ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ СИЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ О «ДИСКЕ»

Л. И. Ройкин

В теории аналитических функций многих комплексных переменных известна следующая теорема *, обычно называемая сильной теоремой о «диске»:

Пусть в пространстве C^{n-1} комплексных переменных $z_1, \ldots, z_{n-1}$ задана жорданова кривая вида

$$\hat{z} = \hat{z}(t) = \hat{z}^0 + b\,\lambda(t), \quad 0 < t < 1,$$

где b, $\hat{z}$, $\hat{z}^0$ — векторы. Пусть, далее, семейство областей $D(t)$, $0 < t < 1$, лежащих в плоскости переменного z_n, обладает тем свойством, что для любого компакта $K \subset D(0)$ найдется такое число $\eta = \eta(K)$, $0 < \eta < 1$, что $K \subset D(t)$ при всех $t \in [0, \eta]$. Если функция $f(z)$ голоморфна в точках «дисков»

$$\{z = (\hat{z}, z_n);\ \hat{z} = \hat{z}(t),\ z_n \in D(t)\},\quad 0 < t < 1$$

и, по крайней мере, в одной точке предельного «диска»

$$\{z;\ \hat{z} = \hat{z}(0);\ z_n \in D(0)\},$$

то эта функция голоморфна и во всех точках предельного «диска».

В [1] отмечается, что в случае $n > 2$ желательно было бы избавиться от ограничения, что кривая $\hat{z} = \hat{z}(t)$ лежит на двумерной аналитической плоскости. В этой заметке, следуя по пути, которым обычно доказывается цитированная теорема, но опираясь при этом на некоторые более общие понятия из теории субгармонических функций, мы получаем обобщение сильной теоремы о «диске», при котором указанное ограничение заменяется более слабым. Исходным пунктом наших рассуждений является понятие о разреженном множестве. Напомним, что множество $E \subset C^1$ называется разреженным в точке $z_1^0 \in \bar{E}$, если существует хотя бы одна субгармоническая в окрестности точки z_1^0 функция $U(z_1)$ такая, что

$$\varlimsup_{\substack{z_1 \to z_1^0 \\ z_1 \in E}} U(z_1) < U(z_1^0).$$

Существуют эффективные критерии разреженности множеств **. Одним

* См., например, [1]

** О разреженных множествах см., например, [2].

из наиболее простых является следующий: множество E, имеющее при достаточно малых r непустое пересечение с каждой окружностью $|z_1 - z_1^0| = r$, не может быть разреженным в точке z_1^0.

Для множеств из пространства C^n естественно определить понятие разреженности с помощью плюрисубгармонических функций.

Определение. *Множество $E \subset C^n$ назовем P-разреженным в точке $z^0 \in \overline{E}$, если существует хотя бы одна плюрисубгармоническая в окрестности точки z^0 функция $U(z)$ такая, что*

$$\overline{\lim_{\substack{z \to z^0 \\ z \in E}}} U(z) < U(z^0).$$

Множество, не являющееся P-разреженным в точке z^0, будем называть P-неразреженным в точке z^0.

Примером множества P-неразреженного в каждой своей точке может служить кривая $\hat{z} = \hat{z}^0 + b\lambda(t)$, фигурирующая в сильной теореме о «диске». Это следует из определения плюрисубгармонической функции и приведенного выше для $n = 1$ критерия неразреженности множества. Нам неизвестны сколько-нибуь полные критерии P-неразреженности множеств. Укажем лишь на следующий, довольно частный, но полезный критерий.

Лемма. *Пусть множество E_i, лежащее в плоскости переменного z_i, является неразреженным в точке $z_i^0 \in \overline{E}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда множество*

$$E = \{z = (z_1, \ldots, z_n);\ z_i \in E_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

является P-неразреженным в точке $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$.

Доказательство. Пусть $U(z)$ — какая-нибудь функция, плюрисубгармоническая в окрестности точки z^0. Как известно *, для плюрисубгармонических функций

$$\overline{\lim_{z \to z^0}} U(z) = U(z^0).$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{\substack{z \to z^0 \\ z \in E}}} U(z) \leqslant U(z^0). \tag{1}$$

В то же время

$$\overline{\lim_{\substack{z \to z^0 \\ z \in E}}} U(z) \geqslant \overline{\lim_{\substack{z_n \to z_n^0 \\ z_n \in E_n}}} \ldots \overline{\lim_{\substack{z_1 \to z_1^0 \\ z_1 \in E_1}}} U(z_1, \ldots, z_n). \tag{2}$$

Согласно неразреженности множеств E_i в точках z_i^0 и субгармоничности функции $U(z_1, \ldots, z_n)$ по каждой из переменных, имеем далее, что

$$\overline{\lim_{\substack{z_n \to z_n^0 \\ z_n \in E_n}}} \ldots \overline{\lim_{\substack{z_1 \to z_1^0 \\ z_1 \in E_1}}} U(z_1, \ldots, z_n) = U(z_1^0, \ldots, z_n^0). \tag{3}$$

* См., например, [1].

Из (1), (2) и (3) заключаем, что

$$\overline{\lim_{\substack{z \to z^0 \\ z \in E}}} U(z) = U(z^0).$$

Лемма доказана.

Мы рассмотрим здесь плоские области наложения * над пространством C^k, появляющиеся при изучении областей существования аналитических (вообще говоря, неоднозначных) функций. Как известно, каждой точке $\tilde{z}$ из области наложения отвечает в C^k точка $(z_1, \ldots, z_k)$, называемая проекцией и обозначаемая $\underset{\sim}{z}$ или просто z. Если D есть некоторое множество из области наложения, то проекцией множества D называют множество

$$\underline{D} = \{\underset{\sim}{z};\ \tilde{z} \in D\}$$

Множество граничных точек плоской области наложения G будем обозначать через ∂G. Обозначим также

$$\breve{G} = G + \partial G.$$

Как и до сих пор, всюду в дальнейшем принято $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Положим также

$$w = (w_1, \ldots, w_m),\ \zeta = (z, w) = (z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_m).$$

$$\|z\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |z_i|$$

Следующая теорема является некоторым обобщением цитированной вначале сильной теоремы о «диске».

Теорема 1. *Пусть множество $E \subset C^n$ является P-неразреженным в точке $z^0 \in \bar{E}$. Каждой точке $z \in E$ и точке z^0 поставлены в соответствие области N_z, N_{z^0}, пространства комплексных переменных $w_1, \ldots, w_m$, притом так, что для любого компакта $K \subset N_{z^0}$ существует такое число $r > 0$, что при всех $z \in (\|z - z^0\| < r) \cap E$ справедливо включение $K \subset N_z$. Пусть, далее, область наложения D над пространством C^{n+m} является областью существования некоторой аналитической функции $f(\tilde{\zeta})$, где $\zeta = (z, w)$. Рассмотрим семейство однолистных m-мерных многообразий $M_z \subset D$, $z \in E$, и однолистное многообразие $M_{z^0} \subset \breve{D}$ такие, что*

$$\underline{M}_z = \{(z, w);\ \ w \in N_z\},$$

$$\underline{M}_{z^0} = \{(z^0, w);\ w \in N_{z^0}\}$$

и

$$M_{z^0} = \bigcap_{r>0} \{\overline{\bigcup_{\substack{z \in E_r \\ z \neq z^0}} M_z}\}.$$

Тогда, если хотя бы одна точка многообразия M_{z^0} лежит в D, то и все многообразие M_{z^0} лежит в D.

---

* Об областях наложения см., например, [3].

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда существуют такие точки $\tilde{\zeta}^{(1)} \in M_{z^0}$, $\tilde{\zeta}^{(2)} \in M_{z^0}$, и число $\varepsilon > 0$, что $\tilde{\zeta}^{(1)} \in D$, $\tilde{\zeta}^{(2)} \in \partial D$,

$$\| \tilde{\zeta}^{(1)} - \tilde{\zeta}^{(2)} \| \leqslant \varepsilon, \tag{4}$$

а

$$\min_{\tilde{\zeta} \in \partial N_{z^0}} \| \tilde{\zeta}^{(1)} - \tilde{\zeta} \| \geqslant 2\varepsilon. \tag{5}$$

Пусть $f_0(z, w)$ — голоморфный элемент функции $f(\tilde{\zeta})$ в окрестности v точки $\tilde{\zeta}^{(1)}$. Обозначим через v^* сечение v подпространством $w_1 = w_1^{(1)}, \ldots, w_m = w_m^{(1)}$, а через $\Delta(z)$, где $z \in v^*$, обозначим наибольшее из тех чисел r, для которых функция $f_0(z^*, w^*)$ является аналитической по переменным z^* и w^* в точках многообразия

$$\{(z^*, w^*);\ z^* = z,\ \|w^* - w^{(1)}\| < r\}.$$

Легко видеть, что функция $\Delta(z)$ может быть определена соотношением

$$-\ln \Delta(z') = \overline{\lim_{z \to z'}}\ \overline{\lim_{k_1 + \cdots + k_m \to \infty}} \frac{1}{k_1 + \cdots + k_m} \ln \left| \frac{1}{k_1! \cdots k_m!} \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_m} f_0(z, w^{(1)})}{\partial w_1^{k_1} \cdots \partial w_m^{k_m}} \right|. \tag{6}$$

Из (6) и известных свойств плюрисубгармонических функций (см., например, [1]) следует, что функция $-\ln \Delta(z)$ является в v^* плюрисубгармонической функцией. Заметим теперь, что при достаточно малом r любое из многообразий M_z с $z \in E_r$ имеет с v непустое пересечение, и так как $M_z \subset D$, то функция $f_0(z, w)$ будет аналитической не только в v, но и на каждом многообразии M_z, $z \in E_r$. Отсюда, учитывая (5), заключаем, что при $z \in E_r$

$$\Delta(z) \geqslant \frac{3}{2} \varepsilon.$$

Заметим далее, что множество E — P-неразреженное в точке z^0, а функция $-\ln \Delta(z)$, как мы уже указывали, плюрисубгармоническая в v^*. Поэтому

$$-\ln \Delta(z^0) = \overline{\lim_{\substack{z \to z^0 \\ z \in E}}} (-\ln \Delta(z)) \leqslant -\ln \left(\frac{3}{2} \varepsilon \right),$$

т. е.

$$\Delta(z^0) \geqslant \frac{3}{2} \varepsilon.$$

Но из неравенства (4) немедленно следует, что $\Delta(z^0) \leqslant \varepsilon$. Следовательно, предположение о существовании на многообразии M_{z^0} граничных точек области D неверно. Теорема доказана.

Дословно также доказывается близкая к теореме 1

Теорема 2. *Пусть множество $E \subset C^n$ является P-неразреженным в точке $z^0 \in \bar{E}$. Каждой точке $z \in E$ и точке z^0 поставлены в соответствие области N_z и N_{z^0} пространства комплексных переменных $w_1, \ldots, w_m$, притом так, что для любого компакта $K \Subset N_{z^0}$ существует такое число $r > 0$, что при всех $z \in (\|z - z^0\| < r) \cap E$ справедливо включение $K \subset N_z$. Пусть далее область наложения D над пространством C^{n+m}*

лежит строго внутри области наложения D_1. Рассмотрим однолистные многообразия $M_z \subset D$, $z \in E$ и однолистное многообразие M_{z^0} такие, что

$$M_z = \{(z, w);\ w \in N_z\},$$
$$M_{z^0} = \{(z^0, w);\ w \in N_{z^0}\},$$
$$\overline{M_{z^0}} = \bigcap_{r>0} \{\overline{\bigcup_{\substack{z \in E_r \\ z \neq z^0}} M_z}\}.$$

Здесь замыкание берется по топологии области D_1. Тогда любая функция $f(\zeta)$, $\zeta = (z, w)$, голоморфная в области D и хотя бы в одной точке многообразия M_{z^0}, будет голоморфной также во всех точках многообразия $\overline{M_{z^0}}$.

Из теоремы 2, как следствие, вытекает следующая теорема, имеющая применение в теории целых функций многих переменных *:

Теорема 3. ** *Пусть функция $g(z)$ — аналитическая в полицилиндре*

$$D = \{z;\ z_i \in D_i,\ i = 1, \ldots, n\},$$

где D_i — область в плоскости переменного z_i, $i = 1, \ldots, n$. Пусть, далее, точка z^0 — граничная точка полицилиндра D — является особой для функции $g(z)$ и через P обозначено множество тех значений индекса i, для которых $z_i^0 \in D_i$.

Тогда все точки многообразия

$$M_0 = \{z_i = z_i^0,\ z_i \in D_i\}_{i \overline{\in} P \quad i \in P}$$

являются особыми точками функции $g(z)$.

Действительно, из приведенного в начале статьи критерия неразреженности плоского множества следует, что область D_i, $i \overline{\in} P$ является множеством неразреженным в точке z_i^0. Отсюда в силу леммы заключаем, что множество

$$E = D_{i_1} \times D_{i_2} \times \cdots \times D_{i_q},$$

где $i_1 \overline{\in} P, \ldots, i_q \overline{\in} P$, а $n - q$ — число элементов множества P, является P-неразреженным в точке $(z_{i_1}, \ldots, z_{i_q})$. Далее замечаем, что многообразие

$$M_0 = \bigcap_{r>0} \{\overline{\bigcup_{(z'_{i_1}, \ldots, z'_{i_q}) \in E_r} M_{z'_{i_1}, \ldots, z'_{i_q}}}\},$$

где

$$M_{z'_{i_1}, \ldots, z'_{i_q}} = \{z_{i_k} = z'_{i_k} \in D_{i_k},\ z_i \in D_i\}_{k=1, \ldots, q \quad i \in P}$$

---

* См. [4], [5], [6].

** Для $n = 2$ и $D_i = (|z_i| < R_i)$ эта теорема впервые была получена В. К. Ивановым [4]. При $n > 2$ и $D_i = (|z_i| < R_i)$ теорема 3 доказывалась М. Ш. Ставским [5]. Доказательство Ставского содержало ошибку. В указанном здесь виде теорема 3 была приведена нами в [6], однако, как любезно указал нам М. Ширинбеков, помещенное там ее доказательство верно лишь при наличии некоторых довольно сильных ограничений на вид областей D_i.

(замыкание здесь берется по топологии области $D_1 = C^n$). Функция $g(z)$, как указывалось в условии теоремы, голоморфна в области D. Следовательно, согласно теореме 2 при наличии на M_0 хотя бы одной точки, в которой была бы голоморфна функция $g(z)$, все точки многообразия M_0 были бы точками голоморфности этой функции. Но по условию теоремы точка $z^0 \in M_0$ является особой. Следовательно, на M_0 нет точек голоморфности функции $g(z)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Владимиров. Методы теории функций многих комплексных переменных. Изд-во «Наука», М., 1964.
2. М. Брело. Основы классической теории потенциала. Изд-во «Мир», М., 1964.
3. Б. А. Фукс. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. Физматгиз, М., 1962.
4. В. К. Иванов. Характеристики роста целой функции и ее применение к суммированию двойных степенных рядов. «Матем. сб.» 47 (1959), 2—16.
5. М. Ш. Ставский. Связь между ростом целой функции нескольких переменных и множеством особых точек ассоциированной с ней функции. «Изв. вузов, Математика», 2 (1959) 227—232.
6. Л. И. Ронкин. Об одном свойстве расположения особенностей на границе полицилиндра и применении его к целым функциям многих переменных. ДАН СССР, 153, № 2, (1963), 278—281.

Поступила 14 марта 1966 г.