

## ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ, СТРУКТУРИРОВАНИЕ И ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ В НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЯХ

*Н.Ф. Пацегон, Л.Н. Попова*

Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразина

### Введение

Магнитодипольное взаимодействие между феррочастицами, входящими в состав феррожидкостей, может обуславливать обратимое образование и распад агрегатов (кластеров) магнитных частиц с изменением магнитного поля и температуры. Каждый из агрегатов характеризуется количеством объединенных феррочастиц и собственным магнитным моментом. По существу, феррожидкость переходит в состояние с новой микроструктурой, отличающееся от состояния одиночных взаимодействующих феррочастиц наличием кластеров, содержащих конечное число феррочастиц. То обстоятельство, что посредством магнитного поля оказывается возможным управлять внутренним строением намагничивающихся сред, предоставляет возможности создания новых технологических наноматериалов. Поэтому магнитные жидкости с изменяющейся микроструктурой составляют объект заинтересованного изучения. Основными методами экспериментального исследования микроструктуры магнитных жидкостей являются оптические, вискозиметрические, акустические и методы измерения намагниченности.

В последние годы появилось значительное количество работ, в которых описываются эксперименты с пленками намагничивающихся жидкостей (феррожидкостей) [1-5]. Под влиянием внешнего магнитного поля феррочастицы, входящие в состав жидкости, образуют регулярные упорядоченные конфигурации, структура которых определяется направлением и величиной поля, жидкость становится анизотропной и, соответственно, изменяются условия взаимодействия ее с оптическим излучением. Зависимость оптических свойств намагничивающихся жидкостей от магнитного поля открывает новую область их практического использования – магнитооптику [2]. В связи с возможными магнитооптическими приложениями весьма актуальными представляются экспериментальные и теоретические исследования процессов, происходящих с феррочастицами в жидкости под действием внешнего поля, и математические модели, описывающие эти процессы. Подробный перечень публикаций по этой тематике и их характеристика имеется в статье [6], посвященной исследованию закономерностей конденсации феррочастиц в отсутствие внешнего поля. Структурные превращения в феррожидкостях в полях разной интенсивности рассматриваются в недавно появившихся работах [7-10]. В [7] теоретически исследованы

столбчатые конфигурации феррочастиц в пленках жидкости, получены оценки для геометрических параметров гексагональных структур в поле, ортогональном пленке. Авторами работы [8] изучалась зависимость статических магнитных свойств феррожидкостей от размеров и концентрации частиц, установлена зависимость вида кривой намагничивания от наличия в жидкости цепочечных агрегатов. В статье [9] приводятся результаты исследования поведения феррожидкости в сильном магнитном поле, в рамках теории среднего поля показано, что при температурах, меньших некоторого критического значения, происходит фазовый переход второго рода и в жидкости образуются слоистые структуры. В [10] анализируется влияние толщины слоя жидкости на форму возникающих в ней пространственных структур.

Особенностью указанных работ является вносимое авторами предположение о наличии в феррожидкости сформированных агрегатов магнитных частиц. Непосредственно процессы возникновения и динамики агрегатов в них не исследуются. Простейшая модель, описывающая процессы агрегации в магнитной жидкости, предложена в работе [11]. В отличие от модели намагничивающейся жидкости И.Е.Тарапова [12], в [11] учитывается диполь-дипольное взаимодействие феррочастиц в приближении самосогласованного поля и возможность образования из них цепочечных агрегатов. Равновесная намагниченность среды с изменяющейся микроструктурой определяется двумя дополнительными параметрами - средним числом частиц в агрегатах  $\gamma = \nu^{-1}$  и параметром эффективного магнитного поля  $\lambda$ , учитывающим поле, создаваемое частицами. Возникновение и разрушение агрегатов, т.е. изменение микроструктуры жидкости, рассматривается как фазовый переход второго рода и описывается системой двух квазилинейных уравнений параболического типа относительно  $\lambda$  и  $\nu$ . Равновесная кривая намагничивания среды исследована в работах [13, 14], там же получены условия существования волновых режимов типа волн переключения. В статье [15] представлен качественный анализ системы в предельном случае, когда диффузионными явлениями в жидкости можно пренебречь. В [16-20] рассматриваются пространственные и пространственно-временные структуры типа статических и бегущих автосолиитонов и периодических страт, которые образуются в жидкости в постоянном однородном магнитном поле.

Настоящая работа носит обзорный характер, она содержит результаты исследования пространственных структур, описывающие процессы перераспределения феррочастиц в покоящейся намагничивающейся жидкости, наблюдаемые в экспериментах.

# 1. Термодинамическое равновесие и устойчивость намагничивающихся сред

## 1.1. Условия термодинамического равновесия.

Исследуем термодинамическую устойчивость равновесных состояний намагничивающейся среды в случае произвольного изотропного закона намагничивания. В настоящем разделе с использованием термодинамического принципа Планка такое исследование проводится для многокомпонентных намагничивающихся сред.

Рассмотрим замкнутую термодинамическую систему "среда, магнитное поле", которая характеризуется следующими параметрами: внутренней энергией  $U$ , энтропией  $S$  и источниками магнитного поля - токами  $\vec{j}$ , текущими в проводниках. Бесконечно малые изменения этих параметров в равновесном процессе описываются уравнением [21]

$$\delta U = T\delta S + \frac{1}{4\pi} \int \vec{H} \delta \vec{B} d\tau, \quad (1.1)$$

где  $T$  - температура среды, предполагаемая постоянной по объему среды;  $\vec{H}$  = напряженность магнитного поля;  $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$  - намагниченность. В дальнейшем рассматривается изотропно намагничивающаяся среда, так что  $\vec{B} = \mu\vec{H}$ ;  $\mu$  - магнитная проницаемость. Объем среды не является характеристикой системы, поскольку система занимает все пространство; интегрирование в (1.1) проводится по всему пространству.

С учетом уравнений электродинамики

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}; \quad \delta \vec{B} = \operatorname{rot} \delta \vec{A} \quad (1.2)$$

и граничных условий на поверхности  $\Sigma$  проводников

$$\langle \vec{A}_\tau \rangle = 0; \quad \langle \vec{H}_\tau \rangle = \frac{4\pi}{c} \vec{i} \times \vec{n} \quad (1.3)$$

запишем уравнение (1.1) в виде

$$\delta U = T\delta S + \frac{1}{4\pi c} \int \operatorname{rot} \vec{H} \cdot \delta \vec{A} d\tau + \frac{1}{c} \int \vec{i} \delta \vec{A} d\Sigma. \quad (1.4)$$

Здесь  $\vec{A}_\tau$  - касательная составляющая вектора  $\vec{A}$  на поверхности  $\Sigma$ ;  $\vec{i}$  - плотность поверхностных токов;  $\vec{n}$  - единичная нормаль к  $\Sigma$ . При получении формулы (1.4) учтено, что при удалении от ограниченной области пространства, занятой средой и проводниками, напряженность магнитного поля и векторный потенциал с расстоянием  $R$  асимптотически убывают как  $1/R^2$  и  $1/R$  соответственно, так что интеграл по бесконечно удаленной поверхности равен нулю.

Из (1.4) следует, что энтропия системы экстремальна ( $\delta S = 0$ ) при постоянных энергии и потенциале  $\vec{A}$  магнитного поля. Характер экстремальности выясняется с привлечением второго закона термодинамики. Поскольку внутреннее производство энтропии неотрицательно, то в общем случае неравновесного процесса справедливо неравенство

$$\delta U - \frac{1}{c} \int \vec{i} \delta \vec{A} d\Sigma - \frac{1}{4\pi c} \int \text{rot } \vec{H} \cdot \delta \vec{A} d\tau - T \delta S \leq 0.$$

В соответствии с теорией Гиббса-Дюгема [22] система должна оставаться в равновесном состоянии, если ни одно возмущение равновесного состояния не может удовлетворять этому неравенству. При этом возмущения не обязательно вызываются внешними воздействиями; отклонения макроскопических величин от их средних значений могут быть обусловлены и молекулярными флуктуациями. Отсюда следует, что при постоянных  $U$  и  $\vec{A}$  выполняется неравенство  $\delta S \leq 0$ , т.е. энтропия максимальна в состоянии устойчивого термодинамического равновесия (принцип Планка). Выясним условия, которым удовлетворяют равновесные состояния многокомпонентных намагничивающихся сред.

Будем считать, что среда состоит из  $n$  компонентов,  $c_\alpha$  - массовая концентрация компонента  $\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ),

$$\sum_{\alpha=1}^n c_\alpha = 1.$$

В силу гипотезы о локальном равновесии для массовых плотностей внутренней энергии  $u$  и энтропии  $s$  выполняется тождество Гиббса

$$du = Tds - pd\vartheta + \frac{H}{4\pi} d(B\vartheta) + \varphi_\alpha dc_\alpha, \quad (1.5)$$

где  $\vartheta = 1/\rho$  - удельный объем;  $\rho$  - плотность среды;  $p$  - давление;  $\varphi_\alpha$  - парциальные химические потенциалы. Здесь и в дальнейшем принято правило суммирования по повторяющимся индексам, если не оговорено противное.

Предполагая постоянство энергии системы и постоянство масс составляющих среду компонентов, получим условие равновесия в виде

$$\delta \tilde{S} = 0, \quad (1.6)$$

$$\tilde{S} = \int \rho s d\tau - \Lambda_1 \int \rho d\tau - \Lambda_2 \int \rho u d\tau - \sum_{\alpha=1}^{n-1} \lambda_\alpha \int \rho c_\alpha d\tau,$$

где  $\Lambda_1, \Lambda_2, \lambda_\alpha$  - неопределенные множители Лагранжа, которые предполагаются

независимыми от координат. Учитывая, что вариации термодинамических переменных связаны равенством (1.5), получим

$$0 = \delta \tilde{S} = \int \left( s - \Lambda_2 u - \Lambda_1 - \sum_{\alpha=1}^{n-1} \lambda_{\alpha} c_{\alpha} - \frac{p}{\rho T} + \frac{BH}{4\pi\rho T} \right) \delta\rho d\tau + \\ + \int \rho \left( \frac{1}{T} - \Lambda_2 \right) \delta u d\tau - \int \rho \sum_{\alpha=1}^{n-1} \left( \frac{\varphi_{\alpha} - \varphi_n}{T} + \lambda_{\alpha} \right) \delta c_{\alpha} d\tau - \int \frac{H}{4\pi T} \delta B d\tau. \quad (1.7)$$

Приравнявая нулю коэффициенты при вариациях независимых параметров  $\delta\rho, \delta u, \delta c_{\alpha}$ , получим неизвестные множители Лагранжа

$$\Lambda_1 = s - \frac{u}{T} - \frac{p}{\rho T} + \frac{BH}{4\pi\rho T} - \frac{1}{T} \sum_{\alpha=1}^{n-1} (\varphi_n - \varphi_{\alpha}) c_{\alpha}; \quad (1.8)$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{T}; \lambda_{\alpha} = \frac{\varphi_n - \varphi_{\alpha}}{T}, \alpha = 1, 2, \dots, n-1.$$

$n+1$  множителей Лагранжа  $\Lambda_1, \Lambda_2, \lambda_{\alpha}$  постоянны в равновесном состоянии. Эти множители в изотропной среде являются функциями  $\rho, T, B/\rho, c_{\alpha}$ , среди которых  $n+2$  независимых. Отсюда следует, что равновесное состояние среды не обязательно является однородным. В этом состоянии, кроме уравнений (1.2), (1.3) должны выполняться дополнительные условия для поля. Действительно, положив множители Лагранжа равными (1.8) и учитывая однородность температуры, из (1.7) получим в изотропной среде

$$T\delta\tilde{S} = - \int \frac{H}{4\pi} \delta B d\tau = \frac{1}{c} \int \text{rot } \vec{H} \delta \vec{A} d\tau + \frac{1}{c} \int_{\Sigma} \vec{i} \delta \vec{A} d\sigma = 0.$$

В проводниках по условиям варьирования  $\delta \vec{A} = 0$ , вне проводников отсюда получаем второе уравнение электродинамики

$$\text{rot } \vec{H} = 0. \quad (1.9)$$

Таким образом, если уравнениям (1.2), (1.9) и граничным условиям (1.3) в случае закона намагничивания

$$\mu = \mu(\rho, T, H, c_1, \dots, c_n) \quad (1.10)$$

удовлетворяет решение  $H = const$ , то равновесным состоянием является однородное состояние (все параметры среды постоянны). В общем случае, когда  $H \neq const$ , полученные ниже условия являются условиями локальной устойчивости.

Отметим, что в силу уравнения (1.9) для выполнения принципа максимума энтропии в равновесных состояниях достаточно требовать постоянство энергии и постоянство

потенциалов магнитного поля только в проводниках. Этим условиям можно удовлетворить, если магнитное поле создается сверхпроводящими соленоидами.

## 1.2. Условия термодинамической устойчивости.

Условия термодинамической устойчивости равновесных состояний даются неравенством

$$\delta^2 S = \int \rho \delta^2 s d\tau < 0. \quad (1.11)$$

Рассматривая  $s$  как функцию переменных  $u, \vartheta, B\vartheta, c_1, \dots, c_n$ , с использованием тождества (1.5), получим

$$\begin{aligned} T\delta s &= \delta u + p\delta\vartheta - \frac{H}{4\pi}\delta(B\vartheta) - \varphi_\alpha\delta c_\alpha, \\ T\delta^2 s &= -\delta T\delta s + \delta p\delta\vartheta - \frac{1}{4\pi}\delta H\delta(B\vartheta) - \delta\varphi_\alpha\delta c_\alpha. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Распишем здесь вариации  $\delta\varphi_\alpha, \delta s, \delta\vartheta, \delta H$  в переменных  $T, p, B\vartheta, c_\alpha$ , воспользовавшись следующими термодинамическими тождествами, выражающими равенство смешанных производных и следующих из (1.12):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial T}\right)_{p, B\vartheta, c_\alpha} &= -\left(\frac{\partial s}{\partial c_\alpha}\right)_{T, p, B\vartheta, (c_\alpha)}; & \left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial p}\right)_{T, B\vartheta, c_\alpha} &= \left(\frac{\partial v}{\partial c_\alpha}\right)_{T, p, B\vartheta, (c_\alpha)}; \\ \left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial(B\vartheta)}\right)_{T, p, c_\alpha} &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial H}{\partial c_\alpha}\right)_{T, p, B\vartheta, (c_\alpha)}; & \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{p, B\vartheta, c_\alpha} &= -4\pi\left(\frac{\partial s}{\partial(B\vartheta)}\right)_{T, p, (c_\alpha)}; \\ \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{p, B\vartheta, c_\alpha} &= -4\pi\left(\frac{\partial s}{\partial(B\vartheta)}\right)_{T, p, (c_\alpha)}; & \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{T, B\vartheta, c_\alpha} &= 4\pi\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial(B\vartheta)}\right)_{T, p, (c_\alpha)}; \\ \varphi_{\alpha\beta} &= \left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial c_\beta}\right)_{T, p, B\vartheta, (c_\beta)} = \left(\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial c_\alpha}\right)_{T, p, B\vartheta, (c_\alpha)} = \varphi_{\beta\alpha}; & c_{p, B\vartheta, c_\alpha} - c_{\vartheta, B, c_\alpha} &= T\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial T}\right)_{p, B\vartheta, c_\alpha}^2 \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{T, B\vartheta, c_\alpha}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь:

$$c_{p, B\vartheta, c_\alpha} = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{p, B\vartheta, (c_\alpha)}; \quad c_{\vartheta, B, c_\alpha} = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{\vartheta, B\vartheta, (c_\alpha)}$$

- удельные теплоемкости среды.

В результате проведенных преобразований выражение для  $\delta^2 s$  приводится к виду характеристической квадратичной формы:

$$T\delta^2 s = -\frac{1}{T}c_{\vartheta,B,c_\alpha}(\delta T)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right)_{T,B\vartheta,c_\alpha} \left( \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial T}\right)_{p,B\vartheta,c_\alpha} \delta T + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial p}\right)_{p,B\vartheta,c_\alpha} \delta p \right)^2 - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial H}{\partial B\vartheta}\right)_{T,p,c_\alpha} (\delta(B\vartheta))^2 - 2 \left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial(B\vartheta)}\right)_{T,p,c_\alpha} \delta(B\vartheta) \delta c_\alpha - \varphi_{\alpha\beta} \delta c_\alpha \delta c_\beta. \quad (1.14)$$

Из (1.11), (1.14) получаем следующие условия устойчивости локально равновесных состояний намагничивающейся среды

$$c_{p,B\vartheta,c_\alpha} > c_{\vartheta,B,c_\alpha} > 0; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right)_{T,B\vartheta,c_\alpha} < 0; \\ \left(\frac{\partial H}{\partial B\vartheta}\right)_{T,p,c_\alpha} > 0; \quad \varphi_{\alpha\beta} \delta c_\alpha \delta c_\beta > 0; \quad (1.15)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial H}{\partial B\vartheta}\right)_{T,p,c_\alpha} & \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial B\vartheta}\right)_{T,p,c_\alpha} & \dots & \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial B\vartheta}\right)_{T,p,c_\alpha} \\ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial B\vartheta}\right)_{T,p,c_\alpha} & \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial B\vartheta}\right)_{T,p,c_\alpha} & \varphi_{n1} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Более удобным является использование термодинамических переменных  $T, \rho, H, c_1, \dots, c_n$  вместо переменных  $T, p, B\vartheta, c_\alpha$ . В этих переменных для термодинамического потенциала  $f = u - Ts - BH\vartheta/(4\pi)$  на основании (1.5) получим

$$df = -s dT - p d\vartheta - \frac{B\vartheta}{4\pi} dH + \varphi_\alpha dc_\alpha. \quad (1.16)$$

Отсюда в случае изотропного закона намагничивания (1.10) следует

$$f = f^0(\rho, T, c_1, \dots, c_n) - \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^H \mu(\rho, T, H, c_1, \dots, c_n) H dH, \quad (1.17)$$

где  $f^0$  - массовая плотность свободной энергии Гельмгольца в отсутствие поля. Решение (1.17) уравнения (1.16) справедливо для сред, не обладающих магнитными свойствами в нулевом поле. Равенства (1.16), (1.17) определяют основные термодинамические функции изотропно намагничивающейся среды в переменных  $\rho, T, H, c_\alpha$  в виде

$$s = s^0 + \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^H \mu_T H dH; \quad p = p^0 + \frac{1}{4\pi} \int_0^H (\mu - \rho\mu_\rho) H dH;$$

$$\varphi_\alpha = \varphi_\alpha^0 - \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^H \mu_\alpha H dH; \quad u = u^0 + \frac{\mu H^2}{4\pi\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^H (\mu - T\mu_T) H dH. \quad (1.18)$$

Здесь и в дальнейшем, если не оговорено противное, буквой в позиции нижнего индекса обозначается частная производная, например:

$$\mu_\rho \equiv \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{T,H,c_\alpha}; \quad \mu_T \equiv \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{\rho,H,c_\alpha}; \quad \mu_\alpha \equiv \left( \frac{\partial \mu}{\partial c_\alpha} \right)_{\rho,T,H,(c_\alpha)}.$$

Верхний индекс "0" обозначает термодинамические функции среды в нулевом поле:

$$s^0 = - \left( \frac{\partial f^0}{\partial T} \right)_{\rho,c_\alpha}; \quad p^0 = \rho^2 \left( \frac{\partial f^0}{\partial \rho} \right)_{T,c_\alpha}; \quad \varphi_\alpha^0 = \left( \frac{\partial f^0}{\partial c_\alpha} \right)_{\rho,T,(c_\alpha)}.$$

Формулы (1.18) являются "рабочими" в гидродинамике намагничивающихся сред [12,23]. Поэтому возникает потребность в формулировке условий (1.15) в новых переменных. Для этого воспользуемся следующими термодинамическими тождествами:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial H}{\partial B} \right)_{T,\vartheta,c_\alpha} &= \vartheta \left( \frac{\partial H}{\partial (B\vartheta)} \right)_{T,p,c_\alpha} - \frac{\vartheta}{4\pi} \left( \frac{\partial H}{\partial \vartheta} \right)_{T,B\vartheta,c_\alpha}^2 \left( \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \right)_{T,B\vartheta,c_\alpha}^{-1}; \\ \left( \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \right)_{T,H,c_\alpha} &= \vartheta \left( \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \right)_{T,B\vartheta,c_\alpha} \left( \frac{\partial H}{\partial (B\vartheta)} \right)_{T,p,c_\alpha} \left( \frac{\partial B}{\partial H} \right)_{T,\vartheta,c_\alpha}; \\ c_{\vartheta,H,c_\alpha} &= c_{\vartheta,B,c_\alpha} + \frac{\vartheta T}{4\pi} \left( \frac{\partial B}{\partial T} \right)_{\vartheta,H,c_\alpha}^2 \left( \frac{\partial B}{\partial H} \right)_{\vartheta,T,c_\alpha}^{-1}; \\ c_{p,H,c_\alpha} &= c_{\vartheta,H,c_\alpha} - T \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial T} \right)_{p,H,c_\alpha} \left( \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \right)_{T,\vartheta,c_\alpha}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Приведенные тождества следуют из того обстоятельства, что равенство (1.16) является уравнением в дифференциалах.

Из (1.15) и (1.19) имеем следующие условия устойчивости:

термическая устойчивость:

$$c_{p,H,c_\alpha} > c_{\vartheta,H,c_\alpha} \geq c_{\vartheta,B,c_\alpha} > 0; \quad c_p^0 > c_\vartheta^0 > 0. \quad (1.20)$$

механическая устойчивость:

$$\frac{\partial p}{\partial \vartheta} < 0; \quad \frac{\partial p^0}{\partial \vartheta} < 0. \quad (1.21)$$

магнитная устойчивость:



$$\frac{\partial B}{\partial H} > 0. \quad (1.22)$$

диффузионная устойчивость:

$$\varphi_{\alpha\beta} \delta c_\alpha \delta c_\beta > 0; \quad \varphi_{\alpha\beta}^0 \delta c_\alpha \delta c_\beta > 0. \quad (1.23)$$

Магнитная и диффузионная устойчивость являются частным случаем магнитодиффузионной устойчивости, для обеспечения которой при выполнении (1.20) – (1.23) необходимо требовать положительности определителя в (1.15). В (1.20) – (1.23) и в дальнейшем все частные производные вычисляются в переменных  $\rho, T, H, c_\alpha; c_{g,H,c_\alpha}$  и  $c_{p,H,c_\alpha}$  - удельные теплоемкости среды при постоянных удельном объеме, напряженности поля, концентрациях и постоянных давлении, напряженности поля и концентрациях. После точки с запятой выписаны условия термодинамической устойчивости среды в отсутствие поля [22],

$$c_g^0 \equiv T \left( \frac{\partial s^0}{\partial T} \right)_{g,c_\alpha}; \quad c_{p^0}^0 = T \left( \frac{\partial s^0}{\partial T} \right)_{p^0,c_\alpha};$$

$$\varphi_{\alpha\beta} \equiv \left( \frac{\partial \varphi_\alpha^0(T, p^0, c_1, \dots, c_n)}{\partial c_\beta} \right)_{T,p^0,c_\beta}.$$

Названия для различных типов устойчивости приводятся в соответствии с принятой терминологией для среды в отсутствие поля. Условия (1.22) для однокомпонентной среды получено в [21]. Оно выражает условия взаимно - однозначного соответствия между напряженностью магнитного поля и магнитной индукцией. Его нарушение может приводить к ситуациям, когда одному и тому же значению  $H$  при постоянных концентрациях, температуре и плотности отвечает несколько значений магнитной индукции, и наоборот. Поэтому нами из приведенных соображений для обозначения условия (1.22) введен термин "магнитная устойчивость". Преобразуем выражения для величин  $\varphi_{\alpha\beta}$  :

$$\varphi_{\alpha\beta} = \left( \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial c_\beta} \right)_{T,p,H,c_\beta} + 4\pi \left( \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial H} \right)_{T,p,c_\alpha} \left( \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial H} \right)_{T,p,c_\alpha} \left( \frac{\partial(B\mathcal{H})}{\partial H} \right)_{T,p,c_\alpha}^{-1}.$$

Расписывая производные в правой части в переменных  $\rho, T, H, c_\alpha$  и учитывая выражение (1.18) для химического потенциала  $\varphi_\alpha$ , получим

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\beta}^0 - \nu q_{\alpha\beta} - \left( \frac{\partial p^0}{\partial \nu} \right)^{-1} \frac{\partial p^0}{\partial c_\alpha} \frac{\partial p^0}{\partial c_\beta} + \left( \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \right)^{-1} \frac{\partial p}{\partial c_\alpha} \frac{\partial p}{\partial c_\beta} + 4\pi \left( \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \right)^{-1} \Omega^{-1} \psi_\alpha \psi_\beta;$$

$$\varphi_{\alpha\beta}^0 = \tilde{\varphi}_{\alpha\beta}^0 + \left( \frac{\partial p^0}{\partial \vartheta} \right)^{-1} \frac{\partial p^0}{\partial c_\alpha} \frac{\partial p^0}{\partial c_\beta}; \quad \tilde{\varphi}_{\alpha\beta}^0 = \left( \frac{\partial \varphi_\alpha^0(\rho, T, c_1, \dots, c_n)}{\partial c_\beta} \right)_{\rho, T, c_\beta} = \tilde{\varphi}_{\beta\alpha}^0; \quad (1.24)$$

$$q_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \int_0^H \frac{\partial^2 \mu}{\partial c_\alpha \partial c_\beta} H dH; \quad \psi_\alpha = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial H} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \varphi}{\partial c_\alpha} \frac{\partial p}{\partial H}; \quad \Omega = \nu \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \frac{\partial B}{\partial H} - 4\pi \left( \frac{\partial p}{\partial H} \right)^2;$$

$$\left( \frac{\partial H}{\partial B \vartheta} \right)_{T, p, c_\alpha} = \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \Omega^{-1}.$$

Функции  $\varphi_{\alpha\beta}^0$ , входящие в (1.24), удовлетворяют равенствам

$$\varphi_{\alpha\beta}^0 c_\beta = 0; \alpha = 1, \dots, n. \quad (1.25)$$

Поскольку свободная энергия Гиббса системы при заданных давлении и температуре является однородной функцией первого порядка по массам составляющих компонентов, то термодинамические функции среды в отсутствие поля удовлетворяют уравнению Гиббса-Дюгема [22,24]

$$s^0 dT - \vartheta dp^0 + c_\alpha d\varphi_\alpha^0 = 0.$$

Поэтому при постоянных  $T, p^0$  получаем  $\varphi_{\alpha\beta}^0 c_\alpha dc_\beta = 0$ . В силу независимости дифференциалов  $dc_\beta$  отсюда следует (1.25). Полная система условий термодинамической устойчивости для нелинейно намагничивающейся многокомпонентной среды получена в [25].

### 1.3. Устойчивость по Ляпунову и термодинамическая устойчивость.

Однородное равновесное состояние намагничивающейся среды, определяемое значениями параметров  $U = \{ \bar{\nu} = 0; \rho, T, \vec{H} - \text{постоянные} \}$ , устойчиво относительно малых возмущений  $U' = U_0 \exp i(kx - \omega t)$ , если квадрат адиабатической скорости звука  $\lambda_s^2$  неотрицательный,  $\lambda_s = \omega/k$ . То обстоятельство, что в намагничивающейся среде скорость звука может быть чисто мнимой, и, следовательно, однородное равновесное состояние среды неустойчиво по Ляпунову, впервые было указано в работе [26]. Воспользуемся следующими представлениями для скорости  $\lambda_{s\perp}$  и  $\lambda_{s\parallel}$  скорости звуковых волн, распростра-

няющихся в непроводящей среде соответственно перпендикулярно и параллельно магнитному полю, полученными в работе [27]:

$$\lambda_{s,\parallel}^2 = \lambda_{s,\perp}^2 + \frac{g^2}{4\pi} \left( \frac{\partial H}{\partial g} \right)_{s,B}^2 \frac{c_{g,B}}{c_{g,H}} \left( \frac{\partial B}{\partial H} \right)_{g,T} ; \lambda_{s,\perp}^2 = -g^2 \frac{c_{p,H}}{c_{g,H}} \left( \frac{\partial p}{\partial g} \right)_{T,H} \quad (1.26)$$

$$\lambda_{s,\perp} \leq \lambda_s \leq \lambda_{s,\parallel}$$

Из неравенств (1.20)-(1.22) и формул (1.26) следует, что, если среда термодинамически устойчива, то она устойчива и по Ляпунову. Если среда неустойчива по Ляпунову, то с необходимостью нарушается одно (или несколько) из условий термодинамической устойчивости.

Необходимо отметить, что непосредственно в феррожидкостях условия механической и термической устойчивости можно не рассматривать, поскольку механические и тепловые свойства феррожидкости, в основном, определяются свойствами жидкостеносителя. Рассматривая феррожидкость как двухкомпонентную слабосжимаемую среду, в которой магнитными свойствами обладает только один компонент из (1.23)-(1.24) получим условия диффузионной и магнитной устойчивости в виде:

$$\frac{\partial B}{\partial H} \geq 0; \varphi_{11} > 0; \varphi_{22} > 0; \left( \varphi_{12}^0 + \frac{c_1}{c_2} v q_{11} \right) \frac{\partial B}{\partial H} \leq 0 \quad (1.27)$$

## 2. Изменение микроструктуры магнитной жидкости.

### 2.1. Приближение среднего поля в намагничивающихся средах [28,29].

В связи с полученными уравнениями (1.18) и зависимостями (1.24) конкретные критерии устойчивости определяются уравнениями термодинамического состояния в отсутствие поля и законом намагничивания среды. В дальнейшем анализируется приближение среднего поля в полидисперсных жидких магнетиках.

Намагниченность неидеальной среды определяется уравнением

$$M = M^{(0)}(\rho, T, H_e, c_1, \dots, c_n), \quad H_e = H + \lambda M, \quad M_{H=0} = 0, \quad (2.1)$$

$\lambda$  - параметр эффективного (среднего) поля. При  $\lambda=0$ ,  $M^{(0)}$  определяет намагниченность идеальной среды; в случае, когда магнитными свойствами обладает только один компонент, функция  $M^{(0)}$  представляется ланжевеновской зависимостью:

$$M^{(0)} = m_1 n_1 L(\xi_e), \quad \xi_e = \frac{m_1 (H + \lambda M)}{kT}, \quad L = \text{cth} \xi_e - \xi_e^{-1}, \quad (2.2)$$

$m_1$  и  $n_1$  соответственно магнитный момент отдельной феррочастицы и количество феррочастиц в единице объема соответственно.

В зависимости от значений параметра эффективного поля из (2.2) следуют классические теории намагничивания:

при  $\lambda = 0$  - уравнение Ланжевена для намагниченности идеального парамагнетика;

при  $\lambda = const$  - уравнение Вейсса для намагниченности неидеального парамагнетика;

при  $\lambda = \frac{4\pi}{3}$  и  $\xi_e \ll 1$  (случай слабых полей) - закон намагничивания Клаузиуса-

Мосотти

$$\frac{\mu - 1}{\mu + 2} = \frac{\sigma_1}{3}; \quad \sigma_1 = \frac{4\pi}{3} \frac{m_1^2 \rho c_1}{MkT},$$

$M$  - масса молекулы;  
при

$$\lambda = \frac{8\pi}{2 + 3\sigma_1 + (9 + 6\sigma_1 + 9\sigma_1^2)^{1/2}}, \quad \xi_e \ll 1$$

- уравнение магнитного состояния Дебая-Онзагера в виде

$$(\mu - 1)(2\mu + 1) = 3\sigma_1\mu.$$

С использованием теории Леонтовича-Мандельштама неравновесных термодинамических процессов [30] можно показать, что в равновесных термодинамических состояниях параметр эффективного поля зависит от определяющих параметров, причем наиболее общая зависимость имеет вид

$$\lambda = \lambda^{(0)}(\rho, T, M^2, c_1, \dots, c_n). \quad (2.3)$$

Таким образом, параметр эффективного поля зависит от напряженности магнитного поля через квадрат намагниченности.

Показано, что именно магнитодипольное взаимодействие между феррочастицами обуславливает вклад намагничивания во внутреннюю энергию и магнотриксционные напряжения в намагничивающихся средах.

В [25] исследованы условия (1.27) магнитной и диффузионной устойчивости, в частности, в случае когда зависимость (2.2) конкретизируется в виде

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 M^2, \quad \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0; \quad (4)$$

зависимость  $M^{(0)}$  - ланжевенская, в случае отдельных уравнений состояния среды в отсутствие поля. В результате установлено, что учет только полидисперсности магнитных жидкостей не позволяет разъяснить расслоение жидкости на фазы в магнитном поле. Магнитные жидкости следует рассматривать, как микрогетерогенные реальные коллоиды,

поскольку идеальные жидкости с магнитными свойствами расслаиваются в слабом магнитном поле при наличии дипольного взаимодействия.

## 2.2. Равновесные термодинамические модели структурирования магнитных жидкостей.

При наличии агрегатов будем описывать феррожидкость в “среднем”, представляя магнитную фракцию в виде агрегатов (кластеров), каждый из которых объединяет  $\gamma = \nu^{-1}$  феррочастиц. Количество кластеров в единице  $n_a$  и их магнитный момент  $m_a$  определяются равенствами:  $n_a = \nu n_1, m_a = \nu^{-1} m_1$ . Поэтому намагниченность структурированной среды определяется из равенства:

$$M = m_1 n_1 L(\xi), \xi = \frac{m_1 (H + \lambda M)}{kT\nu}, \quad L = \text{cth}\xi - \xi^{-1} \quad (2.5)$$

Общую зависимость (1.29) выберем в виде:

$$M^2 = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3, \quad a_i = a_i(n_1, T)$$

При определенных ограничениях на коэффициенты  $a_i$  график  $\lambda = \lambda(M)$  имеет вид, изображенный на рис.1, причем  $0 < \tilde{M}_2 < \tilde{M}_1 < m_1 n_1$ .

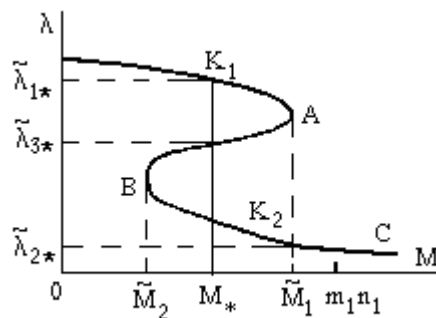


Рис.1. Зависимость параметра эффективного поля от намагниченности в магнитной жидкости с изменяющейся микроструктурой.

При изменении напряженности магнитного поля параметр  $\lambda$  скачкообразно изменяется от значений  $\lambda^{(1)}$  на верхней ветке OA (неструктурированная фаза), до значений  $\lambda^{(2)}$  на ветке BC (структурирована фаза) при значении  $M = M_*$  намагниченности структурирования. Из (1.18) следует, что первые производные термодинамического потенциала (1.17) не изменяются, поскольку неизменными являются намагниченность и концентрация магнитной фазы. Таким образом, структурирование магнитной жидкости осуществ-

вляется в результате фазового перехода второго рода. Среднее количество феррочастиц в возникающих агрегатах равно

$$\gamma = \nu^{-1}(n_1, T) = \left( 1 + \frac{m_1 M_*}{kT \xi_e} \langle \lambda \rangle \right)^{-1}; \langle \lambda \rangle = \lambda_*^{(2)} - \lambda_*^{(1)} < 0; \quad (2.6)$$

Звездочкой обозначены значения величин в точке структурирования. Критическое поле структурирования  $H_*$  определяется из зависимости (2.5) в виде

$$H_* = H_*(n_1, T) = -\lambda_*^{(1)} M_* + \frac{kT \xi_{e*}}{m_1}; \quad \xi_{e*} = \xi_{e*}(n_1, T) = L^{-1} \left( \frac{M_*}{m_1 n_1} \right).$$

Здесь  $L^{-1}$  — функция, обратная функции Ланжевена.

Значение  $H_*$  возрастает с повышением температуры и уменьшается с возрастанием температуры и уменьшается с ростом объемной концентрации феррочастиц.  $H_*$  линейно зависит от температуры, а  $T_*$  - линейно от напряженности магнитного поля. Переходу среды в структурированное состояние на равновесных зависимостях  $M=M(H)$ ,  $M=M(T)$  соответствуют угловые точки. При этом  $\langle M_T \rangle / \langle M_H \rangle = -k \xi_{e*} / m_1$ . Указанные особенности фазового перехода соответствуют экспериментальным результатам ([31, 32, 33, 34]. При этом среднее число феррочастиц в агрегатах, как можно оценить по формуле (2.6), изменяется от двух до двадцати по порядку. Показано, что структурированная фаза диффузионно устойчива, но при повышении напряженности магнитного поля в интервале  $H > H_*$  феррожидкость обязательно расслаивается на высоконцентрированную магнитную фазу и немагнитную фазу-носитель в связи с нарушением условий (1.27) диффузионной устойчивости. Параметры  $\lambda$  и  $\nu$  играют роль параметров порядка системы. Постоянство параметров  $\lambda$  и  $\nu$  соответствует системе с постоянной микроструктурой.

### 2.3. Динамические фазовые переходы.

Полная система уравнений динамики намагничивающейся среды с изменяющейся микроструктурой получена в работе [11]. При описании процессов структурирования можно пренебречь различием в массах феррочастиц и молекул жидкости-носителя. Кроме того, поскольку процессы структурирования осуществляются в результате микродиффузии феррочастиц, положим в дальнейшем скорость жидкости равной нулю. Тогда из числа определяющих параметров можно исключить плотность феррожидкости и ее скорость. Основная система уравнений процессов структурирования будет включать уравнения баланса параметров порядка  $\lambda$  и  $\nu$ , уравнения электродинамики и уравнение баланса энтропии в следующем виде:

$$\frac{d\lambda}{dt} = L_{66} [\rho Q^{(\lambda)} + \alpha_1 \nabla(\rho \nabla \lambda)]; \quad \frac{dv}{dt} = L_{88} [\rho Q^{(v)} + \alpha_2 \nabla(\rho \nabla v)] \quad (2.7)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad ; \quad \operatorname{rot} \vec{H} = 0; \quad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M};$$

$$M = m_1 n_1 L(\xi); \quad \xi = \frac{m_1 (H + \lambda M)}{kT\nu};$$

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \operatorname{div}(\kappa \nabla T) + L_{66} [\rho Q^{(\lambda)} + \alpha_1 \nabla(\rho \nabla \lambda)]^2 + L_{88} [\rho Q^{(v)} + \alpha_2 \nabla(\rho \nabla v)]^2;$$

Здесь она приведена при условиях пренебрежения перекрестными эффектами, взаимной диффузией и векторными потоками величин  $\lambda$  и  $\nu$ . В соответствии со вторым законом термодинамики феноменологические коэффициенты  $\kappa$ ,  $L_{66}$ ,  $L_{88}$  неотрицательны. Массовая плотность внутренней энергии имеет вид

$$u = \frac{1}{2} [\alpha_1 (\nabla \lambda)^2 + \alpha_2 (\nabla \nu)^2] + u^{(0)}(\rho, T, \vec{B}, \lambda, \nu),$$

где первое слагаемое описывает энергию микронеоднородностей в соответствии с теорией Орнштейна-Цернике [35], обусловленную неоднородностью параметров порядка:  $\alpha_1 \geq 0$ ,

$\alpha_2 \geq 0$ . Термодинамический потенциал  $f^{(0)} = u^{(0)} - Ts - \frac{BH\vartheta}{4\pi}$  удовлетворяет уравнению

Гиббса

$$df^{(0)} = -s dT - \frac{BH\vartheta}{4\pi} dH - Q^{(\lambda)} d\lambda - Q^{(v)} d\nu$$

и определяется следующим образом:

$$f^{(0)} = \tilde{f}^{(0)}(\rho, T, \lambda, \nu) - \frac{H^2}{8\pi\rho} + \frac{\lambda M^2}{2\rho} - \frac{n_1 kT\nu}{\rho} \ln \frac{sh \xi_e}{\xi_e} \quad (2.8)$$

При получении этой формулы на всем множестве значений  $\lambda$  и  $\nu$  из области их изменения предполагается выполненным условие парамагнитности среды, имеющее вид:

$T > T_k = \lambda m_1^2 n_1 / (3k\nu)$ . Система уравнений (2.7) замыкается следующими уравнениями состояния среды с изменяющейся микроструктурой:

$$s = -\frac{\partial \tilde{f}^{(0)}}{\partial T} + \frac{n_1 k\nu}{\rho} \left[ \ln \frac{sh \xi_e}{\xi_e} - \xi_e L(\xi_e) \right], \quad (2.9)$$

$$Q^{(\lambda)} = -\frac{\partial \tilde{f}^{(0)}}{\partial \lambda} + \frac{M^2}{2\rho}; \quad Q^{(v)} = -\frac{\partial \tilde{f}^{(0)}}{\partial \nu} + \frac{n_1 kT}{\rho} \left[ \ln \frac{sh \xi_e}{\xi_e} - \xi_e L(\xi_e) \right].$$

Выражения для функции  $\tilde{f}^{(0)}(\rho, T, \lambda, \nu)$  можно получить в следующих случаях:

1. Намагничивающаяся жидкость, микроструктура которой непрерывно изменяется при изменении магнитного поля.

Тогда, предполагая аналитичность функции  $\tilde{f}^{(0)}(\rho, T, \lambda, \nu)$  по параметрам  $\lambda$  и  $\nu$ , в простейшем случае получим

$$\tilde{f}^{(0)} = f^0(\rho, T) + \frac{1}{2} [A^{(\lambda)}(\lambda - \lambda_1)^2 + A^{(\nu)}(\nu - \nu_1)^2], \quad (2.10)$$

$A^{(\lambda)}$ ,  $A^{(\nu)}$  - постоянные;  $\lambda_1$  и  $\nu_1$  - равновесные значения параметров  $\lambda$  и  $\nu$  в отсутствие поля,  $f^0(\rho, T) = \tilde{f}^{(0)}(\rho, T, \lambda_1(\rho, T), \nu_1(\rho, T))$  - равновесный термодинамический потенциал в нулевом поле, удовлетворяющий уравнению:

$$df^0 = -s^0 dT - p^0 d\vartheta, \quad ,$$

$s^0, p^0$  - энтропия и давление в отсутствие поля. В этом случае для равновесных зависимостей  $\lambda^{(0)}$  и  $\nu^{(0)}$  получаем выражения

$$\lambda^{(0)} = \lambda_1 + \lambda_2 M^2; \nu^{(0)} = \nu_1 + \nu_2 \left( \ln \frac{sh \xi_e}{\xi_e} - \xi_e L \right); \lambda_2 = (2\rho A^{(\lambda)})^{-1}; \nu_2 = n_1 kT (\rho A^{(\nu)})^{-1}.$$

Поскольку при заданных  $\rho, T, H$  в состоянии  $\lambda = \lambda^{(0)}, \nu = \nu^{(0)}$  обеспечивается минимум термодинамического потенциала, то выполняются неравенства

$$Q_\lambda^{(\lambda)} < 0; \quad Q_\nu^{(\nu)} < 0; \quad Q_\lambda^{(\lambda)} Q_\nu^{(\nu)} - Q_\nu^{(\lambda)} Q_\lambda^{(\nu)} > 0. \quad (2.11)$$

Поэтому  $\lambda_2 \geq 0$ ,  $\nu_2 \geq 0$ ; с возрастанием поля количество феррочастиц в кластерах возрастает и одновременно возрастает магнитодипольное взаимодействие между кластерами. Равенство  $\nu^{(0)} = 0$  определяет значения равновесных определяющих параметров, при которых в жидкости возникают агрегаты в виде капель магнитной фазы.

2. Намагничивающаяся среда, микроструктура которой изменяется в результате фазового перехода II -го рода.

В этом случае, на основании основных положений теории фазовых переходов Л.Д.Ландау [36], для  $\tilde{f}^{(0)}$  получаем выражение

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{(0)} = f^0(\rho, T) + \frac{\lambda M_*^2}{2\rho} + \frac{n_1 kT \nu}{\rho} \left[ \ln \frac{sh \xi_{e^*}}{\xi_{e^*}} - \xi_{e^*} L_* \right] + \Phi \left[ (m_1^2 n_1^2 / \rho) L_* \lambda \right] - \\ - \Phi \left[ \frac{n_1 kT}{\rho} \xi_{e^*} (\nu - \nu_{1*}) + \frac{m_1^2 n_1^2}{\rho} L_* \lambda_{1*} \right], \end{aligned} \quad (2.12)$$

где полином  $\Phi(\omega)$  определяется в виде

$$\Phi(\omega) = A(\rho, T) \int (\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)(\omega - \omega_3) d\omega,$$

$$\omega_i = (m_1^2 n_1^2 / \rho) L_* \lambda_{i*}; \quad \nu_{i*} - \nu_{j*} = \frac{m_1^2 n_1^2}{kT} \frac{L_*}{\xi_{e^*}} (\lambda_{i*} - \lambda_{j*}); \quad A < 0$$



$$\lambda_{1*} \geq \lambda_{3*} \geq \lambda_{2*}; v_{1*} \geq v_{3*} \geq v_{2*}$$

Построенная функция  $f^{(0)}$  удовлетворяет необходимым условиям в точке фазового перехода  $\xi_e = \xi_{e*}$

$$\langle f^{(0)} \rangle = 0; \langle p \rangle = 0; \langle s \rangle = 0; \langle M \rangle = 0.$$

Обобщенные термодинамические силы  $Q^{(\lambda)}$  и  $Q^{(v)}$  имеют вид

$$Q^{(\lambda)} = -A \left( \frac{m_1^2 n_1^2}{\rho} L_* \right)^4 (\lambda - \lambda_{1*})(\lambda - \lambda_{2*})(\lambda - \lambda_{3*}) + \frac{M^2}{2\rho} - \frac{M_*^2}{2\rho},$$

$$Q^{(v)} = A \left( \frac{n_1 kT}{\rho} \xi_{e*} \right)^4 (v - v_{1*})(v - v_{2*})(v - v_{3*}) + \frac{n_1 kT}{\rho} \left[ \ln \frac{\xi_{e*} sh \xi_e}{\xi_e sh \xi_{e*}} - \xi_e L + \xi_{e*} L_* \right].$$

Равновесная зависимость  $\lambda = \lambda^{(0)}(M^2)$  совпадает с зависимостью (2.3) в случае

$$|A| < \frac{64}{3} \left( \frac{\rho}{n_1 kT} \right)^3 \left[ \xi_{e*} L_* - \ln \frac{sh \xi_{e*}}{\xi_{e*}} \right] / \left( \xi_{e*}^4 | \langle v \rangle |^3 \right).$$

В равновесных состояниях среднее число частиц в кластерах, как и параметр среднего поля зависит от напряженности магнитного поля через намагниченность среды. Если микроструктура магнитной жидкости изменяется при изменении магнитного поля, то и в отсутствие поля некоторое количество феррочастиц объединено в кластеры.

Отметим, что условия устойчивости (2.11) в случае среды с непрерывно изменяющейся микроструктурой эквивалентны неравенствам

$$\lambda_2 \geq 0; v_2 \geq 0, (\partial M / \partial H)_{\rho, T} > 0,$$

так что устойчивым состояниям магнитной жидкости соответствуют участки монотонно возрастающей равновесной зависимости  $M = M(H)$  намагниченности. В случае жидкости микроструктура которой изменяется при фазовом переходе II рода нарушается первое неравенство (2.11), так что такая среда неустойчива по отношению к возмущениям параметра  $\lambda$ . Характерное время развития этой неустойчивости  $\tau_\lambda$  тем больше, чем меньше феноменологический коэффициент  $L_{66} \geq 0$ . Поэтому, при выполнении неравенства  $\tau \ll \tau_\lambda$  эта неустойчивость не влияет на характеристики процесса структурирования.

Естественные граничные условия для параметров  $\lambda$  и  $v$  следуют из условия непрерывности нормальной составляющей вектора плотности потока энергии на поверхности твердого тела  $\Sigma$ . Учитывая, что на  $\Sigma$  непрерывны составляющие вектора напряжений ( $\langle p_{ik} n_k \rangle = 0$ ), нормальной составляющей вектора плотности потока тепла

( $\langle q_k n_k \rangle = 0$ ), касательные составляющие напряженностей электрического и магнитного полей ( $\langle \vec{H}_\tau \rangle = 0, \langle \vec{E}_\tau \rangle = 0$ ) и нормальной составляющей вектора магнитной индукции ( $\langle \vec{B}_n \rangle = 0$ ), получаем:

$$\left. \frac{\partial \lambda}{\partial n} \right|_\Sigma = 0; \quad \left. \frac{\partial v}{\partial n} \right|_\Sigma = 0, \quad (2.13)$$

так что диффузия параметров  $\lambda$  и  $v$  через границу отсутствует.

Отметим, что установление равновесных распределений параметров  $\lambda$  и  $v$ , как следует из (2.7), сопровождается диссипацией энергии и перераспределением температуры в объеме жидкости. Предполагая теплоемкость жидкости-носителя достаточно большой, можно пренебречь этой неоднородностью, считая температуру постоянной. В этом случае напряженность магнитного поля и температура могут рассматриваться как внешние параметры, управляющие процессами изменения микроструктуры в подсистеме магнитных частиц, входящих в состав феррожидкости.

### 3. Пространственные структуры в намагничивающейся жидкости

#### 3.1. Постановка задачи

Рассмотрим неподвижный объем намагничивающейся жидкости, находящейся в постоянном однородном магнитном поле напряженности  $\vec{H}$ . Равновесное состояние такой жидкости определяется ее плотностью  $\rho$ , температурой  $T$ , напряженностью магнитного поля  $H$ , средним числом частиц в агрегатах  $\gamma = v^{-1}$  и параметром эффективного магнитного поля  $\lambda$ . Изменение магнитного состояния среды описывается системой уравнений (2.7), которая приводится к виду:

$$\tau_\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial t} = D_\lambda \Delta \lambda + Q^{(\lambda)}(\lambda, v; H), \quad \tau_v \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + Q^{(v)}(\lambda, v; H). \quad (3.1)$$

Функции  $Q^{(\lambda)}(\lambda, v; H)$  и  $Q^{(v)}(\lambda, v; H)$  задаются выражениями:

$$Q^{(\lambda)}(\lambda, v; H) = \frac{1}{2} \left[ L^2 - L_*^2 - 2\beta(\lambda - \lambda_{1*})(\lambda - \lambda_{2*})(\lambda - \lambda_{3*}) \right],$$

$$Q^{(v)}(\lambda, v; H) = f(\xi) - f(\xi_*) + \alpha(v - v_{1*})(v - v_{2*})(v - v_{3*}).$$

Здесь  $\tau_\lambda = (L_{66} m_1^2 n_1^2)^{-1}$ ,  $\tau_v = (L_{88} n_1 k T)^{-1}$ ,  $D_\lambda = \alpha_1 \rho / (m_1^2 n_1^2)$ ,  $D_v = \alpha_2 \rho / (n_1 k T)$ ,  
 $\alpha = A(n_1 k T / \rho)^3 \xi_{e*}^4$ ,  $\beta = A(m_1^2 n_1^2 / \rho)^3 L_*^4$ ,  $M_s = m_1 n_1$  — намагниченность насыщения жидко-

сти,  $n_1 = c_1 \rho / \mathcal{M}$  – объемная плотность феррочастиц,  $c_1$  – массовая концентрация частиц, которая считается постоянной,  $\mathcal{M}$  – масса одиночной феррочастицы;  $L_* := L(\xi_*) = M_* / M_s$ , где  $M_*$  – намагниченность структурирования жидкости;  $\lambda_{i*}, \nu_{i*}$  ( $i = \overline{1,3}$ ) – равновесные значения  $\lambda$  и  $\nu$  при  $M = M_*$ , причем  $\lambda_{1*} > \lambda_{3*} > \lambda_{2*}$ ;  $\lambda_{1*} + \lambda_{2*} = 2\lambda_{3*}$ ;  $\nu_{1*} > \nu_{3*} > \nu_{2*}$ ;  $\nu_{i*} - \nu_{j*} = m_1 M_s L_*^* (\lambda_{i*} - \lambda_{j*}) / (kT \xi_*)$ ;  $\alpha = (kT / (m_1 M_s))^3 * (\xi_* / L_*)^4 \beta$ ;  $f(\xi) := \ln(\text{sh } \xi / \xi) - \xi L(\xi)$ . Параметры  $\tau_\lambda, \tau_\nu, D_\lambda, D_\nu$  и  $\beta (< 0)$  считаются постоянными. Кроме того, предполагается выполненным условие парамагнитности среды:  $3kT\nu > m_1 M_s \lambda$ . В рассматриваемом случае уравнения электродинамики в системе (2.7) и краевые условия для магнитного поля удовлетворяются автоматически.

Однородные равновесные состояния жидкости  $\lambda = \lambda_h = \text{const}$ ,  $\nu = \nu_h = \text{const}$  удовлетворяют уравнениям:

$$Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu; H) = 0, \quad Q^{(\nu)}(\lambda, \nu; H) = 0. \quad (3.2)$$

При  $\lambda_{1*} \neq \lambda_{2*}$  функции  $\lambda(M), \nu(M)$ , определяемые этими уравнениями, неоднозначны, жидкость обладает гладкой самопересекающейся кривой намагничивания, состоящей из девяти ветвей однозначности функции  $M(H)$  (Рис.2), и в разных интервалах изменения напряженности магнитного поля имеет от одного до девяти равновесных состояний [14]. Устойчивость этих состояний обеспечивается условиями (2.11):

$$Q_\lambda^{(\lambda)} < 0, \quad Q_\nu^{(\nu)} < 0, \quad \Delta := Q_\lambda^{(\lambda)} Q_\nu^{(\nu)} - Q_\lambda^{(\nu)} Q_\nu^{(\lambda)} > 0. \quad (3.3)$$

Анализ этих условий показывает, что при выполнении неравенства

$$-\frac{\beta \langle \lambda \rangle^2}{6} > \frac{m_1 M_s L_*^2}{kT\nu_{2*} / L'(\xi_*) - m_1 M_s \lambda_{3*}} \quad (3.4)$$

две ветви кривой намагничивания 21 и 23 содержат асимптотически устойчивые однородные равновесные состояния, при

$$\frac{m_1 M_s L_*^2}{kT\nu_{1*} / L'(\xi_*) - m_1 M_s \lambda_{3*}} < -\frac{\beta \langle \lambda \rangle^2}{6} < \frac{m_1 M_s L_*^2}{kT\nu_{2*} / L'(\xi_*) - m_1 M_s \lambda_{3*}} \quad (1.5)$$

асимптотически устойчивые состояния принадлежат ветви 21 кривой, а если не выполняется ни одно из условий (3.4), (3.5), жидкость неустойчива в любом магнитном поле. В дальнейшем рассматриваются жидкости, параметры которых удовлетворяют условию (3.4).

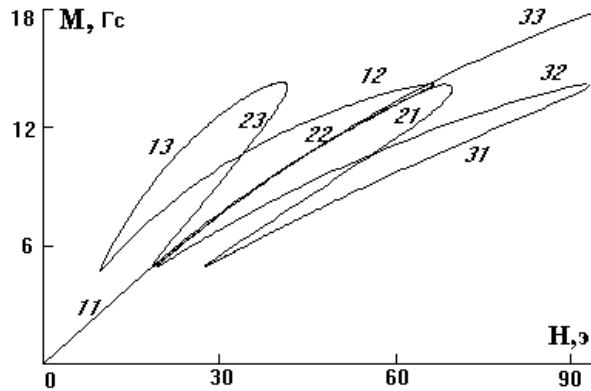


Рис.2. Кривая намагничивания среды ( $m_1 = 10^{-16}$  эрг/Гс,  $M_s = 40$  Гс,  $\xi_* = 1$ ,  $\beta = -0.1$ ,

$$\lambda_{1*} = 5, \lambda_{3*} = 4, \nu_{3*} = 0.25)$$

Характер решений системы (3.1) определяется видом кривой локальной связи, которая задается на плоскости  $(\nu, \lambda)$  уравнением  $Q^{(\nu)}(\lambda, \nu; H) = 0$  при  $H = const$ . В работе [17] показано, что существует диапазон значений напряженности магнитного поля, в котором кривая локальной связи для намагничивающейся жидкости имеет V- или И-образную форму (Рис.3), т.е. рассматриваемая система является V- или И-системой [21], соответственно, причем  $Q^{(\nu)} > 0$  под кривой и  $Q^{(\nu)} < 0$  - над кривой. В этом случае график зависимости  $Q^{(\nu)}$  от  $\nu$  при фиксированном  $\lambda$  качественно воспроизводит кривую локальной связи и тоже имеет V- или И-образный вид. Другой существенной характеристикой системы является кривая уравнения состояния, которая задается на той же плоскости уравнением  $Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu; H) = 0$  при  $H = const$ . Для намагничивающейся жидкости в указанном диапазоне значений  $H$  она имеет S-образную форму, причем справа от кривой  $Q^{(\lambda)} < 0$ , а слева -  $Q^{(\lambda)} > 0$ .

Исследуем представляющий интерес для практики случай K-системы [37], для которой  $D_\nu \ll D_\lambda$ . В K-системе параметр  $\lambda$  изменяется в пространстве значительно медленнее, чем параметр  $\nu$ , и  $\nu$  является быстрой переменной, а параметр  $\lambda$  — медленной переменной.

В работе рассматриваются стационарные неоднородные решения системы (3.1) типа статических автосолитонов и периодических страт.

### 3.2. Слоистые и полосообразные структуры

Пусть намагничивающаяся жидкость находится между двумя параллельными бесконечными немагнитными пластинами в магнитном поле, параллельном пластинам. Начало прямоугольной декартовой системы координат  $O$  выберем в середине слоя жидкости,

ось  $Ox$  направим перпендикулярно слою, а ось  $Oy$  – вдоль магнитного поля. Рассмотрим одномерные стационарные решения системы (3.1), которые удовлетворяют уравнениям:

$$D_\lambda \frac{d^2 \lambda}{dx^2} + Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu; H) = 0, \quad (3.6)$$

$$D_\nu \frac{d^2 \nu}{dx^2} + Q^{(\nu)}(\lambda, \nu; H) = 0, \quad (3.7)$$

и краевым условиям:

$$\frac{d\lambda}{dx} \left( -\frac{L}{2} \right) = \frac{d\lambda}{dx} \left( \frac{L}{2} \right) = 0, \quad \frac{d\nu}{dx} \left( -\frac{L}{2} \right) = \frac{d\nu}{dx} \left( \frac{L}{2} \right) = 0, \quad (3.8)$$

где  $L$  – толщина слоя жидкости.

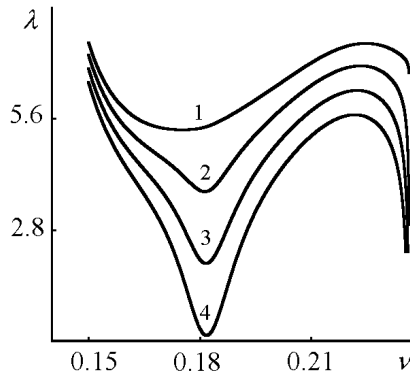


Рис.3. Кривые локальной связи (1 -  $H = 1 \text{ э}$ , 2 -  $H = 10 \text{ э}$ , 3 -  $H = 20 \text{ э}$ , 4 -  $H = 30 \text{ э}$ )

**Страты в системах малого размера.** В слое жидкости, для которого  $D_\nu \ll L^2 \ll D_\lambda$  (система малого размера), параметр эффективного магнитного поля принимает практически одинаковые значения во всех жидких частицах:  $\lambda = \lambda_c = \text{const}$ , а функция  $\nu(x)$  является решением задачи:

$$\nu'' + Q^{(\nu)}(\lambda_c, \nu(x); H) = 0, \quad (3.9)$$

$$\nu' \left( -\frac{l}{2} \right) = \nu' \left( \frac{l}{2} \right) = 0, \quad (3.10)$$

$$\int_{-l/2}^{l/2} Q^{(\lambda)}(\lambda_c, \nu(z); H) dz = 0. \quad (3.11)$$

Здесь штрихом обозначена производная по безразмерной переменной  $z = x/\sqrt{D_v}$ ,  $l := L/\sqrt{D_v}$ . Соотношение (3.11) получено в результате интегрирования уравнения (3.6) по толщине слоя жидкости с учетом краевых условий (3.8) для  $\lambda$ .

Фазовый портрет динамической системы, к которой сводится уравнение (3.9), определяется величиной  $\lambda_c$ . Если  $\lambda_- < \lambda_c < \lambda_+$ , где  $\lambda_-, \lambda_+$  — точки минимума и максимума кривой локальной связи, соответственно, система имеет три неподвижные точки (обозначим их  $v_1, v_2, v_3$ ;  $v_1 < v_2 < v_3$ ): седловые точки  $v_1, v_3$  и центр  $v_2$ . Рассмотрим то значение  $\lambda_c = \lambda_s$ , при котором выполняется условие:

$$\int_{v_1}^{v_3} Q^{(v)}(\lambda_s, v; H) dv = 0. \quad (3.12)$$

В этом случае на фазовой плоскости системы имеется ячейка, ограниченная двумя сепаратрисами, одна из которых выходит из седла  $v_1$  и входит в седло  $v_3$ , а другая выходит из седла  $v_3$  и входит в седло  $v_1$ . Близкая к границе ячейки замкнутая траектория соответствует широкой страте в центре слоя жидкости. Страта содержит участки плавного и резкого изменения параметра  $v$ : на плоскости  $(\lambda, v)$  плавные изменения  $v$  происходят в малых окрестностях точек  $(\lambda_s, v_1)$ ,  $(\lambda_s, v_3)$ , а резкие изменения — вдоль отрезка  $v_1 < v < v_3$  прямой  $\lambda = \lambda_s$ . Для горячей (холодной) страты среднее число частиц в агрегатах в середине отрезка  $-l/2 < z < l/2$  больше (меньше), чем вблизи границы. Из интегрального условия (3.11) определяется ее размер: для горячей страты [17]

$$l_s = \frac{Q^{(\lambda)}(\lambda_s, v_1; H)}{Q^{(\lambda)}(\lambda_s, v_1; H) - Q^{(\lambda)}(\lambda_s, v_3; H)} l,$$

для холодной страты

$$l_s = \frac{Q^{(\lambda)}(\lambda_s, v_3; H)}{Q^{(\lambda)}(\lambda_s, v_3; H) - Q^{(\lambda)}(\lambda_s, v_1; H)} l.$$

Решение типа широкой страты существует только в том случае, когда дробь, стоящая в правой части, положительна.

На рис.4 показаны структуры, которые образуются в намагничивающейся жидкости при различных значениях напряженности магнитного поля ( $a$  - горячая страта,  $b$  - холодная страта). Расчеты проводились при следующих значениях параметров модели:  $m_1 = 10^{-16}$  эрг/Гс,  $M_s = 40$  Гс,  $\xi_* = 1$ ,  $\beta = -0.1$ ,  $\lambda_{1*} = 5$ ,  $\lambda_{3*} = 4$ ,  $v_{3*} = 0.2$ . В представленном

на рис.3 диапазоне изменения напряженности магнитного поля ширина горячей страты с ростом  $H$  увеличивается, а холодной - уменьшается, при этом высота страты  $\Delta y = 1/v_3 - 1/v_1$  существенно не изменяется и согласуется с оценкой для числа частиц в цепочечных агрегатах, приведенной в работе [38]. На рис.5 показано распределение намагниченности в слое жидкости.

Кроме одиночной горячей или холодной страты задача (3.9) - (3.11) имеет множество периодических решений в виде последовательности одинаковых страт периода  $l_p = l/N$  ( $N$  - натуральное число), они удовлетворяют условиям:

$$v' \left( -\frac{l_p}{2} \right) = v' \left( \frac{l_p}{2} \right) = 0, \quad v \left( -\frac{l_p}{2} \right) = v \left( \frac{l_p}{2} \right) \quad (3.13)$$

$$\int_{-l_p/2}^{l_p/2} Q^{(\lambda)}(\lambda_s, v(z); H) dz = 0. \quad (3.14)$$

Периодическим решениям соответствуют замкнутые траектории, расположенные внутри ячейки, ограниченной сепаратрисами.

Значение  $l_p$  задается выражением:

$$l_p = \sqrt{2} \int_{v_i}^{v_n} \frac{dv}{\sqrt{\int_v^{v_i} Q^{(v)}(\lambda_s, v; H) dv}}, \quad (3.15)$$

где  $v_i, v_n$  - точки пересечения траектории с осью абсцисс  $v$  на фазовой плоскости. Уравнения (3.14), (3.15) образуют систему относительно периода  $l_p$  и одной из точек пересечения, например  $v_i$ . Вторая точка  $v_n$  находится из условия:

$$\int_{v_i}^{v_n} Q^{(v)}(\lambda_s, v; H) dv = 0.$$

**Широкие статические автосолитоны.** В случае  $D_v \ll D_\lambda \ll L^2$  (система большого размера) изменение параметра эффективного магнитного поля  $\lambda$  в жидкости сопоставимо с изменением параметра  $v$ , а уравнения (3.6), (3.7) в безразмерных переменных имеют вид:

$$\lambda'' + Q^{(\lambda)}(\lambda, v; H) = 0 \quad \varepsilon^2 v'' + Q^{(v)}(\lambda, v; H) = 0, \quad (3.16)$$

где штрихом обозначена производная по безразмерной переменной  $z = x/\sqrt{D_\lambda}$ ,

$$\varepsilon = \sqrt{D_v / D_\lambda} \ll 1.$$

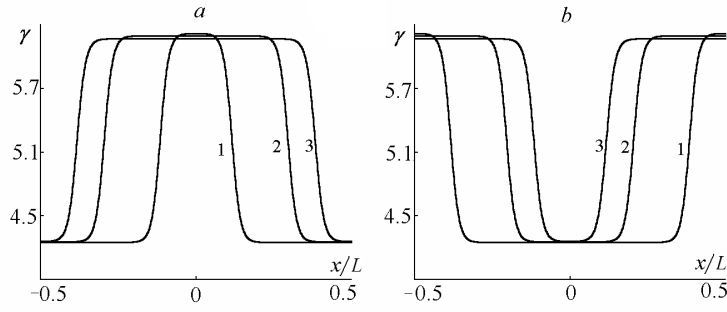


Рис.4. Широкие страты в намагничивающейся жидкости ( 1 -  $H = 15\varepsilon$ ,  
2 -  $H = 18\varepsilon$ , 3 -  $H = 21\varepsilon$ ),  $\gamma$  - число частиц в агрегатах.

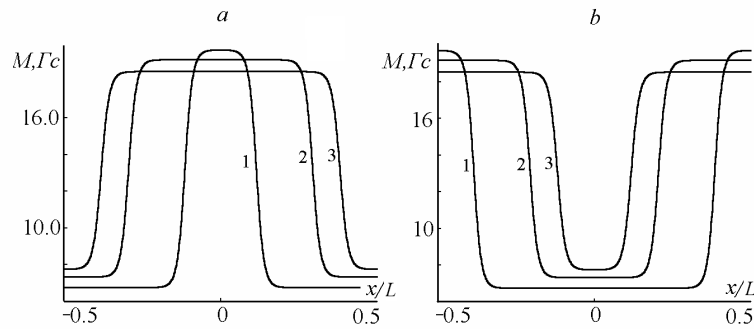


Рис.5. Распределение намагниченности в слое жидкости ( 1 -  $H = 15\varepsilon$ , 2 -  $H = 18\varepsilon$ ,  
3 -  $H = 21\varepsilon$ ).

Уравнения (2.11) можно представить в виде динамической системы четвертого порядка:

$$\varepsilon X_i' = f_i, \quad i = 1, 2, \quad X_i' = f_i, \quad i = 3, 4, \quad (3.17)$$

где  $X_1 = v$ ,  $X_2 = \varepsilon v'$ ,  $X_3 = \lambda$ ,  $X_4 = \lambda'$ ,  $f_1 = X_2$ ,  $f_2 = -Q^{(v)}(X_3, X_1; H)$ ,  $f_3 = X_4$ ,  $f_4 = -Q^{(\lambda)}(X_3, X_1; H)$ .

Два первых уравнения (3.17) содержат малый параметр при производной и система является сингулярно возмущенной [39]. Приближенное решение такой системы может быть получено методом пограничных функций.

Функция, определяющая зависимость  $Q^{(v)}$  от  $v$  при фиксированных  $\lambda$  и  $H$ , имеет три корня. В этом случае может существовать решение, описывающее переход  $v$  с корня на корень, или решение с внутренним переходным слоем. Такое решение определяет статический автосолитон [37]. Статический автосолитон симметричен относительно точки  $z=0$ , при  $z \rightarrow \pm\infty$  стремится к однородному равновесному состоянию  $\lambda = \lambda_h$ ,  $v = v_h$ , а при



некотором значении  $z = z_0$  (точка перехода) быстрая переменная резко переходит с одного корня на другой корень.

Распределение параметров  $\nu$  и  $\lambda$  в статическом автосолидоне представлено на Рис.5.

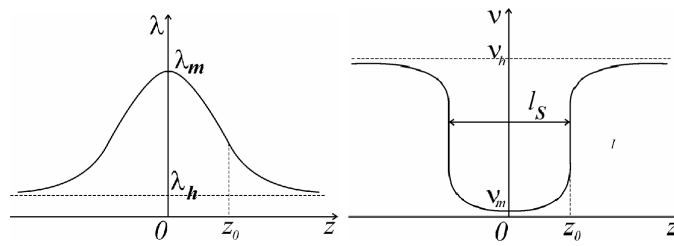


Рис.6. Форма статического автосолитона

Из симметрии автосолитона относительно точки  $z=0$  следует, что при построении его формы достаточно рассмотреть два участка:  $m=1$ :  $0 \leq z \leq z_0 = l_s/2$  и  $m=2$ :  $z_0 \leq z \leq \infty$  где  $l_s$  - безразмерная ширина автосолитона.

Граничные условия для неизвестных функций  $X_i(z)$  на каждом из участков имеют вид:

$$X_2^{(1)}(0) = 0, \quad X_4^{(1)}(0) = 0, \quad X_1^{(2)}(\infty) = \nu_h, \quad X_3^{(2)}(\infty) = \lambda_h, \quad (3.18)$$

$$X_i^{(1)}(z_0) = X_i^{(2)}(z_0), \quad i = \overline{1,4} \quad (3.19)$$

Первые два равенства – это условия симметрии. Последнее соотношение – условие непрерывности параметров  $\lambda, \nu$  и их производных.

Согласно теории сингулярных возмущений [39] решение задачи (3.17) - (3.19) ищется в виде суммы регулярной части и погранслошной части:

$$X_i^{(m)} = \tilde{X}_i^{(m)}(\zeta, \varepsilon) + \bar{X}_i^{(m)}(\xi, \varepsilon), \quad i = \overline{1,4}, \quad m = 1,2 \quad (3.20)$$

где  $\varsigma = z - z_0$ ,  $\xi = (z - z_0)/\varepsilon$  - растянутая переменная;  $\tilde{X}_i^{(m)}(\zeta, \varepsilon)$  - регулярная часть, она зависит от обычной переменной  $\varsigma$ ;  $\bar{X}_i^{(m)}(\xi, \varepsilon)$  - погранслошная часть, она зависит от растянутой переменной  $\xi$ . Погранслошные функции затухают с ростом растянутой переменной:

$$\bar{X}_i^{(1)}(-\infty) = \bar{X}_i^{(2)}(\infty) = 0, \quad i = \overline{1,4}. \quad (3.21)$$

Подставляя (3.20) в (3.17) - (3.19) и представляя правую часть в виде регулярной и погранслошной части, приходим к системе уравнений:

$$\varepsilon \frac{d\tilde{X}_1^{(m)}}{d\zeta} + \frac{d\bar{X}_1^{(m)}}{d\xi} = \tilde{X}_2^{(m)}(\zeta, \varepsilon) + \bar{X}_2^{(m)}(\xi, \varepsilon), \quad (3.22)$$

$$\varepsilon \frac{d\tilde{X}_2^{(m)}}{d\zeta} + \frac{d\bar{X}_2^{(m)}}{d\xi} = f_2\left(\tilde{X}_i^{(m)}(\zeta, \varepsilon)\right) + \bar{f}_2(\xi, \varepsilon), \quad (3.23)$$

$$\varepsilon \frac{d\tilde{X}_3^{(m)}}{d\zeta} + \frac{d\bar{X}_3^{(m)}}{d\xi} = \varepsilon \tilde{X}_4^{(m)}(\zeta, \varepsilon) + \varepsilon \bar{X}_4^{(m)}(\xi, \varepsilon), \quad (3.24)$$

$$\varepsilon \frac{d\tilde{X}_4^{(m)}}{d\zeta} + \frac{d\bar{X}_4^{(m)}}{d\xi} = \varepsilon f_4\left(\tilde{X}_i^{(m)}(\zeta, \varepsilon)\right) + \varepsilon \bar{f}_2(\xi, \varepsilon), \quad (3.25)$$

где

$$\bar{f}_i(\xi, \varepsilon) = f_i\left(\tilde{X}_i^{(m)}(\varepsilon\xi, \varepsilon) + \bar{X}_i^{(m)}(\xi, \varepsilon)\right) - f_i\left(\tilde{X}_i^{(m)}(\varepsilon\xi, \varepsilon)\right), \quad i = 2, 4,$$

и краевым условиям:

$$\tilde{X}_2^{(l)}(-z_0) = 0, \quad \tilde{X}_4^{(l)}(-z_0) = 0, \quad \tilde{X}_1^{(2)}(\infty) = v_h, \quad \tilde{X}_3^{(2)}(\infty) = \lambda_h, \quad (3.26)$$

$$\tilde{X}_i^{(l)}(0) + \bar{X}_i^{(l)}(0) = \tilde{X}_i^{(2)}(0) + \bar{X}_i^{(2)}(0), \quad i = \overline{1, 4}. \quad (3.27)$$

Асимптотическое разложение для регулярной и погранслошной части ищется в виде степенных рядов по малому параметру:

$$\tilde{X}_i^{(m)}(\zeta, \varepsilon) = \tilde{X}_{i,0}^{(m)}(\zeta) + \varepsilon \tilde{X}_{i,1}^{(m)}(\zeta) + \dots + \varepsilon^k \tilde{X}_{i,k}^{(m)}(\zeta) + \dots \quad (3.28)$$

$$\bar{X}_i^{(m)}(\xi, \varepsilon) = \bar{X}_{i,0}^{(m)}(\xi) + \varepsilon \bar{X}_{i,1}^{(m)}(\xi) + \dots + \varepsilon^k \bar{X}_{i,k}^{(m)}(\xi) + \dots \quad (3.29)$$

Эти разложения подставляются в уравнения (3.22)-(3.25) и краевые условия (3.26)-(3.27), а затем приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . При этом учитывается, что регулярная функция не может равняться погранслошной функции, поэтому отдельно приравниваются коэффициенты, зависящие от обычной переменной  $\zeta$ , и отдельно - коэффициенты, зависящие от растянутой переменной  $\xi$ .

Для первых членов разложений из дифференциальных уравнений получаем:

$$\tilde{X}_{2,0}^{(m)}(\zeta) = 0, \quad f_2\left(\tilde{X}_{i,0}^{(m)}(\zeta)\right) = 0, \quad (3.30)$$

$$\frac{d\bar{X}_{1,0}^{(m)}}{d\xi} = \bar{X}_{2,0}^{(m)}(\xi), \quad \frac{d\bar{X}_{2,0}^{(m)}}{d\xi} = \bar{f}_{2,0}, \quad (3.31)$$

$$\frac{d\bar{X}_{3,0}^{(m)}}{d\xi} = 0, \quad \frac{d\bar{X}_{4,0}^{(m)}}{d\xi} = 0, \quad (3.32)$$

$$\frac{d\tilde{X}_{3,0}^{(m)}}{d\xi} = \tilde{X}_{4,0}^{(m)}(\xi), \quad \frac{d\tilde{X}_{4,0}^{(m)}}{d\xi} = f_4\left(\tilde{X}_{i,0}^{(m)}(\xi)\right), \quad (3.33)$$

где

$$\bar{f}_{2,0} = f_2\left(\tilde{X}_{i,0}^{(m)}(0) + \bar{X}_{i,0}^{(m)}(\xi)\right) - f_2\left(\tilde{X}_{i,0}^{(m)}(0)\right).$$

Подстановка разложений в краевые условия дает:

$$\tilde{X}_{4,0}^{(1)}(-z_0) = 0, \quad (3.34)$$

$$\tilde{X}_{i,0}^{(2)}(\infty) = \nu_h, \quad \tilde{X}_{3,0}^{(2)}(\infty) = \lambda_h, \quad (3.35)$$

$$\bar{X}_{2,0}^{(1)}(0) = \bar{X}_{2,0}^{(2)}(0), \quad (3.36)$$

$$\tilde{X}_{i,0}^{(1)}(0) + \bar{X}_{i,0}^{(1)}(0) = \tilde{X}_{i,0}^{(2)}(0) + \bar{X}_{i,0}^{(2)}(0), \quad (3.37)$$

$$\tilde{X}_{i,0}^{(1)}(0) = \tilde{X}_{i,0}^{(2)}(0), \quad i = 3, 4. \quad (3.38)$$

Из (3.32) и (3.21) следует:

$$\bar{X}_{3,0}^{(m)}(\xi) = \text{const} = 0, \quad \bar{X}_{4,0}^{(m)}(\xi) = \text{const} = 0, \quad (3.39)$$

т.е. в асимптотическое приближение для медленной переменной  $\lambda$  входит только регулярная часть.

Выпишем уравнения и краевые условия, которым должна удовлетворять пограничная часть быстрой переменной  $\nu$ . Правая часть второго уравнения (3.31) зависит только от переменной  $\bar{X}_{i,0}^{(m)}(\xi)$ :

$$\bar{f}_{2,0} = -Q^{(\nu)}\left(\tilde{X}_{3,0}^{(m)}(0), \tilde{X}_{i,0}^{(m)}(0) + \bar{X}_{i,0}^{(m)}(\xi); H\right).$$

Следовательно (3.31) - динамическая система второго порядка относительно  $\bar{X}_{i,0}^{(m)}(\xi)$  и  $\bar{X}_{2,0}^{(m)}(\xi)$ . Кроме того сюда входят неизвестные пока константы  $\tilde{X}_{i,0}^{(m)}(0), \tilde{X}_{3,0}^{(m)}(0)$ . Эта система имеет три неподвижные точки  $(\nu_{si}, 0), i=1,2,3$ , причем  $\nu_{s1}, \nu_{s3}$  - седла, а  $\nu_{s2}$  - центр. Для выполнения уравнений (3.31) и условий (3.21), (3.36) и (3.37), необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство [39]:

$$\tilde{X}_{3,0}^{(m)}(0) = \lambda_s, \quad m = 1, 2, \quad (3.40)$$

где  $\lambda_s$  удовлетворяет соотношениям:

$$Q^{(v)}(\lambda_s, v_{s_i}; H) = 0, \quad i = \overline{1, 3}; \quad \int_{v_{s1}}^{v_{s3}} Q^{(v)}(\lambda_s, v; H) dv = 0. \quad (3.41)$$

В этом случае на фазовой плоскости системы (3.31) существует ячейка, ограниченная двумя гетероклиническими сепаратрисами седловых точек. Решение  $\bar{X}_{1,0}^{(m)}(\xi)$ ,  $\bar{X}_{2,0}^{(m)}(\xi)$  с точностью до постоянных  $\tilde{X}_{1,0}^{(m)}(0)$  дается одной из сепаратрис, в зависимости от условий на бесконечности. При этом

$$\tilde{X}_{1,0}^{(1)}(0) = v_{s1}, \quad \tilde{X}_{1,0}^{(2)}(0) = v_{s3}. \quad (3.42)$$

Анализ полученных соотношений показывает, что все фазовые траектории системы (3.16) близки к траекториям, состоящим из участков плавного и резкого изменения параметров. Резкие изменения определяются погранслошной частью решений, их испытывает только быстрая переменная вблизи точки перехода, при этом медленная переменная постоянна и равна  $\lambda_s$ . Плавные распределения  $\lambda(z)$  и  $\tilde{v}(z)$  задаются регулярной частью решений и описываются уравнениями

$$\lambda^{(m)''} + Q^{(\lambda)}(\lambda^{(m)}, \tilde{v}^{(m)}(\lambda); H) = 0, \quad Q^{(v)}(\lambda^{(m)}, \tilde{v}^{(m)}; H) = 0, \quad (3.43)$$

как следует из второго равенства (3.30) и соотношений (3.33), и граничными условиями:

$$\lambda^{(1)'}(0) = 0, \quad \lambda^{(2)}(\infty) = \lambda_h, \quad \lambda^{(1)}(z_0) = \lambda^{(2)}(z_0), \quad \lambda^{(1)'}(z_0) = \lambda^{(2)'}(z_0), \quad (3.44)$$

которые получаются из (3.34), второго равенства (3.35) и (3.38). Из второго уравнения (3.43) следует, что плавные изменения происходят вдоль кривой локальной связи.

В силу однозначности и обратимости функций  $\lambda(z)$ ,  $v(z)$ , в автосолитоне существует однозначная связь между параметрами  $\lambda$  и  $v$ :  $\lambda = \lambda(v)$  или  $v = v(\lambda)$ . Следовательно уравнения (3.16) можно представить в виде:

$$\lambda'' + Q^{(\lambda)}(\lambda, v(\lambda); H) = 0, \quad (3.45)$$

$$\varepsilon^2 v'' + Q^{(v)}(\lambda(v), v; H) = 0. \quad (3.46)$$

Для каждого из этих уравнений можно ввести потенциал:

$$Q^{(\lambda)}(\lambda, v(\lambda); H) = \frac{dU_\lambda}{d\lambda}, \quad Q^{(v)}(\lambda(v), v; H) = \frac{dU_v}{dv}. \quad (3.47)$$

Кривая локальной связи для магнитной жидкости имеет три участка (I, II, III) однозначной зависимости  $v(\lambda)$  (см. Рис.7), поэтому потенциал  $U_\lambda$  состоит из трех независимых ветвей:

$$U_\lambda^{I,II,III}(\lambda) = \int Q^{(\lambda)}(\lambda, v_{I,II,III}(\lambda); H) d\lambda. \quad (3.48)$$

Функция  $U_\lambda(\lambda)$  имеет экстремум в точке  $\lambda = \lambda_h$ , отвечающей однородному состоянию системы.

Взаимное расположение кривых локальной связи и уравнения состояния для намагничивающейся жидкости зависит от напряженности поля  $H$ , и в определенном диапазоне значений  $H$  может быть таким, как на Рис. 7. Используем в качестве  $\lambda_h, v_h$  координаты точки  $A$ , принадлежащей ветви III кривой локальной связи и средней ветви кривой уравнения состояния. Как показано в работе [14], эта точка соответствует асимптотически устойчивому однородному состоянию равновесия жидкости. Она является седловой неподвижной точкой динамической системы (3.17), а фазовое пространство системы (оно четырехмерно) содержит гомоклиническую сепаратрису, выходящую из этой седловой точки и входящую в ту же седловую точку. Проекция сепаратрисы на плоскость  $(v, \lambda)$  ABCDCBA показана жирной пунктирной линией. Эта сепаратриса определяет статический автосолитон. Участок сепаратрисы АВ, примыкающий к точке  $A$ , близок к кривой локальной связи, он соответствует плавным изменениям; на следующем участке ВС:  $\lambda = \lambda_s = const$  - это резкое изменение; затем снова – плавное изменение вдоль кривой локальной связи, а потом – те же три участка, но проходимые в обратном порядке.

В точке  $A$  выполняется неравенство  $d^2U_\lambda / d\lambda^2 < 0$ . Поэтому потенциал  $U_\lambda^{III}$  принимает при  $\lambda = \lambda_h$  максимальное значение, а потенциал  $U_\lambda^I$  вблизи этой точки экстремумов не имеет, т.к. на ветви I нет состояний равновесия в окрестности  $\lambda = \lambda_h$ . Графики функций  $U_\lambda^I(\lambda)$  и  $U_\lambda^{III}(\lambda)$  пересекаются, однако точке их пересечения отвечают разные значения  $v$ , т.к. на ветви I:  $v < v'$ , а на ветви III:  $v > v''$ . Статический автосолитон можно построить, сшивая плавные распределения, отвечающие ветвям I и III потенциала  $U_\lambda$ , с резким распределением в виде отрезка ВС. Для построения автосолитона ветви I и III потенциала необходимо расположить так, чтобы они пересекались в точке  $\lambda = \lambda_s$ , где плавные распределения переходят в резкое распределение, т.е. должно выполняться условие:

$$U_\lambda^I(\lambda_s) = U_\lambda^{III}(\lambda_s). \quad (3.49)$$

Этому условию можно удовлетворить, т.к. потенциал определяется с точностью до аддитивной постоянной. Точка  $(\lambda_h, 0)$  является седлом, а  $(\lambda_m, 0)$  - центром динамической системы (3.43), ее фазовый портрет содержит гомоклиническую сепаратрису, которая выходит из седла  $(\lambda_h, 0)$  и возвращается в это седло. Соответствующее ей решение описывает распределение параметра эффективного магнитного поля в автосолидоне и может быть представлено в виде:

$$\lambda(z) = \begin{cases} \lambda_I(z), & 0 \leq z \leq l_s/2 \\ \lambda_{III}(z), & l_s/2 \leq z \leq \infty \end{cases} \quad (3.50)$$

Значения  $\lambda_m, v_m$  находятся из условий:

$$U_\lambda^I(\lambda_m) = U_\lambda^{III}(\lambda_h) \quad (3.51)$$

$$Q^{(v)}(\lambda_m, v_m; H) = 0, \quad (3.52)$$

так как точка  $(\lambda_m, v_m)$  принадлежит кривой локальной связи.

Изменение параметра  $v$  задается выражением:

$$v(z) = u\left(\frac{z - l_s/2}{\varepsilon}\right) + \begin{cases} v_I(z) - v_{s1}, & 0 \leq z \leq l_s/2 \\ v_{III}(z) - v_{s3}, & l_s/2 \leq z \leq \infty. \end{cases} \quad (3.53)$$

Здесь функция  $u(z)$  соответствует сепаратресе ВС, а  $v_I(z), v_{III}(z), \lambda_I(z), \lambda_{III}(z)$  - плавные распределения, которые являются решениями задачи (3.43), (3.44).

Ширина автосолитона  $l_s = 2z_0$  определяется соотношением:

$$l_s = \sqrt{2} \int_{\lambda_s}^{\lambda_m} d\lambda \left[ \sqrt{\int_{\lambda}^{\lambda_m} Q^{(\lambda)}(\lambda, v_I(\lambda); H) d\lambda} \right]^{-1/2}. \quad (3.54)$$

Решение типа статического автосолитона существует только в том случае, когда отрезки  $[\lambda_s, \lambda_m]$  ветви I и  $[\lambda_h, \lambda_s]$  ветви III кривой локальной связи не содержат неподвижных точек системы (3.43). В противном случае седловая точка  $(\lambda_h, 0)$  не имеет гомоклинической сепаратрисы.

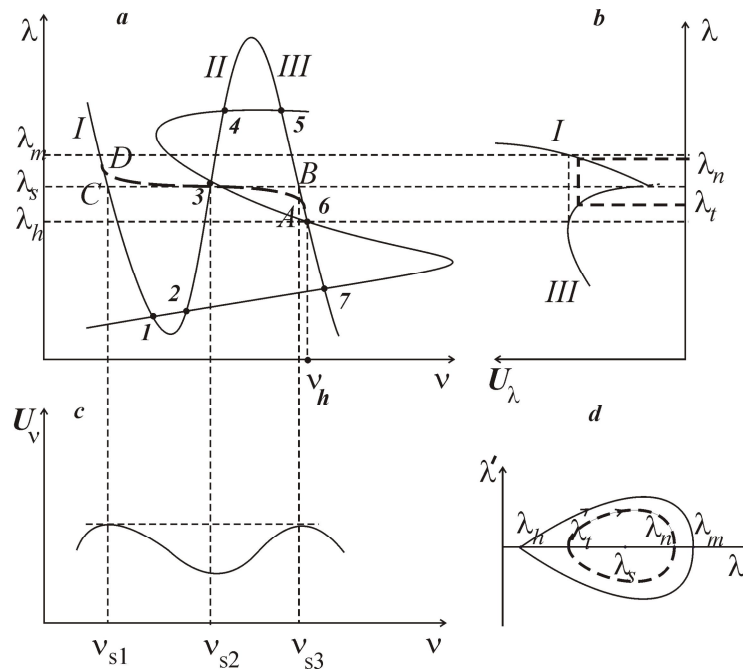


Рис.7. Кривые локальной связи и уравнения состояния (a), потенциалы (b,c) и фазовые траектории (d)

На Рис.8, 9 представлены результаты расчетов статических автосолитонов в намагничивающейся жидкости, полученные при разных значениях напряженности магнитного поля. На Рис.8(a) показано распределение среднего числа частиц в агрегатах  $\gamma = 1/\nu$  (кривая 1) и параметра эффективного магнитного поля  $\lambda$  (кривая 2); на Рис.8(b) – изменение намагничивания в слое жидкости при  $H = 48 \text{ э}$ . На Рис.9 показано распределение параметра эффективного магнитного поля и намагниченности при трех значениях  $H$ .

Расчеты проводились при значениях параметров жидкости, приведенных в подписи к Рис.2.

**Периодические структуры.** Статический автосолитон представляет собой решение системы (3.6), (3.7), удовлетворяющее условиям (3.8). Эта задача допускает также периодические решения в виде последовательности одинаковых страт.

Изменение параметра эффективного магнитного поля в автосолитоне описывается гомоклинической сепаратрисой. Замкнутые траектории, расположенные внутри сепаратрисы, определяют зависимость  $\lambda(z)$  в периодических стратах (на Рис.7(d) такая траектория показана пунктиром).

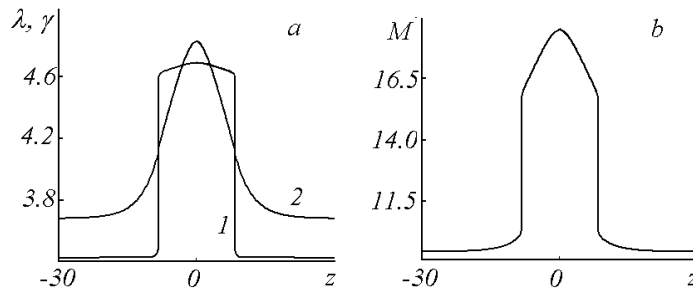


Рис.8. Статический автосолиiton в намагничивающейся жидкости при  $H = 48 \text{ э}$

Ширина страты задается выражением:

$$l_s = \sqrt{2} \int_{\lambda_s}^{\lambda_n} d\lambda \left[ \int_{\lambda}^{\lambda_n} Q^{(\lambda)}(\lambda, v(\lambda); H) d\lambda \right]^{-1/2}, \quad (3.55)$$

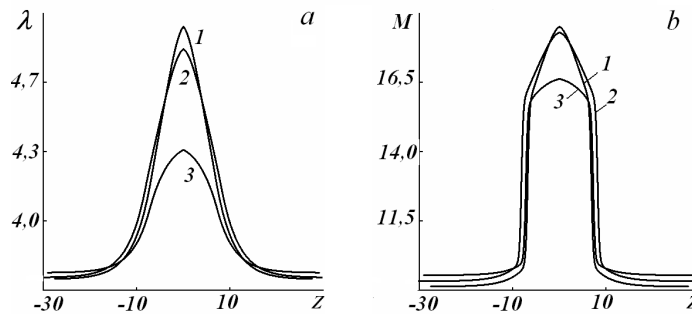


Рис.9. Статические автосолиитоны в намагничивающейся жидкости при  $H = 47 \text{ э}, 48 \text{ э}, 49 \text{ э}$  (кривые 1, 2, 3, соответственно).

а период –

$$l_p = l_s + \sqrt{2} \int_{\lambda_t}^{\lambda_s} d\lambda \left[ \int_{\lambda}^{\lambda_t} Q^{(\lambda)}(\lambda, v_{III}(\lambda); H) d\lambda \right]^{-1/2}. \quad (3.56)$$

Значения  $l_s$  и  $l_p$  зависят от величины  $\lambda_t$  и напряженности поля. При  $\lambda_t \rightarrow \lambda_n$  период неограниченно возрастает, а форма страты стремится к форме автосолитона. Если  $\lambda_t \rightarrow \lambda_s$ , то  $\lambda(z) \rightarrow \lambda_s = const$ ,  $v(0) \rightarrow v_{s1}$ ,  $v(L_p/2) \rightarrow v_{s3}$ , при этом ширина страты и период стремятся к нулю. На Рис.10 представлена зависимость  $l_p$  (a) и  $l_s$  (b) от величины  $\lambda_t$  при разных значениях  $H$ :  $H = 49 \text{ э}$  (1),  $50 \text{ э}$  (2),  $51 \text{ э}$  (3).



На Рис.11 показано изменение параметров  $\lambda$ ,  $\gamma = v^{-1}$  (a) и  $M$  (b) в периодических стратах при  $H = 50$  э и  $\lambda_t = 3.96$ ; в этом случае  $l_s \approx 1.25$ ,  $l_p \approx 4.5$ .

Полученные решения описывают образование в слое намагничивающейся жидкости одного подслоя или нескольких равноотстоящих подслоев, в которых концентрируются агрегаты из феррочастиц (слоистые структуры). Эти решения моделируют формирование стационарных структур в жидкости и в том случае, когда ось  $Ox$  параллельна слою. Они реализуются в виде ориентированных вдоль магнитного поля равноотстоящих полос более агрегированной среды (полосообразные структуры). Периодические страты наблюдаются экспериментально в пленках магнитной жидкости [1-4]. Сравнивая расчетные значения параметров периодических страт с экспериментом, можно найти оценки для параметров  $\tau_\lambda, \tau_v, D_\lambda, D_v$  модели среды с изменяющейся микроструктурой, использованной в настоящей работе:  $\tau_v \sim 10$  с,  $\tau_\lambda \sim 7200$  с,  $D_\lambda \approx 2$  мкм<sup>2</sup>,  $D_v \ll 1$  мкм<sup>2</sup> [19].

**Контрастные структуры (пиковые автосолитоны).** Рассмотрим диапазон значений напряженности магнитного поля, в котором кривая локальной связи имеет V-образную форму. В этом случае на ветвях 21, 23 кривой намагничивания жидкости (см. Рис.2) можно выделить интервалы значений  $H$ , для которых выполняются условия:

$$Q^{(\lambda)}(\lambda_h, v_h; H) = 0, \quad Q^{(v)}(\lambda_h, v_h; H) = 0, \quad Q^{(v)}(\lambda_h, v_n; H) = 0. \quad (2.52)$$

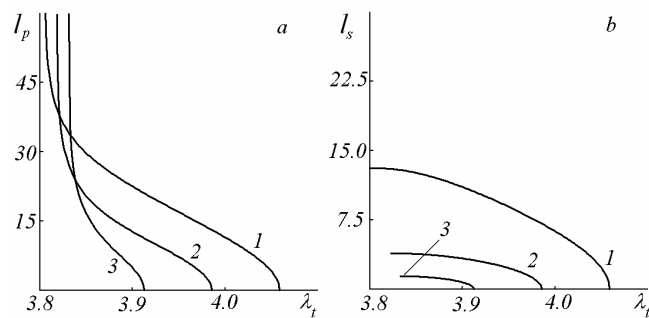


Рис.10. Зависимость ширины страты и периода от значения  $\lambda_t$

$$Q_v^{(v)}(\lambda_h, v_h; H) < 0, \quad Q_v^{(v)}(\lambda_h, v_n; H) > 0, \quad \int_{v_h}^{v_s} Q^{(v)}(\lambda_h, v; H) dv = 0 \quad (3.58)$$

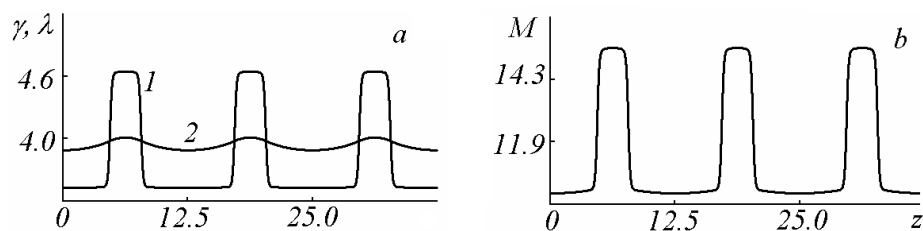


Рис.11. Периодические страты в магнитной жидкости

$$\int_{v_h}^{v_s} \frac{Q^{(\lambda)}(\lambda_h, v; H)}{\sqrt{Q^{(v)}(\lambda_h, v; H)}} dv \neq 0, \quad \Delta(\lambda_h, v_h; H) > 0. \quad (3.59)$$

Эти соотношения означают, что параметры  $\lambda_h, v_h$  определяют асимптотически устойчивое однородное равновесное состояние жидкости, функция  $Q^{(v)}(\lambda_h, v; H)$  при данном  $H$  имеет два корня  $v=v_h, v=v_n$  и существует такая точка  $v=v_s$ , что выполняется равенство (3.58). При выполнении условий (3.57)-(3.59) задача (3.6)-(3.8) имеет решение типа контрастной структуры или пикового автосолитона. Это решение имеет точку «всплеска» третьего типа [39]  $x_* = 0$  и характеризуется резким изменением среднего числа частиц в агрегатах в  $\sqrt{D_v}$  - окрестности точки  $x_*$ , но слабым изменением параметра эффективного магнитного поля ( $\lambda \approx \lambda_h$ ) во всем объеме жидкости.

Главный член асимптотики  $v$  по малому параметру  $\varepsilon$  имеет вид:

$$v(x) \sim v_h + Pv(\tau), \quad v(x) = v(-x), \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}, \quad (3.60)$$

где  $\tau = x/\varepsilon$ .

Функция  $Pv(\tau)$  определяется как решение задачи:

$$\frac{dPv}{d\tau} = \text{sign}(v_h - v_s) \Phi(|Pv|), \quad Pv(0) = v_s - v_h \quad (3.61)$$

и имеет обычную для пограничных функций экспоненциальную оценку:

$$|Pv(\tau)| \leq C \exp(-p\tau), \quad C > 0, \quad p > 0. \quad (3.62)$$

Здесь

$$\Phi(|x|) = \left[ -\frac{2}{D_\lambda} \int_0^x Q^{(v)}(\lambda_h, v_h + t; H) dt \right]^{1/2},$$

а коэффициент  $p$  удовлетворяет неравенству:

$$p \leq \left( -\frac{1}{D_\lambda} Q^{(v)}(\lambda_h, v_h; H) \right)^{1/2}.$$

Асимптотическое приближение для  $\lambda$  с точностью порядка  $\varepsilon$  имеет вид:

$$\lambda(x) = \lambda_h + \varepsilon \frac{\eta}{2\kappa sh(\kappa L/2)} \begin{cases} ch[\kappa(x+L/2)], & -L/2 \leq x < 0 \\ ch[\kappa(x-L/2)], & 0 \leq x \leq L/2 \end{cases},$$

где

$$\kappa = \sqrt{-\frac{\Delta(\lambda_h, \nu_h; H)}{D_\lambda Q_\nu^{(\nu)}(\lambda_h, \nu_h; H)}}, \eta = -\sqrt{\frac{2}{D_\lambda} \int_{\nu_h}^{\nu_s} Q^{(\lambda)}(\lambda_h, \nu_h; H) / \left[ \int_{\nu}^{\nu_h} Q^{(\nu)}(\lambda_h, \xi; H) d\xi \right]^{-1/2}} dv.$$

Функция  $Q^{(\lambda)}(\lambda_h, \nu; H)$  при  $\nu = \nu_h$  обращается в нуль, а на отрезке интегрирования отрицательна в случае  $\nu_s > \nu_h$ , но положительна в случае  $\nu_h > \nu_s$ , т.к.

$$Q_\nu^{(\lambda)} = -\frac{m_l \xi M}{kT\nu/L' - m_l M_s \lambda} < 0.$$

Неравенство следует из условия парамагнитности среды. Поэтому в обоих случаях  $\eta > 0$ . Отклонение значения  $\lambda$  в точке  $x = x_* = 0$  от значения  $\lambda$  в точке  $x = L/2$  - малая положительная величина:

$$\lambda(0) - \lambda(L/2) \sim \varepsilon \frac{\eta th(\kappa L/4)}{2\kappa}.$$

Распределение в слое жидкости параметров  $\lambda = \lambda(x)$ ,  $\gamma \equiv \nu^{-1}(x)$  и намагниченности  $M$  представлены на Рис.12 (точка  $(\lambda_h, \nu_h)$  принадлежит ветви 21 кривой намагничивания).

Условия (3.57)-(3.59) выполняются для точек ветви 23 в интервале  $12.1\varepsilon \leq H \leq 17.2\varepsilon$  и для точек ветви 21 при  $32.1\varepsilon \leq H \leq 51.2\varepsilon$ . В первом случае величина «всплеска»  $S$  отрицательна, наименьшее число частиц в агрегатах достигается при  $H = 17.2\varepsilon$  и равно  $\sim 4$ . Во втором случае  $S$  положительно, а наибольшее число частиц  $\sim 6$  достигается при  $H = 32.1\varepsilon$ .

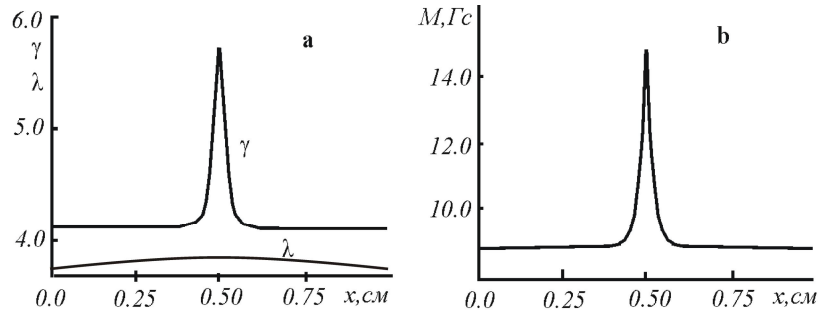


Рис.12. Решение типа контрастной структуры (а) и соответствующее распределение намагниченности (b) в слое жидкости при  $H = 32.1\varepsilon$

$$(D_\lambda = 10^4 \text{ см}^2, \varepsilon = 0.1, \lambda_h = 3.74, \nu_h = 0.24, \nu_s = 0.17)$$

Функции  $\lambda(x), \nu(x)$  являются четными относительно точки  $x_* = 0$ , возможно их продолжение по оси  $Ox$  и построение решения с несколькими точками «всплеска», расположенными равномерно на отрезке  $[-L/2, L/2]$ . Такие функции определяют слоистые структуры в намагничивающейся жидкости.

Если ось  $Ox$  параллельна слою, полученные решения описывают направленные вдоль поля игольчатые конфигурации из феррочастиц (полосообразные структуры), они наблюдаются экспериментально в пленках [1,3-5] и в объемах намагничивающейся жидкости [34].

### 3.3. Радиально-симметричные структуры

Предположим, что слой жидкости имеет форму кругового цилиндра радиуса  $R$ , а магнитное поле ортогонально слою. Рассмотрим осесимметричные стационарные решения системы (3.1). Они удовлетворяют уравнениям:

$$D_\lambda \left( \frac{d^2 \lambda}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} \right) + Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu; H) = 0, \quad (3.63)$$

$$D_\nu \left( \frac{d^2 \nu}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} \right) + Q^{(\nu)}(\lambda, \nu; H) = 0, \quad (3.64)$$

и краевым условиям:

$$\frac{d\lambda}{dr}(0) = 0, \quad \frac{d\lambda}{dr}(R) = 0, \quad (3.65)$$

$$\frac{d\nu}{dr}(0) = 0, \quad \frac{d\nu}{dr}(R) = 0. \quad (3.66)$$

Первые равенства в (3.65), (3.66) – условия осевой симметрии, а вторые - отвечают отсутствию потоков  $\nu, \lambda$  на границе объема жидкости. Задача (3.63)-(3.66) имеет решения типа горячих (холодных) пятен [37].

**Системы малого размера.** Пусть  $\sqrt{D_\nu} \ll R \ll \sqrt{D_\lambda}$ . В приближении системы малого размера принимается  $\lambda = \lambda_c = const$ , и соотношения (3.63)-(3.64) приводятся к виду

$$D_\nu \left( \frac{d^2 \nu}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} \right) + Q^{(\nu)}(\lambda_c, \nu(r); H) = 0, \quad (3.67)$$

$$\int_0^R Q^{(\lambda)}(\lambda_c, \nu(r); H) r dr = 0. \quad (3.68)$$

Уравнение (3.68) получается в результате осреднения первого соотношения (3.1) по объему жидкости.

Уравнение (3.67) отличается от уравнения, определяющего широкую страту в прямоугольной декартовой системе координат, членом  $D_v dv / dr / r$ . Поскольку производная  $dv / dr \approx 0$  всюду, кроме малой переходной области, в которой  $r \approx r_0$  [37], его можно аппроксимировать выражением:

$$\frac{D_v}{r} \frac{dv}{dr} \approx \frac{D_v}{r_0} \frac{dv}{dr},$$

где  $r_0$  - радиус пятна. Поэтому уравнение (3.67) можно переписать в виде:

$$D_v v'' + \frac{D_v}{r_0} v' + Q^{(v)}(\lambda_c, v; H) = 0. \quad (3.69)$$

Здесь штрихом обозначена производная по переменной  $r$ .

При  $r_0 \gg \sqrt{D_v}$  вторым членом в (3.69) можно пренебречь. В этом случае при значении  $\lambda_c = \lambda_s$ , удовлетворяющем условию:

$$\int_{v(0)}^{v(R)} Q^{(v)}(\lambda_c, v; H) dv = 0,$$

функция  $v(r)$  на интервале  $[0, R]$  совпадает с функцией  $v(x)$ , определяющей широкую страту на полуинтервале  $[0, L/2]$ .

Уравнение для размера пятна получается из условия (3.68), если заменить форму  $v(r)$  ступенькой. Из этого уравнения следует, что горячие (холодные) пятна существуют в том же диапазоне значений напряженности магнитного поля, что и горячие (холодные) страты. Радиус пятна связан с размером широкой страты соотношением:

$$\frac{r_0}{R} = \sqrt{\frac{L_s}{L}}. \quad (3.70)$$

**Системы большого размера.** Пусть  $\sqrt{D_v} \ll \sqrt{D_\lambda} \ll R$  (система большого размера). Если ввести безразмерную переменную  $\rho = r / \sqrt{D_\lambda}$ , уравнения (3.63), (3.64) принимают вид:

$$\lambda'' + \frac{1}{\rho} \lambda' + Q^{(\lambda)}(\lambda, v; H) = 0 \quad (3.71)$$

$$\varepsilon^2 \left( v'' + \frac{1}{\rho} v' \right) + Q^{(v)}(\lambda, v; H) = 0, \quad (3.72)$$

где штрихом обозначена производная по  $\rho$ .

В случае И-системы уравнения (3.71)-(3.72) имеют решения типа радиально-симметричных автосолитонов [37].

Наличие малого параметра при старшей производной в уравнении (3.72) позволяет применить для исследования системы (3.71)-(3.72) теорию сингулярных возмущений [39]. Аналогично предыдущему можно показать, что все фазовые траектории соответствующей динамической системы близки к траекториям, состоящим из участков плавного и резкого распределения параметров.

Изменение среднего числа частиц в агрегатах и параметра эффективного магнитного поля в радиально-симметричном автосолитоне представляется в виде:

$$v(\rho) = u \left( \frac{\rho - \rho_0}{\varepsilon} \right) + \begin{cases} v_I(\rho) - v_{sI}, & 0 \leq \rho \leq \rho_0 \\ v_{III}(\rho) - v_{s3}, & \rho_0 \leq \rho \leq \infty \end{cases} \quad (3.73)$$

$$\lambda(\rho) = \begin{cases} \lambda_I(\rho), & 0 \leq \rho \leq \rho_0 \\ \lambda_{III}(\rho), & \rho_0 \leq \rho \leq \infty \end{cases}$$

где  $\rho_0$  – безразмерный радиус пятна.

В (3.73) функция  $u$  описывает резкое распределение, соответствующее сепаратрице  $BC$  (см. Рис.7(а)), связывающей седловые точки  $(\lambda_s, v_{sI})$  и  $(\lambda_s, v_{s3})$ ;  $\lambda_{I,III}(\rho)$ ,  $v_{I,III}(\rho)$  – плавные распределения, которые отвечают ветвям I, III однозначной зависимости среднего числа частиц в агрегатах от параметра эффективного магнитного поля на кривой локальной связи. Они являются решениями уравнений

$$\lambda'' + \frac{1}{\rho} \lambda' + Q^{(\lambda)}(\lambda, \tilde{v}(\lambda); H) = 0, \quad Q^{(v)}(\lambda, \tilde{v}; H) = 0, \quad (3.74)$$

удовлетворяющими краевым условиям:

$$\begin{aligned} \lambda_{III}(\infty) &= \lambda_h, & \lambda_I(\rho_0) &= \lambda_{III}(\rho_0) = \lambda_s, \\ \frac{d\lambda_I}{d\rho}(\rho_0) &= \frac{d\lambda_{III}}{d\rho}(\rho_0), & \frac{d\lambda_I}{d\rho}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Значения  $\lambda(0) = \lambda_m$ ,  $v(0) = v_m$  определяются соотношениями (3.51), (3.52).

Радиус пятна задается выражением:

$$\rho_0 = \sqrt{2} \int_{\lambda_s}^{\lambda_m} d\lambda \left[ \sqrt{\int_{\lambda}^{\lambda_m} Q^{(\lambda)}(\lambda, v_I(\lambda); H) d\lambda} \right]^{-1}.$$

Радиально-симметричные автосолитоны моделируют образование в слое намагничиваемой жидкости параллельные магнитному полю столбики, в которых концентрируются агрегаты из феррочастиц. Формирование из таких столбиков гексагональных и лабиринтных структур наблюдается экспериментально при включении магнитного поля, ортогонального слою жидкости [1].

### Заключение

Получены условия термодинамической устойчивости многокомпонентных намагничивающихся сред. В случае однокомпонентной среды установлена их эквивалентность условиям устойчивости однородных стационарных решений уравнений квазистационарной феррогидродинамики по А.М.Ляпунову. Подробно проанализировано приближение среднего поля в гидродинамике намагничивающихся сред и его связь с классическими теориями намагничивания. Предложены равновесные термодинамические модели структурирования магнитных жидкостей и сформулирована замкнутая краевая задача процессов структурирования в рамках феноменологической теории Л.Д.Ландау фазовых переходов. Исследованы одномерные пространственные структуры из феррочастиц, возникающие в неподвижном объеме магнитной жидкости под действием постоянного однородного магнитного поля. Уравнения, описывающие изменение магнитного состояния жидкости, определяют, в зависимости от величины поля, KV- или КИ - систему, в которой среднее число частиц в агрегатах является быстрой переменной, а параметр эффективного магнитного поля – медленной переменной. Методами теории автосолитонов найдены стационарные решения этих уравнений типа статических автосолитонов и периодических страт. Полученные решения реализуются в виде параллельных слоев (слоистые структуры) или полос (полообразные структуры), в которых концентрируются агрегаты из феррочастиц. Полосовые структуры наблюдаются экспериментально в пленках магнитной жидкости. Сравнение расчетных значений геометрических характеристик периодических страт с экспериментом позволяет найти оценки для параметров использованной в работе модели среды с изменяющейся микроструктурой.

### Литература

1. Пул Ч., Оуэнс Ф. Нанотехнологии. — Москва: Техносфера, 2006. — 334.с.
2. Hong C.Y., Jang I.J., Horng H.E., Hsu C.J., Yao Y.D., Yang H.C. Ordered structures in  $Fe_3O_4$  kerosine-based ferrofluids // J.Appl.Phys. — 1997. — **81**, N 8. — P. 4275-4277.

3. Yang S.-Y., Horng H.-E., Hong C.-Y. Structures, Optical Properties and Potentially Electro-Optical Applications of Magnetic Fluid Films // *Tamkang Journal of Science and Engineering*. — 2002. — **5**, N 2. — P.85-93.
4. Li J., Lin X.-D., Lin Y.-Q., Huang Y., Bai L. Relaxation behavior measuring of transmitted light through ferrofluids films // *Applied Physics. B*. — 2006. — **82**, N 1. - P. 81-84.
5. Chen J., Chen X., Pu S. Realization of optical limiting with a magnetic fluid film // *Optics Communications*. — 2007. — **276**, N 2. — P. 268-271.
6. Зубарев А.Ю., Исакова Л.Ю. К теории фазовых переходов в магнитных жидкостях // *ЖЭТФ*. — 2007. — **132**, вып. 5(11). — С.1160-1172.
7. Fang W.-X., He Z.-H., Chen D.-H. A Diffusion Model of Field-Induced Aggregation in Ferrofluid Film // *CHIN.PHYS.LETT.* — 2008. — **25**. — N9.
8. Klokkenburg M., Ern B.H. Magnetization behavior of ferrofluids with cryogenically imaged dipolar chains // *J.Phys.: Condens.Matter*. — 2008. — 20.
9. O. Ciftja. Lamellar-like structures in ferrofluids placed in strong magnetic fields // *Solid State Communications*. — 2009. — **149**, N 13-14. — P. 532-536.
10. Trasca R.A., Klapp S.H.L. Structure formation in layered ferrofluid nanofilms // *Journal of Chemical Physics*. — 2008. — **129**, N8.
11. Пацегон Н.Ф. Некоторые процессы самоорганизации в намагничивающихся средах // *Магнитная гидродинамика*. — 1993. — № 1. — С. 13-23.
12. Тарапов И.Е. К гидродинамике поляризующихся и намагничивающихся сред // *Магнитная гидродинамика*. — 1972. — №1. — С.3-11.
13. Пацегон Н.Ф., Попова Л.Н. О равновесной намагниченности магнитной жидкости // *Магнитная гидродинамика*. — 1996. — **32**, № 3. — С.323-330.
14. Patsegon N.F., Popova L.N. Wave structures in magnetic fluids // *Int. Journal of Fluid Mechanics Research*. — 2003. — **30**, № 3. — P.323-336.
15. Пацегон Н.Ф., Попова Л.Н., Свириденко С.А. Качественное исследование процессов структурирования магнитной жидкости // *Вісник Харк. ун-ту. Математика, прикладна математика і механіка*. — 2003. — вип. 52, № 582. — С.81-89.
16. Пацегон Н.Ф., Попова Л.Н. Образование и устойчивость пространственных структур в магнитной жидкости // *Прикладная гидромеханика*. — 2003. — **5(77)**, № 1. — С.62-70.
17. Пацегон Н.Ф., Попова Л.Н. Статические автосолитоны в магнитной жидкости // *Вісник Харк. ун-ту. Математика, прикладна математика і механіка*. — 2004. — вип. 4, № 645. — С. 93-101.
18. Пацегон Н.Ф., Попова Л.Н. Автоволновые процессы в магнитной жидкости // *Прикладная гидромеханика*. — 2006. — **9**, № 1. — С.54-65.



19. Пацегон Н.Ф., Попова Л.Н. Стационарные структуры в магнитной жидкости // Вісник Харк. національного ун-ту. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління.— 2008. — вип. 10, № 833. — С.206-221.
20. Пацегон Н.Ф., Попова Л.Н. Пространственные структуры в намагничивающихся жидкостях // Математические методы и физико-механические поля. — 2010. — 3. — С.159-169.
21. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. — 2-е изд. — М.: Наука, 1982. — 620с.
22. Гленсдорф Г., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций: Пер. с англ. — М.: Мир, 1973. — 280с.
23. Neuringer J.L., Rosensweig R.E. Ferrohydrodynamics // Phys. Fluids. — 1964. — vol.7, N12. — p 1927-1937.
24. Пригожин И., Дефэй Р. Химическая термодинамика: Пер. с англ. — Новосибирск, 1966. — 509с.
25. Пацегон Н.Ф. Термодинамическая устойчивость намагничивающихся сред // Магнитная гидродинамика. — 1989. — N4. — с. 13-21
26. Тарапов И.Е. Звуковые волны в намагничивающейся среде // Журнал прикладной механики и техн. физики. — 1973. — N1. — с.15-22.
27. Пацегон Н.Ф. Общие свойства волновых движений непроводящих намагничивающихся сред // Магнитная гидродинамика. — 1990. — N3. — с. 15-20
28. Пацегон Н.Ф. Термодинамические модели структурирования намагничивающихся сред. I. // Магнитная гидродинамика. — 1991. — N3. — с. 10-16.
29. Пацегон Н.Ф. Термодинамические модели структурирования намагничивающихся сред. II. // Магнитная гидродинамика. — 1991. — N4. — с. 40-44.
30. Мандельштам Л.И., Леонтович М.А. К теории поглощения звука в жидкостях // ЖЭТФ. — 1937. — N 7. — С. 438–444.
31. Диканский Ю.И. Экспериментальное исследование эффективных магнитных полей в магнитной жидкости // Магнитная гидродинамика. — 1982. — N2. — с. 33-36.
32. Чеканов В.В., Дроздова В.И., Нуцубидзе П.В., Скроботова Т.В., Черемушкина А.В. Изменение намагниченности магнитной жидкости при образовании агрегатов // Магнитная гидродинамика. — 1984. — N1. — с. 3-9.
33. Смирнов В.И., Федоненко А.И. Исследование эффективного поля в магнитных жидкостях // Магнитная гидродинамика. — 1986. — N1. — с. 57-60.
34. Hayes C.F. Observation of association in a ferromagnetic colloid // J. Colloid Interface. Sci. — 1975. — vol. 52, N2. — p 239-243.
35. Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. — М.:

Наука, 1997. – 552с.

36. Ландау Л.Д. Собрание трудов: В 2 т. – М.: Наука, 1969. Т. 1. – 512с.

37. Kerner B.S., Osipov V.V. Autosolitons: A new Approach to Problem of Self-Organization and Turbulence. – Kluwer Academic Publishers, 1994. – 675 p.

38. Ivanov A.O. Aggregates in magnetic fluids: droplets, chains and fractal clusters // Eight Int. Conf. on Magnetic Fluids. June 29 - July 3, 1998. Timisoara, Romania. Abstracts. — Timisoara, 1998. – P.262-263.

39. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – Москва: Высшая школа, 1990. - 208 с.

Статья опубликована в кн: Ученый, Учитель, Человек. К 85 – летию со дня рождения И.Е.Тарапова. – Харьков: Новое слово, 2011, С. 241-284.