 0) і рівняння відповідної директриси $x+y-1=0$;
б) фокус F (1, 0) і рівняння відповідної директриси $2x-y-10=0$, а також відомо, що точка M(2,-1) належить еліпсу.

Задача 6.12. Скласти рівняння гіперболи, якщо задано ексцентриситет 13/12, фокус $F(-1, 1)$ і рівняння відповідної директриси $13y+12=0$.

Задача 6.13. Скласти рівняння гіперболи, якщо задано:
1) ексцентриситет 5/4, фокус $F(0, 1)$ і рівняння відповідної директриси $5x+9y=0$;
2) ексцентриситет 13/12, фокус $F(-1, 1)$ і рівняння відповідної асимптоти $13y+12=0$;
3) ексцентриситет $\sqrt{5}$, фокус $F(2, -3)$ і рівняння відповідної асимптоти $3x-y+3=0$;
4) фокус $F(-2, -3)$, рівняння відповідної директриси $x+1=0$ та точка $A(-2, -3)$, що належить гіперболі;
5) фокус $F(-2, 2)$, рівняння відповідної директриси $2x-y-1=0$ та точка $A(1, -2)$, що належить гіперболі.

Задача 6.14. Скласти рівняння параболи, якщо:
1) точка $F(7, 2)$ є фокусом, а пряма $x=5$ – директрисою;
2) вісь параболи паралельна осі Oy, фокус лежить на осі Ox, парабола проходить через початок координат і відсікає на осі Ox відрізок довжини 6.

Задача 6.15. Скласти рівняння гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y=\pm x/2$ і рівняння однієї з її дотичних $5x-6y-8=0$.

Задача 6.16. Задано рівняння дотичної $x-3y+9=0$ до параболи $y^2=2px$. Скласти рівняння параболи.

Задача 6.17. Написати рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, які паралельні прямій $x+y-1=0$.

Задача 6.18. Гіпербола, осі якої співпадають з осями координат, дотикається до прямої $x-y-2=0$ в точці $M=(4,2)$. Скласти рівняння цієї гіперболи.

Практичне заняття № 7

Полярні рівняння кривих другого порядку

Задача 7.1. Скласти полярне рівняння еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, вважаючи, що напрям полярної осі збігається з додатним напрямом осі абсцис, а полюс знаходиться:
1) у лівому фокусі еліпса;
2) у правому фокусі еліпса.

Задача 7.2. Скласти полярне рівняння кожної гілки гіперболи $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, вважаючи, що напрям полярної осі збігається з додатним напрямом осі абсцис, а полюс знаходиться:
1) у лівому фокусі гіперболи;
2) у правому фокусі гіперболи.

Задача 7.3. Скласти полярне рівняння параболи, вважаючи, що напрям полярної осі збігається з додатним напрямом осі абсцис, а полюс знаходиться у фокусі параболи, якщо її рівняння має вигляд $y^2 = 4x$.

Задача 7.4. Визначити, які лінії задані наступними рівняннями. Якщо крива є еліпсом або гіперболою, знайти її півосі, якщо параболою – знайти її параметр:

а) $\rho=\frac{16}{3-5\cos\varphi}$;   б) $\rho=\frac{27}{4+5\cos\varphi}$.

Завдання для самостійної роботи № 7
Полярні рівняння кривих другого порядку

Задача 7.5. Скласти полярне рівняння еліпса $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$, вважаючи, що напрям полярної осі збігається з додатним напрямом осі абсцис, а полюс знаходиться: 1) у лівому фокусі еліпса; 2) у правому фокусі еліпса.

Задача 7.6. Скласти полярне рівняння кожної гілки гіперболи $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$, вважаючи, що напрям полярної осі збігається з додатним напрямом осі абсцис, а полюс знаходиться: 1) у лівому фокусі гіперболи; 2) у правому фокусі гіперболи.

Задача 7.7. Скласти полярне рівняння параболи $y^2=10x$, вважаючи, що напрям полярної осі збігається з додатним напрямом осі абсцис, а полюс знаходиться у фокусі параболи.

Задача 7.8. Визначити, які лінії задані наступними рівняннями. Якщо крива є еліпсом або гіперболою, знайти її півосі, якщо параболою – знайти її параметр:

а) $\rho=\frac{1}{1-\cos\varphi}$; б) $\rho=\frac{16}{5-3\cos\varphi}$;

в) $\rho=\frac{18}{5+4\cos\varphi}$; г) $\rho=\frac{36}{-4+5\cos\varphi}$.

Практичне заняття № 8

Теорія інваріантів

Задача 8.1. Визначити, який геометричний образ визначають рівняння та знайти центр кривих, якщо є:

1) $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$, 2) $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$,
3) $xy+2x+y=0$, 4) $x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$,
5) $4x^2-12xy+9y^2-2x+3y-2=0$, 6) $9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2=0$,
7) $25x^2-30xy+9y^2+68x+19=0$, 8) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$,
9) $8x^2+6xy+6x+3y+1=0$, 10) $4x^2+12xy+9y^2-8x-12y-5=0$,
11) $225x^2-240xy+64y^2+30x-16y+1=0$, 12) $x^2+2xy+y^2-5x-5y+4=0$,
13) $5x^2-6xy+5y^2+2x-14y+13=0$, 14) $x^2-2xy+y^2+8x-8y+22=0$.

Завдання для самостійної роботи № 8

Теорія інваріантів

Задача 8.2.

1) $9x^2-24xy+16y^2-8x+19y=4=0$, 2) $x^2-xy+y^2+x+y=0$,
3) $x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0$, 4) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$,
5) $5x^2+12xy+10y^2-6x+4y-1=0$, 6) $8x^2+34xy+8y^2+18x-18y-17=0$,
7) $8x^2+6xy-26x-12y+11=0$, 8) $4x^2+12xy+9y^2+4x=0$,
9) $2x^2-5xy-12y^2-x+26y-10=0$, 10) $4x^2-4xy+y^2-6x+3y-4=0$,
11) $2x^2+4xy+5y^2-6x-8y-1=0$, 12) $x^2-12xy-4y^2+12x+8y+5=0$,
13) $9x^2+24xy+16y^2-230x+110y-475=0$, 14) $3x^2+xy-2y^2-5x+5y-2=0$,
15) $4x^2-12xy+9y^2-20x+30y+16=0$, 16) $5x^2+6xy+5y^2-6x-10y-3=0$,
17) $12xy+5y^2-12x-22y-19=0$, 18) $4x^2-4xy+y^2-3x+4y-7=0$,
19) $4x^2+16xy+15y^2-8x-22y-5=0$, 20) $4x^2+4xy+y^2+16x+8y+15=0$.

Практичне заняття № 9
Поверхні другого порядку

Задача 9.1. За допомогою паралельного перенесення осей координат визначити координати центра і знайти радіус кожної з наступних сфер:

1) $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0$;

2) $x^2+y^2+z^2+8x=0$;

3) $x^2+y^2+z^2-6x+18y-6z-124=0$;

4) $x^2+y^2+z^2+4z=0$.

Задача 9.2. За допомогою паралельного перенесення осей координат визначити, яку поверхню задає кожне з наступних рівнянь:

1) $x^2+4y^2+9z^2-6x+8y-36z=0$;

2) $3x^2-y^2+3z^2-18x+10y+12z+14=0$;

3) $x^2+2xy+y^2-z^2+2z-1=0$;

4) $3x^2+3y^2+3z^2-6x+4y-1=0$;

5) $2z^2-6z+4y-1=0$.

Завдання для самостійної роботи № 9
Поверхні другого порядку

Задача 9.3. За допомогою паралельного перенесення осей координат визначити координати центра і знайти радіус кожної з наступних сфер:

1) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-22=0$;

2) $x^2+y^2+z^2-6z-7=0$;

3) $x^2+y^2+z^2+32x+24z-222=0$;

4) $x^2+y^2+z^2-8y=0$.

Задача 9.4. За допомогою паралельного перенесення осей координат визначити, яку поверхню задає кожне з наступних рівнянь:

1) $4x^2-y^2-z^2+32x-12z+44=0$;

2) $6y^2+6z^2+5x+6y+30z-11=0$;

3) $3x^2+3y^2-6x+4y-1=0$;

4) $3x^2+3y^2-3z^2-6x+4y+4z+3=0$;

5) $4x^2+y^2-4xy-36=0$;

6) $x^2+4xy-36=0$.

Додатки

Додаток 1

Типова контрольна робота

Задача 1. Скласти рівняння параболи, якщо вісь параболи паралельна осі Oy, фокус лежить на осі Ox, парабола проходить через початок координат і відсікає на осі Ox відрізок довжини 8.

Задача 2. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо довжина хорди, яка проходить через фокус під кутом $\pi/4$ до осі параболи, дорівнює 18.

Задача 3. Скласти рівняння параболи, якщо:

1) точка $F(7, 2)$ є фокусом, а пряма $x-5=0$;
2) точка $F(4, 3)$ є фокусом, а пряма $y=-1$;
3) точка $F(2, -1)$ є фокусом, а пряма $x-y=1$;
4) точка $F(0, 1)$ є фокусом, парабола симетрична відносно осі Oy і дотикається до осі Ox.

Задача 4. Скласти рівняння еліпса, якщо ексцентриситет еліпса дорівнює 1/2, а фокус F (-4, 1) і рівняння відповідної директриси $y+3=0$.

Задача 5. Скласти рівняння гіперболи, якщо ексцентриситет гіперболи дорівнює 5/4, а фокусами є точки $F_1(1, 2)$ і $F_2(1, -8)$.

Задача 6. Скласти рівняння гіперболи, якщо точки $F_1(3, -2)$ і $F_2(5, -2)$ є фокусами, а пряма $2x = 7$ – однією з директрис.

Додаток 2

Типове завдання для самостійної роботи

Задача 1. Скласти полярне рівняння еліпса, вважаючи, що напрям полярної осі збігається з додатним напрямом осі абсцис, а полюс знаходиться:
1) у лівому фокусі еліпса; 2) у правому фокусі еліпса;
якщо

а) $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{81}=1$; б) $\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{144}=1$.

Задача 2. Скласти полярне рівняння кожної гілки гіперболи, вважаючи, що напрям полярної осі збігається з додатним напрямом осі абсцис, а полюс знаходиться:
1) у лівому фокусі; 2) у правому фокусі гіперболи, якщо

а) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$; б) $\frac{x^2}{576}-\frac{y^2}{49}=1$.

Задача 3. Скласти полярне рівняння параболи, вважаючи, що напрям полярної осі збігається з додатним напрямом осі абсцис, а полюс знаходиться у фокусі параболи, якщо а) $y^2=5x$; б) $y^2=10x$.

Задача 4. Визначити, які лінії задані наступними рівняннями. Якщо крива є еліпсом або гіперболою, знайти її півосі, якщо параболою – знайти її параметр:

а) $\rho=\frac{18}{5+4\cos\varphi}$; б) $\rho=\frac{36}{5\cos\varphi-4}$; в) $\rho=\frac{4}{1-\cos\varphi}$;

г) $\rho=\frac{50}{13-12\cos\varphi}$; д) $\rho=\frac{3}{2-2\cos\varphi}$; е) $\rho=\frac{64}{15+17\cos\varphi}$.

Додаток 3

Типові задачі для індивідуальної роботи

Задача 1.

1) Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо осі дорівнюють 2 і 8.

2) Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо дійсна вісь дорівнює 6, а відстань між фокусами – 8.

3) Скласти канонічне рівняння параболи, якщо відстань між фокусом і директрисою дорівнює 4.

4) Скласти рівняння кола з центром (0,2), до якого належить точка (2,3).

5) Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо осі дорівнюють 12 і 8.

6) Скласти рівняння спряженої гіперболи в канонічній системі координат, якщо дійсна вісь дорівнює 4, а відстань між фокусами – 12.

7) Скласти канонічне рівняння параболи, якщо відстань між фокусом і директрисою дорівнює 1.

8) Скласти рівняння кола з центром (3,1), до якого належить точка (-1,1).

Задача 2.

1) Знайти велику, малу півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис еліпса $4x^2 + 16y^2 = 1$ і зобразити його на рисунку.

2) Знайти дійсну, уявну півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис гіперболи $x^2 - 9y^2 = 1$ і зобразити її на рисунку.

3) Визначити величину параметра, координати фокуса, ексцентриситет, рівняння директриси параболи $y^2 - 8x = 0$ і зобразити її на рисунку.

Задача 3. За допомогою паралельного перенесення системи координат визначити тип лінії другого порядку та знайти півосі (або параметр), координати фокусів, вершин, ексцентриситет, рівняння директрис:

1) $x^2 + 2x + 4y + 1 = 0$;

2) $x^2 - 2x + 4y^2 + 16y - 64 = 0$;

3) $x + y^2 + 2y + 4 = 0$;

4) $x^2 - y^2 + 8x + 4 = 0$.

Задача 4. Скласти рівняння геометричного місця точок, для яких відношення відстані до точки F до відстані до прямої γ є сталою величиною і дорівнює ε, якщо:

1) $F(-2, 2)$, $\gamma : x - 2 = 0$, $\varepsilon = 3/5$;

2) $F(-2, 2)$, $\gamma : x - 2 = 0$, $\varepsilon = 1$;

3) $F(-2, 2)$, $\gamma : x - 2 = 0$, $\varepsilon = 3/5$;

4) $F(-2, 2)$, $\gamma : x - 2 = 0$, $\varepsilon = 5/3$.

Задача 5.

За допомогою теорії інваріантів визначити тип лінії

$3x^2 + xy - 2y^2 - 5x + 5y - 2 = 0$.

Навчальне видання

Віхтинська Тетяна Геннадіївна
Нємченко Костянтин Едуардович

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

В 3-х частинах
Частина 2. Криві та поверхні другого порядку

Навчально-методичний посібник
для самостійної роботи та практичних занять

Коректор *О. В. Анцибора*
Комп'ютерне верстання *Н. О. Ваніна*
Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 3,21. Наклад 50 пр. Зам. № 216/23.
Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна