Т. XX Записки научно-исследовательского института математики и механики ХГУ и Харьковского математического общества 1950

Н. И. АХИЕЗЕР (Харьков)

О РЕШЕНИЯХ СТЕПЕННОЙ ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ В НЕОПРЕДЕЛЁННОМ СЛУЧАЕ

1. Если степенная проблема моментов

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^k \, d\sigma(\lambda) = s_k \quad (k = 0, 1, 2 \ldots)$$

неопределённа, т. е. имеет бесчисленное множество (неубывающих) решений, то совокупность всех её решений может быть получена на основе одной теоремы Неванлинна. Эта теорема первоначально была доказана довольно громоздким путём с помощью аппарата непрерывных дробей. Другое доказательство этой теоремы и более общих предложений были даны М. Г. Крейном и основаны на его исследованиях по теории операторов. В настоящей заметке я хочу доказать эту теорему, не прибегая к теории операторов и не пользуясь непрерывными дробями. Приводимое ниже доказательство связано с некоторым обобщением одной теоремы Пика.

Теорема Пика гласит: *для того чтобы существовала аналитическая функция $\varphi(z)$, регулярная и удовлетворяющая неравенству* $\operatorname{Im}\varphi(z) > 0$ *в полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$ *и принимающая в точках* z_α $(\operatorname{Im} z_\alpha > 0)$ *значения* φ_α, *необходимо и достаточно, чтобы при любом n была неотрицательна эрмитова форма*

$$\sum_{\alpha, \beta = 1}^{n} [\varphi_\alpha, \varphi_\beta] \, \xi_\alpha \overline{\xi_\beta},$$

где

$$[\varphi_\alpha, \varphi_\beta] = \frac{\varphi_\alpha - \overline{\varphi_\beta}}{z_\alpha - \overline{z_\beta}}.$$

Функция $\varphi(z)$, о которой идёт речь в приведённой теореме, не всегда единственна, но единственность наверно имеет место, если множество точек z_α имеет предельную точку внутри полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Нам придётся опираться на некоторые теоремы теории якобиевых матриц. Они содержатся, например, в статье автора «Бесконечные матрицы Якоби и проблема моментов» *). Во всём дальнейшем мы будем придерживаться обозначений этой статьи.

Мы будем предполагать, что проблема неопределённа. Поэтому для любого z ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} |P_k(z)|^2, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |Q_k(z)|^2 \tag{1}$$

сходятся.

*) «Успехи матем. наук», вып. IX, стр. 126 – 156.

Введём в рассмотрение четыре семейства полиномов:

$$A_n(z) = b_{n-1}[P_{n-1}(0)Q_n(z) - P_n(0)Q_{n-1}(z)] = 1 + z\sum_{k=0}^{n-1} P_k(0)Q_k(z),$$

$$B_n(z) = b_{n-1}[P_{n-1}(0)P_n(z) - P_n(0)P_{n-1}(z)] = z\sum_{k=0}^{n-1} P_k(0)P_k(z),$$

$$C_n(z) = b_{n-1}[Q_{n-1}(0)Q_n(z) - Q_n(0)Q_{n-1}(z)] = z\sum_{k=0}^{n-1} Q_k(0)Q_k(z),$$

$$D_n(z) = b_{n-1}[Q_{n-1}(0)P_n(z) - Q_n(0)P_{n-1}(z)] = -1 + z\sum_{k=0}^{n-1} Q_k(0)P_k(z).$$

В силу сходимости рядов (1) эти полиномы стремятся при $n \to \infty$ к пределам, которые являются некоторыми целыми функциями:

$$A(z) = 1 + z\sum_{k=0}^{\infty} P_k(0)Q_k(z),$$

$$B(z) = z\sum_{k=0}^{\infty} P_k(0)P_k(z),$$

$$C(z) = z\sum_{k=0}^{\infty} Q_k(0)Q_k(z),$$

$$D(z) = -1 + z\sum_{k=0}^{\infty} Q_k(0)P_k(z).$$

Легко проверяются следующие соотношения:

$$B_n(z)C_n(z) - A_n(z)D_n(z) = 1, \tag{2}$$

$$B(z)C(z) - A(z)D(z) = 1, \tag{2a}$$

$$\left.\begin{aligned} P_n(z) &= Q_n(0)B_n(z) - P_n(0)D_n(z),\\ P_{n-1}(z) &= Q_{n-1}(0)B_n(z) - P_{n-1}(0)D_n(z),\\ Q_n(z) &= Q_n(0)A_n(z) - P_n(0)C_n(z),\\ Q_{n-1}(z) &= Q_{n-1}(0)A_n(z) - P_{n-1}(0)C_n(z). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

2. Обобщение теоремы Пика. Если взять какое-нибудь z ($\operatorname{Im} z > 0$) и заставить $\sigma(\lambda)$ пробегать совокупность всех решений проблемы моментов, то значения интеграла

$$w = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z},$$

заполняют некоторый круг $K(z)$, уравнение окружности которого можно получить, записав, что

$$\lim_{n\to\infty} \min_{\xi_k} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda - z} - \sum_{k=0}^{n} \xi_k P_k(\lambda) \right|^2 d\sigma(\lambda) > 0.$$

Это уравнение имеет вид

$$\frac{w-\bar{w}}{z-\bar{z}}-\sum_{k=0}^{\infty}|P_k(z)w+Q_k(z)|^2=0.$$

Введём обозначение

$$\{w_\alpha, w_\beta\}=\frac{w_\alpha-\bar{w}_\beta}{z_\alpha-\bar{z}_\beta}-\sum_{k=0}^{\infty}[P_k(z_\alpha)w_\alpha+Q_k(z_\alpha)]\,[\overline{P_k(z_\beta)w_\beta+Q_k(z_\beta)}].$$

Таким образом, для того чтобы существовало решение степенной проблемы моментов, для которого

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda-z}=w,$$

необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\{w, w\}\geqslant 0.$$

Отметим, что решение проблемы моментов, удовлетворяющее условию (4), единственно в том и только в том случае, если $\{w, w\}=0$.

Теперь мы можем обобщить теорему Пика.

Теорема. *Для того чтобы существовала функция* $w(z)$ $(\operatorname{Im} z>0)$, *имеющая вид*

$$w=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda-z}, \tag{4}$$

где $\sigma(\lambda)$ *есть решение степенной проблемы моментов, и удовлетворяющая условиям*

$$w(z_k)=w_k \quad (\operatorname{Im} z_k>0,\ k=1, 2, 3, \ldots),$$

необходимо и достаточно, чтобы эрмитова форма

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{n}\{w_\alpha, w_\beta\}\,\xi_\alpha\bar{\xi}_\beta$$

была неотрицательна при любом n.

Доказательство. Необходимость доказывается просто. Действительно, пусть требуемая теоремой функция $w(z)$ существует. Тогда при любом n и любых $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{\alpha=1}^{n}\xi_\alpha\left\{\frac{1}{\lambda-z_\alpha}-\sum_{k=0}^{\infty}[P_k(z_\alpha)w_\alpha+Q_k(z_\alpha)]P_k(\lambda)\right\}\right|^2 d\sigma(\lambda)\geqslant 0. \tag{5}$$

А так как

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(\lambda)}{(\lambda-z_\alpha)(\lambda-\bar{z}_\beta)}=\frac{1}{z_\alpha-\bar{z}_\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\lambda-z_\alpha}-\frac{1}{\lambda-\bar{z}_\beta}\right]d\sigma(\lambda)=\frac{w_\alpha-\bar{w}_\beta}{z-\bar{z}_\beta}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P_\beta(\lambda)}{\lambda-z_\alpha}d\sigma(\lambda)=P_\beta(z_\alpha)w_\alpha+Q_\beta(z_\alpha),$$

то левая часть неравенства (5) равна

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \{w_\alpha, w_\beta\} \xi_\alpha \bar{\xi}_\beta, \tag{5a}$$

и необходимость доказана.

Переходим к доказательству достаточности.

Возьмём вначале одно условие

$$w(z_1) = w_1. \tag{6}$$

Так как $\{w_1, w_1\} \geqslant 0$, то решение проблемы моментов, для которого функция (4) удовлетворяет условию (6), наверно существует. Это решение обозначим через $\sigma_1(\lambda)$. Оно единственно в том и только в том случае, если $\{w_1, w_1\} = 0$.

Рассмотрим вначале этот случай:

$$\{w_1, w_1\} = 0. \tag{7}$$

Полагая

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_1(\lambda)}{\lambda - z_\alpha} = w_\alpha^*,$$

мы должны доказать, что в силу неотрицательности форм (5а) при любом α

$$w_\alpha^* = w_\alpha.$$

На основании неотрицательности форм (5а) при любом α

$$\{w_\alpha, w_1\} = 0, \tag{8}$$

а с другой стороны, из уже доказанной необходимости содержащегося в теореме критерия, если его применить к функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_1(\lambda)}{\lambda - z},$$

следует, что при любом n будут неотрицательны формы

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \{w_\alpha^*, w_\beta^*\} \xi_\alpha \bar{\xi}_\beta;$$

а так как

$$w_1^* = w_1,$$

то в силу (7) при любом α

$$\{w_\alpha^*, w_1\} = 0. \tag{8a}$$

Сравнивая (8) и (8а), мы и находим, что при любом α $w_\alpha^* = \omega_\alpha$. Таким образом случай $\{w_1, w_1\} = 0$ рассмотрен.

Допустим теперь, что $\{w_1, w_1\} > 0$. Мы знаем, что существует бесчисленное множество неубывающих функций $\sigma_1(\lambda)$, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_1(\lambda)}{\lambda - z_1} = w_1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^k \, d\sigma_1(\lambda) = s_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Полагая

$$\int_{-\infty}^{\lambda} \frac{d\sigma_1(\lambda)}{|\lambda - z_1|^2} = \tau(\lambda), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^k \, d\tau(\lambda) = t_k$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots),$$

мы находим в силу (9), что

$$t_0 = \frac{w_1 - \overline{w_1}}{z_1 - \overline{z_1}},$$

$$t_1 = \frac{z_1 w_1 - \overline{z_1 w_1}}{z_1 - \overline{z_1}},$$

$$t_{k+2} - (z_1 + \overline{z_1}) t_{k+1} + |z_1|^2 t_k = s_k$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Мы получили новую последовательность чисел $\{t_k\}$ и имеем новую проблему моментов

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^k \, d\tau(\lambda) = t_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{10}$$

которая снова является неопределённой. Если $\tau(\lambda)$ пробегает совокупность её решений, то точка

$$\omega(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda - z} \tag{11}$$

заполняет круг $K(z)$, уравнение окружности которого мы найдём, записав, что

$$\lim_{n\to\infty} \min_{c_k} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda - z} - \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda^k \right|^2 d\tau(\lambda) \geqslant 0.$$

А так как

$$\omega(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_1(\lambda)}{(\lambda - z)|\lambda - z_1|^2} = \frac{w}{(z - z_1)(z - \overline{z_1})} + \frac{w_1}{(z_1 - z)(z_1 - \overline{z_1})} + \frac{\overline{w_1}}{(\overline{z_1} - z)(\overline{z_1} - z_1)},$$

то кругу $K(z)$ плоскости ω отвечает некоторый круг $K\left(z \,\middle|\, \begin{smallmatrix} w_1 \\ z_1 \end{smallmatrix}\right)$ плоскости w, и легко видеть, что уравнение окружности этого второго круга $K\left(z \,\middle|\, \begin{smallmatrix} w_1 \\ z_1 \end{smallmatrix}\right)$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} \{w, w\}, & \{w, w_1\} \\ \{w_1, w\}, & \{w_1, w_1\}, \end{vmatrix} = 0.$$

Так как форма

$$\sum_{\alpha, \beta = 1}^{2} \{w_\alpha, w_\beta\} \xi_\alpha \overline{\xi_\beta}$$

по условию неотрицательна, то точка

$$\omega_2 = \frac{w_2}{(z_2 - z_1)(z_2 - \bar{z}_1)} + \frac{w_1}{(z_1 - z_2)(z_1 - \bar{z}_1)} + \frac{\bar{w}_1}{(\bar{z}_1 - z_2)(\bar{z}_1 - z_1)}$$

лежит внутри или на границе круга $K(z_2)$. Поэтому, повторяя уже проведённое один раз рассуждение, найдём, по крайней мере, одно решение $\tau_1(\lambda)$ проблемы моментов (10), для которого функция (11) удовлетворяет соотношению $\omega(z_2) = \omega_2$.

Решению $\tau_1(\lambda)$ отвечает с помощью формулы

$$\sigma_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} |\lambda - z_1|^2 \, d\tau_1(\lambda)$$

решение первоначальной проблемы моментов, для которого

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_2(\lambda)}{\lambda - z_1} = w_1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_2(\lambda)}{\lambda - z_2} = w_2.$$

Теперь мы можем перейти от функций $\tau_1(\lambda)$ к функциям

$$\int_{-\infty}^{\lambda} \frac{d\tau_1(\lambda)}{|\lambda - z_2|^2} = \rho(\lambda),$$

и эти переходы позволяют, как легко видеть, обосновать редукцию, в результате которой мы получаем последовательность решений $\sigma_k(\lambda)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ первоначальной проблемы моментов, причём

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_k(\lambda)}{\lambda - z_r} = w_r \quad (r = 1, 2, \ldots, k).$$

Остаётся применить теорему Хелли, и наша теорема доказана.

3. Теорема Неванлинна. *Если степенная проблема моментов неопределённа, то между совокупностью всех её решений $\sigma(\lambda)$ и совокупностью всех функций $\varphi(z)$, регулярных и имеющих положительную мнимую часть в полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$, *существует взаимно однозначное соответствие, которое даётся соотношением*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z} = -\frac{A(z) - \varphi(z) C(z)}{B(z) - \varphi(z) D(z)}, \tag{12}$$

где $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$, $D(z)$ — целые функции, введённые в п. **1.**

Доказательство. Пусть взято какое-нибудь решение $\sigma(\lambda)$ проблемы моментов. Рассмотрим функцию

$$w(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z} \tag{13}$$

и положим

$$\varphi(z) = \frac{A(z) + w(z) B(z)}{C(z) + w(z) D(z)}. \tag{14}$$

Нам надлежит доказать, что эта функция $\varphi(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ регулярна и имеет положительную мнимую часть. Если мы возьмём в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ какую-нибудь последовательность точек $z_1, z_2, \ldots$, имеющую конечную предельную точку, лежащую внутри полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, и положим

$$w(z_i) = w_i, \quad \varphi_i = \frac{A(z_i) + w_i B(z_i)}{C(z_i) + w_i D(z_i)} \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

то наше утверждение будет доказано, если мы проверим, что при любом n форма

$$\sum_{\alpha, \beta = 1}^{n} [\varphi_\alpha, \varphi_\beta] \, \xi_\alpha \overline{\xi}_\beta \tag{15а}$$

неотрицательна.

Для проверки этого факта достаточно заметить, что, с одной стороны, в силу теоремы п. 2 при любом n неотрицательна форма

$$\sum_{\alpha, \beta = 1}^{n} \{w_\alpha, w_\beta\} \, \xi_\alpha \overline{\xi}_\beta, \tag{15б}$$

а с другой стороны, в силу (14) имеет место соотношение

$$\{w_\alpha, w_\beta\} = [\varphi_\alpha, \varphi_\beta] \frac{1}{B(z_\alpha) - \varphi_\alpha D(z_\alpha)} \, \frac{1}{\overline{B(z_\beta) - \varphi_\beta D(z_\beta)}}, \tag{16}$$

которое мы ниже докажем.

Обратно, пусть взята какая-нибудь функция $\varphi(z)$, регулярная и имеющая положительную мнимую часть в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Следовательно, все формы (15а) неотрицательны. На основании (16) будут неотрицательными также все формы (15б). Поэтому по теореме п. 2 существует решение проблемы моментов, для которого функция

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z} = w(z)$$

удовлетворяет соотношениям

$$w(z_\alpha) = w_\alpha;$$

а так как

$$\frac{A(z_\alpha) + w_\alpha B(z_\alpha)}{C(z_\alpha) + w_\alpha D(z_\alpha)} = \varphi(z_\alpha),$$

то по теореме единственности аналитических функций

$$\frac{A(z) + B(z) \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z}}{C(z) + D(z) \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z}} \equiv \varphi(z),$$

откуда и вытекает (12).

Займёмся теперь проверкой соотношений (16). Имеем

$$\{w_\alpha, \ w_\beta\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{w_\alpha - \overline{w}_\beta}{z_\alpha - \overline{z}_\beta} - \sum_{k=0}^{n-1}[P_k(z_\alpha)w_\alpha + Q_k(z_\alpha)]\overline{[P_k(z_\beta)w_\beta + Q_k(z_\beta)]}\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{w_\alpha - \overline{w}_\beta}{z_\alpha - \overline{z}_\beta} - \frac{w_\alpha\overline{w}_\beta}{z_\alpha - \overline{z}_\beta}[D_n(z_\alpha)\overline{B_n(z_\beta)} - \overline{D_n(z_\beta)}B_n(z_\alpha)] - \right.$$

$$- \frac{\overline{w}_\beta}{z_\alpha - \overline{z}_\beta}[C_n(z_\alpha)\overline{B_n(z_\beta)} - A_n(z_\alpha)\overline{D_n(z_\beta)} - 1] +$$

$$+ \frac{w_\alpha}{z_\alpha - \overline{z}_\beta}[\overline{C_n(z_\beta)}B_n(z_\alpha) - \overline{A_n(z_\beta)}D_n(z_\alpha) - 1] -$$

$$\left. - \frac{1}{z_\alpha - \overline{z}_\beta}[C_n(z_\alpha)\overline{A_n(z_\beta)} - \overline{C_n(z_\beta)}A_n(z_\alpha)]\right\} =$$

$$= \frac{\overline{[D(z_\beta)w_\beta + C(z_\beta)]}[B(z_\alpha)w_\alpha + A(z_\alpha)] - [D(z_\alpha)w_\alpha + C(z_\alpha)]\overline{[B(z_\beta)w_\beta + A(z_\beta)]}}{z_\alpha - \overline{z}_\beta} =$$

$$= [D(z_\alpha)w_\alpha + C(z_\alpha)]\,\overline{[D(z_\beta)w_\beta + C(z_\beta)]}\,\frac{\varphi_\alpha - \overline{\varphi}_\beta}{z_\alpha - \overline{z}_\beta},$$

а это равносильно (16).