О ВЕЛИЧИНАХ ДЕФЕКТОВ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ

В. П. Петренко *

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $f(z)$ — мероморфная в открытой плоскости функция;

$$T(r, f),\ m(r, a), n(r, a),\ N(r, a),\ \delta(a, f) —$$

введенные Р. Неванлинна величины, характеризующие распределение значений этой функции,

$$n(r) = n(r, 0) + n(r, \infty), \quad N(r) = N(r, 0) + N(r, \infty).$$

Условимся обозначать буквой K с индексами — абсолютные постоянные, буквой C с индексами — величины, зависящие только от рассматриваемой функции.

Как известно [1], величины дефектов удовлетворяют соотношению

$$\sum_{(a)} \delta(a) \leqslant 2$$

(сумма распространена на все значения a с $\delta(a) > 0$). Положим

$$S(f) = \sum_{(a)} \sqrt{\delta(a)},$$

$$\sigma(\lambda) = \sup_{(f)} S(f),$$

где sup берется по всем мероморфным функциям нижнего порядка λ.

В. Фукс [2] доказал, что при $\lambda < \infty$ величина $\sigma(\lambda)$ конечна и справедлива оценка

$$\sigma(\lambda) \leqslant K_1 (1 + \sqrt{\lambda |\ln \lambda|}). \tag{1.1}$$

Основным результатом этой статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Справедливо неравенство*

$$\sigma(\lambda) \leqslant K_2 \sqrt{\lambda},\ \ 0{,}5 \leqslant \lambda < \infty. \tag{1.2}$$

Для целой функции ([1], стр. 240)

$$h_p(z) = \int_0^z e^{-t^p} dt \quad p = 1, 2, 3, \ldots$$

справедливо $\lambda = p$,

$$S(h_p) = 1 + \sqrt{p} = 1 + \sqrt{\lambda}.$$

Поэтому оценка (1.2) точна при больших λ в смысле порядка.

Теорему 1 мы получаем как следствие двух теорем: теоремы 2, принадлежащей В. Фуксу [2], и установленной нами теоремы 3.

---

* Выражаю глубокую признательность И. В. Островскому за руководство работой.

Теорема 2. ([2]). *Если $f(z)$ — мероморфная функция конечного нижнего порядка λ, обладает по меньшей мере двумя дефектными значениями, то справедливо соотношение*

$$\sum_{(a)} \sqrt{\delta(a)} \leqslant \left\{2\pi \varliminf_{r\to\infty} [T(r, f)]^{-1} r\, \mathfrak{M}\left(r, \frac{f''}{f'}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{1.3}$$

где

$$\mathfrak{M}(r, g) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|\, d\theta.$$

Теорема 3. *Если $f(z)$ — мероморфная функция нижнего порядка λ $(\lambda \geqslant 0{,}5)$, то*

$$\varliminf_{r\to\infty} [T(r, f)]^{-1} r\mathfrak{M}\left(r, \frac{f''}{f'}\right) \leqslant K_3\lambda. \tag{1.4}$$

§ 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Лемма 1. *Пусть $f(z)$ — функция мероморфная в $z \neq \infty$, а $G_{\alpha, R} = \{z : 0 < |z| < R,\ |\arg z| < \alpha\}$ $(0 < \alpha < \pi)$. Тогда при $z \in G_{\alpha, R}$ справедливо соотношение*

$$\begin{aligned}\ln f(ze^{i\vartheta}) = {} & \frac{-1}{2\alpha}\int\limits_0^R \ln|f(te^{i(\vartheta+\alpha)})|\, t^{x-1}\left\{\frac{1}{it^x - z^x} + \frac{R^{2x}}{z^x t^{2x} - iR^{2x}t^x}\right\} dt + \\ & + \frac{1}{2\alpha}\int\limits_0^R \ln|f(te^{i(\vartheta-\alpha)})|\, t^{x-1}\left\{\frac{1}{it^x + z^x} - \frac{R^{2x}}{z^x t^{2x} + iR^{2x}t^x}\right\} dt + \\ & + \frac{1}{4\alpha}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \ln|f(Re^{i(\vartheta+\theta)})|\left\{\frac{(Re^{i\theta})^x + z^x}{(Re^{i\theta})^x - z^x} - \frac{R^{2x} - z^x(Re^{i\theta})^x}{R^{2x} + z^x(Re^{i\theta})^x}\right\} d\theta + \\ & + \sum_{c_k^x \in G_{\alpha, R}} \Delta_k \ln \frac{z^x + \bar{c}_k^x}{z^x - c_k^x} + \sum_{c_k^x \in G_{\alpha, R}} \Delta_k \ln \frac{R^{2x} - z^x \bar{c}_k^x}{R^{2x} + z^x c_k^x} + C_1,\end{aligned} \tag{2.1}$$

где ϑ — любое действительное число, $x = \pi(2\alpha)^{-1}$, $c_k^x = c_k^x(\vartheta)$ — нули и полюсы мероморфной функции $f(ze^{i\vartheta})$, $\Delta_k = 1$, если c_k — полюс и $\Delta_k = -1$, если c_k — нуль, C_1 — постоянная относительно z.

Соотношение (2.1) получается прибавлением мнимых частей к известной формуле Пуассона — Иенсена для области $G_{\alpha, R}$. ((2.1) является аналогом известной формулы Шварца для круга, см. [1] стр. 165).

Лемма 2. *Пусть $f(z)$ — мероморфная в $z \neq \infty$ функция. При $0 < r_0 < r < 0{,}5R$ и любом действительном ϑ справедливо неравенство*

$$\begin{aligned}\frac{r}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \left|\frac{f'(re^{i(\vartheta+\varphi)})}{f(re^{i(\vartheta+\varphi)})}\right| d\varphi \leqslant {} & \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^R \{|\ln|f(te^{i(\vartheta+\alpha)})|| + |\ln|f(te^{i(\vartheta-\alpha)})||\} P(t, r, \alpha)\, dt + \\ & + \frac{K_4}{\alpha}\left(\frac{r}{R^2}\right)^x \int\limits_0^R \{|\ln|f(te^{i(\vartheta+\alpha)})|| + |\ln|f(te^{i(\vartheta-\alpha)})||\}\, t^{x-1}\, dt +\end{aligned}$$

$$+\frac{K_5}{\alpha}\left(\frac{r}{R}\right)^{x}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}|\ln|f(Re^{i(\theta+\vartheta)})||\,d\theta+2\sum_{c_m\in G_{\alpha,R}}\left(\frac{r}{|c_m|}\right)^{x}\Phi\left[\left(\frac{r}{|c_m|}\right)^{x}+\right.$$

$$+K_6\left(\frac{r}{R^2}\right)^{x}\sum_{c_m\in G_{\alpha,R}}|c_m|^{x}, \tag{2.2}$$

где

$$P(t,r,\alpha)=t^{x-1}r^{x}(t^{2x}+r^{2x})^{-1},$$

$$\Phi(u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|ue^{i\theta}-1|},$$

$=c_m(\vartheta)$ — нули и полюсы $f(ze^{i\vartheta})$.

Доказательство. Продифференцировав соотношение (2.1) по $z=re^{i\varphi}$), получаем неравенство

$$\left|\frac{f'(re^{i(\vartheta+\varphi)})}{f(re^{i(\vartheta+\varphi)})}\right|\leqslant\frac{\pi}{4\alpha^2}\int\limits_0^R|\ln(f(te^{i(\vartheta+\alpha)})||\,t^{x-1}\left\{\frac{r^x}{|it^x-z^x|^2}+\frac{r^xR^{2x}}{|z^xt^x-iR^{2x}|^2}\right\}dt+$$

$$+\frac{\pi}{4\alpha^2}\int\limits_0^R|\ln|f(te^{i(\vartheta-\alpha)})||\,t^{x-1}\left\{\frac{r^x}{|it^x+z^x|^2}+\frac{r^xR^{2x}}{|z^xt^x+iR^{2x}|^2}\right\}dt+$$

$$+\frac{\pi}{4\alpha^2}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}|\ln|f(Re^{i(\theta+\vartheta)})||\left\{\frac{r^xR^x}{|(Re^{i\theta})^x-z^x|^2}+\frac{R^xr^x}{|R^x+(ze^{i\theta})^x|^2}\right\}d\theta+$$

$$+\frac{\pi}{2\alpha}r^x\sum_{c_m\in G_{\alpha,R}}\left\{\frac{1}{|z^x+\bar c_m^x|}+\frac{1}{|z^x-c_m^x|}\right\}+$$

$$+\frac{\pi}{2\alpha}r^x\sum_{c_m\in G_{\alpha,R}}|c_m|^x\left\{\frac{1}{|R^{2x}-z^x\bar c_m^x|}+\frac{1}{|R^{2x}+z^xc_m^x|}\right\}. \tag{2.3}$$

При $z\in G_{\frac{\alpha}{2},\frac{R}{2}}$ нетрудно убедиться в справедливости следующих неравенств:

$$|\pm it^x+z^x|\geqslant\max\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}t^x,\ \frac{\sqrt{2}}{2}r^x\right\}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{4}(t^x+r^x)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{t^{2x}+r^{2x}} \tag{2.4}$$

$$|\pm iR^{2x}+z^xt^x|\geqslant R^{2x}\left(1-\frac{1}{2^x}\right)\geqslant K_7R^{2x}\quad(0\leqslant t<R). \tag{2.5}$$

Замечая также, что ($c_m=|c_m|e^{i\alpha_m}$),

$$\int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\frac{d\varphi}{|r^xe^{ix\varphi}-c_m^x|}=\frac{1}{|c_m|^x}\int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\frac{d\varphi}{\left|\left(\frac{r}{|c_m|}\right)^xe^{ix(\varphi-\alpha_m)}-1\right|}=$$

$$=\frac{2\alpha}{\pi|c_m|^x}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\frac{\alpha_m}{\alpha}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\frac{\alpha_m}{\alpha}}\frac{d\theta}{\left|\left(\frac{r}{|c_m|}\right)^xe^{i\theta}-1\right|}\leqslant\frac{2\alpha}{\pi|c_m|^x}\Phi\left[\left(\frac{r}{|c_m|}\right)^x\right], \tag{2.6}$$

Интегрируя неравенства (2.3) по φ в пределах от $-\frac{\alpha}{2}$ до $\frac{\alpha}{2}$ и учитывая (2.4), (2.5) и (2.6), получаем (2.2).

Лемма 3. *Если $f(z)$ — мероморфная функция в $z \neq \infty$, тогда при $0 < r_0 < r < 0{,}5R$, $0 < \alpha < \pi$, справедлива оценка*

$$r\mathfrak{M}\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leqslant 6\pi\alpha^{-2}\int_0^R \{m(t, 0) + m(t, \infty)\} P(t, r, \alpha)\, dt +$$

$$+ K_8\alpha^{-1}\left(\frac{r}{R}\right)^x T(R, f) + 6\sum_{|c_m|<R}\left(\frac{r}{|c_m|}\right)^x \Phi\left[\left(\frac{r}{|c_m|}\right)^x\right] + K_9\left(\frac{r}{R}\right)^x n(R). \quad (2.7)$$

Доказательство. Пусть $\vartheta_k = \beta + k\alpha$, где $0 \leqslant \beta < 2\pi$, а k принимает значения $0, 1, 2 \ldots q = [4x]$. Положив в неравенстве (2.2) $\vartheta = \vartheta_k (k = 0, 1, 2 \ldots q)$, получим $q+1$ неравенство. Складывая эти неравенства по k от 0 до q, будем иметь:

$$\frac{r}{2\pi}\sum_{k=0}^{q}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\left|\frac{f'(re^{i(\beta+k\alpha+\varphi)})}{f(re^{i(\beta+k\alpha+\varphi)})}\right| d\varphi \leqslant \alpha^{-1}\sum_{k=0}^{q}\int_0^R \{|\ln|f(te^{i(\beta+(k+1)\alpha)})|| +$$

$$+ |\ln|f(te^{i(\beta+(k-1)\alpha)})||\} P(t, r, \alpha)\, dt + K_4\alpha^{-1}\left(\frac{r}{R^2}\right)^x \sum_{k=0}^{q}\int_0^R \{|\ln|f(te^{i(\beta+(k+1)\alpha)})|| +$$

$$+ |\ln|f(te^{i(\beta+(k-1)\alpha)})||\} t^{x-1}\, dt + K_5\alpha^{-1}\left(\frac{r}{R}\right)^x \sum_{k=0}^{q}\int_{-\alpha}^{\alpha} |\ln|f(Re^{i(\theta+\beta+k\alpha)})||\, d\theta +$$

$$+ 2\sum_{k=0}^{q}\sum_{c_m(\vartheta_k)\in G_{\alpha, R}}\left(\frac{r}{|c_m|}\right)^x \Phi\left[\left(\frac{r}{|c_m|}\right)^x\right] + K_6\left(\frac{r}{R^2}\right)^x \sum_{k=0}^{q}\sum_{c_m(\vartheta_k)\in G_{\alpha, R}} |c_m|^x. \quad (2.8)$$

Отметим далее следующие соотношения

$$\frac{r}{2\pi}\sum_{k=0}^{q}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\left|\frac{f'(re^{i(\beta+k\alpha+\varphi)})}{f(re^{i(\beta+k\alpha+\varphi)})}\right| d\varphi = \frac{r}{2\pi}\sum_{k=0}^{q}\int_{\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha+\beta}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha+\beta}\left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right| d\theta =$$

$$= \frac{r}{2\pi}\int_{-\frac{\alpha}{2}+\beta}^{q\alpha-\frac{\alpha}{2}+\beta}\left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right| d\theta + \frac{r}{2\pi}\int_{q\alpha-\frac{\alpha}{2}+\beta}^{q\alpha+\frac{\alpha}{2}+\beta}\left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right| d\theta \geqslant$$

$$\geqslant \frac{r}{2\pi}\int_{-\frac{\alpha}{2}+\beta}^{2\pi-\frac{\alpha}{2}+\beta}\left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right| d\theta = r\mathfrak{M}\left(r, \frac{f'}{f}\right), \quad (2.9)$$

$$\sum_{k=0}^{q}\sum_{c_m(\vartheta_k)\in G_{\alpha, R}}\left(\frac{r}{|c_m|}\right)^x \Phi\left[\left(\frac{r}{|c_m|}\right)^x\right] = \sum_{k=0}^{q-1}\sum_{c_m(\vartheta_k)\in G_{\alpha, R}}\left(\frac{r}{|c_m|}\right)^x \Phi\left[\left(\frac{r}{|c_m|}\right)^x\right] +$$

$$+ \sum_{c_m(\vartheta_q)\in G_{\alpha, R}}\left(\frac{r}{|c_m|}\right)^x \Phi\left[\left(\frac{r}{|c_m|}\right)^x\right] \leqslant 2\sum_{|c_m|\leqslant R}\left(\frac{r}{|c_m|}\right)^x \Phi\left[\left(\frac{r}{|c_m|}\right)^x\right] +$$

$$+\sum_{c_m(\vartheta_q)\in G_{\alpha,\,R}}\left(\frac{r}{|c_m|}\right)^x\Phi\left[\left(\frac{r}{|c_m|}\right)^x\right]\leqslant 3\sum_{|c_m|\leqslant R}\left(\frac{r}{|c_m|}\right)^x\Phi\left[\left(\frac{r}{|c_m|}\right)^x\right], \tag{2.10}$$

Аналогично (2.10) находим

$$\sum_{k=0}^{q}\int_{-\alpha}^{\alpha}|\ln|f(Re^{i(\theta+\beta+k\alpha)})||\,d\theta\leqslant 3\{m(R,0)+m(R,\infty)\}, \tag{2.11}$$

$$\sum_{k=0}^{q}\sum_{c_m(\vartheta_k)\in G_{\alpha,\,R}}|c_m|^x\leqslant 3\sum_{|c_m|\leqslant R}|c_m|^x. \tag{2.12}$$

Учитывая (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) и (2.12), получаем соотношение

$$r\mathfrak{M}\left(r,\frac{f'}{f}\right)\leqslant\alpha^{-1}\sum_{k=0}^{q}\int_0^R\{|\ln|f(te^{i(\beta+(k+1)\alpha)})||+|\ln|f(te^{i(\beta+(k-1)\alpha)})||\}P(t,r,\alpha)\,dt+$$

$$+K_4\alpha^{-1}\left(\frac{r}{R^2}\right)^x\sum_{k=0}^{q}\int_0^R\{|\ln|f(te^{i(\beta+(k+1)\alpha)})||+|\ln|f(te^{i(\beta+(k-1)\alpha)})||\}t^{x-1}\,dt+$$

$$+K_{10}\alpha^{-1}\left(\frac{r}{R}\right)^xT(R,f)+6\sum_{|c_m|\leqslant R}\left(\frac{r}{|c_m|}\right)^x\Phi\left[\left(\frac{r}{|c_m|}\right)^x\right]+K_{11}\left(\frac{r}{R^2}\right)^x\sum_{|c_m|\leqslant R}|c_m|^x.$$

Полученное соотношение справедливо при любом β, $(0\leqslant\beta<2\pi)$. Проинтегрируем его по β от 0 до 2π, тогда

$$r\cdot\mathfrak{M}\left(r,\frac{f'}{f}\right)\leqslant 2\frac{q+1}{\alpha}\int_0^R\{m(t,0)+m(t,\infty)\}P(t,r,\alpha)\,dt+$$

$$+K_{12}\frac{q+1}{\alpha}\left(\frac{r}{R^2}\right)^x\int_0^R\{m(t,0)+m(t,\infty)\}t^{x-1}\,dt+K_{10}\alpha^{-1}\left(\frac{r}{R}\right)^xT(R,f)+$$

$$+6\sum_{|c_m|\leqslant R}\left(\frac{r}{|c_m|}\right)^x\Phi\left[\left(\frac{r}{|c_m|}\right)^x\right]+K_{11}\left(\frac{r}{R^2}\right)^x\sum_{|c_m|\leqslant R}|c_m|^x.$$

Для завершения доказательства леммы 3 достаточно заметить, что

$$\frac{q+1}{\alpha}\leqslant\frac{2\pi+\alpha}{\alpha^2}\leqslant\frac{3\pi}{\alpha^2}.$$

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. ($\lambda<\rho$)

Пусть $f(z)$ имеет нижний порядок λ и порядок ρ.

Выберем γ так, чтобы $\lambda<\gamma<\rho$, и возьмем $\alpha<\pi(2\gamma)^{-1}$. Поделим неравенство (2.7) на $r^{\gamma+1}$ и проинтегрируем его по r от r_0 до $0{,}5R$, получаем

$$\int_{r_0}^{0,5R}r^{-\gamma-1}\left\{r\mathfrak{M}\left(r,\frac{f'}{f}\right)\right\}dr\leqslant 6\pi\alpha^{-2}\int_{r_0}^{R}\{m(t,0)+$$

$$+m(t,\infty)\}\int_{r_0}^{0,5R}r^{-\gamma-1}P(t,r,\alpha)\,dr\,dt+6\pi\alpha^{-2}\int_0^{r_0}\{m(t,0)+$$

$$+ m(t, \infty)\} \int\limits_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1} P(t, r, \alpha)\, dr\, dt + K_{12} (\pi - 2\alpha\gamma)^{-1} R^{-\gamma} T(R, f) +$$

$$+ 6 \int\limits_{0}^{R} \int\limits_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1} \left\{ \left(\frac{r}{t}\right)^{x} \Phi\left[\left(\frac{r}{t}\right)^{x}\right]\right\} dr\, dn(t) + K_{13} (\pi - 2\alpha\gamma)^{-1} R^{-\gamma} n(R). \quad (3.1)$$

Найдем теперь оценки для двойных интегралов в (3.1). Обозначим

$$I_1 = \int\limits_{r_0}^{R} \{m(t, 0) + m(t, \infty)\} \int\limits_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1} P(t, r, \alpha)\, dr\, dt.$$

Производя замену $r = ts$, находим

$$I_1 = \int\limits_{r_0}^{R} \{m(t, 0) + m(t, \infty)\}\, t^{-\gamma-1} \int\limits_{\frac{r_0}{t}}^{\frac{0,5R}{t}} s^{-\gamma-1} \cdot t \cdot P(t, t \cdot s, \alpha)\, ds\, dt.$$

Так как

$$t \cdot P(t, t \cdot s, \alpha) = P(1, s, \alpha),$$

то

$$I_1 \leqslant \int\limits_{r_0}^{R} t^{-\gamma-1} \{m(t, 0) + m(t, \infty)\}\, dt \int\limits_{0}^{\infty} s^{-\gamma-1} P(1, s, \alpha)\, ds.$$

Для второго интеграла справа мы имеем

$$\int\limits_{0}^{\infty} s^{-\gamma-1} P(1, s, \alpha)\, ds = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{s^{\frac{\pi}{2\alpha}}}{s^{\gamma+1}\left(1 + s^{\frac{\pi}{\alpha}}\right)}\, ds = \frac{\alpha}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{du}{u^{\frac{\alpha\gamma}{\pi} + \frac{1}{2}} (1 + u)} = \frac{\alpha}{\cos \alpha\gamma}, \quad (3.2)$$

поэтому

$$I_1 \leqslant \frac{\alpha}{\cos \alpha\gamma} \int\limits_{r_0}^{R} r^{-\gamma-1} \{m(r, 0) + m(r, \infty)\}\, dr \leqslant \frac{\alpha}{\cos \alpha\gamma} \int\limits_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1} \{m(r, 0) +$$

$$+ m(r, \infty)\}\, dr + \frac{2\alpha}{\cos \alpha\gamma} \int\limits_{0,5R}^{R} r^{-\gamma-1} T(r, f)\, dr \leqslant \frac{\alpha}{\cos \alpha\gamma} \int\limits_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1} \{m(r, 0) +$$

$$+ m(r, \infty)\}\, dr + C_2 \frac{\alpha}{\cos \alpha\gamma} R^{-\gamma} T(R, f). \quad (3.3)$$

Для величины

$$I_2 = \int\limits_{0}^{r_0} \{m(t, 0) + m(t, \infty)\} \int\limits_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1} P(t, r, \alpha)\, dr\, dt$$

получаем оценку

$$I_2 = \int\limits_{0}^{r_0} \{m(t, 0) + m(t, \infty)\} \int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{t^{x-1} r^{x}}{r^{\gamma+1} (t^{2x} + r^{2x})}\, dr\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{0}^{r_0} t^{x-1} \{m(t, 0) + m(t, \infty)\} \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^{\gamma+1+x}}\, dt = \frac{1}{(\gamma + x)\, r_0^{\gamma+x}} \int\limits_{0}^{r_0} t^{x-1} \{m(t, 0) +$$

$$+ m(t, \infty)\}\, dt \leqslant C_3 \frac{T(r_0, f)}{x \cdot r_0^{\gamma}} = C_4 \cdot \alpha. \quad (3.4)$$

Пусть далее

$$I_3=\int_0^R dn(t)\int_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1}\cdot\left(\frac{r}{t}\right)^x\Phi\left[\left(\frac{r}{t}\right)^x\right]dr.$$

Производя замену $r=ts$, находим *

$$I_3=\int_0^R t^{-\gamma}\,dn(t)\cdot\int_{\frac{r_0}{t}}^{\frac{0,5R}{t}} s^{x-\gamma-1}\Phi(s^x)\,ds\leqslant\int_0^\infty s^{x-\gamma-1}\Phi(s^x)\,ds\int_0^R t^{-\gamma}\,dn(t),$$

Заменяя далее $s^x=u$, получаем

$$I_3\leqslant\frac{1}{x}\int_0^\infty u^{-\frac{\gamma}{x}}\Phi(u)\,du\int_0^R t^{-\gamma}\,dn(t)=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\infty u^{-\frac{2\alpha\gamma}{\pi}}\Phi(u)\,du\int_0^R t^{-\gamma}dn(t)\qquad(3.5)$$

Эдрей и Фукс [3] показали, что при $0<\sigma<1$ справедливо соотношение

$$\int_0^\infty u^{-\sigma}\Phi(u)\,du\leqslant 4,4\operatorname{cosec}\pi\sigma.\qquad(3.6)$$

Так как $2\alpha\gamma<\pi$, то из (3.5) и (3.6) получаем

$$I_3\leqslant\frac{8,8}{\pi}\alpha\operatorname{cosec}2\alpha\gamma\int_0^R t^{-\gamma}\,dn(t).$$

Интегрирование по частям последнего интеграла дает

$$\int_0^R t^{-\gamma}\,dn(t)=R^{-\gamma}n(R)+\gamma R^{-\gamma}N(R)+\gamma^2\int_0^R r^{-\gamma-1}N(r)\,dr,$$

поэтому

$$I_3\leqslant\frac{8,8}{\pi}\alpha\gamma^2\operatorname{cosec}2\alpha\gamma\int_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1}N(r)\,dr+C_5\alpha\operatorname{cosec}2\alpha\gamma\cdot R^{-\gamma}\cdot N(R)+$$
$$+C_6\alpha\operatorname{cosec}2\alpha\gamma\cdot R^{-\gamma}\cdot n(R)+C_7\alpha\operatorname{cosec}2\alpha\gamma.\qquad(3.7)$$

Для величины $n(R)$ имеем оценку

$$n(R)\ln 2\leqslant\int_0^R \overset{+}{\ln}\frac{2R}{t}\,dn(t)\leqslant\int_0^{2R}\overset{+}{\ln}\frac{2R}{t}\,dn(t)=N(2R)\leqslant T(2R).\qquad(3.8)$$

Используя (3.3), (3.4), (3.7) и (3.8), мы из (3.1) находим

$$\int_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1}\left\{r\mathfrak{M}\left(r,\frac{f'}{f}\right)\right\}dr\leqslant\frac{6\pi}{\alpha\cos\alpha\gamma}\int_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1}\{m(r,0)+m(r,\infty)\}\,dr+$$
$$+\frac{C_8}{\alpha}+\frac{C_9}{\alpha\cos\alpha\gamma}R^{-\gamma}T(R,f)+K_{14}(\pi-2\alpha\gamma)^{-1}\cdot R^{-\gamma}T(2R,f)+$$
$$+\frac{6\cdot 8,8}{\pi}\alpha\gamma^2\operatorname{cosec}2\alpha\gamma\int_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1}N(r)\,dr+C_{10}\alpha\operatorname{cosec}2\alpha\gamma R^{-\gamma}T(2R,f)+$$
$$+C_{11}\,\alpha\operatorname{cosec}2\alpha\gamma.$$

* Мы считаем, что $f(0)=1$. Этим не ограничивается общность наших рассуждений.

Выберем в этом неравенстве $\alpha = \frac{\pi}{3\gamma}$, тогда

$$\int_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1}\left\{r\mathfrak{M}\left(r, \frac{f'}{f}\right)\right\} dr \leqslant 36\gamma \int_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1}\{m(r, 0) + m(r, \infty)\} dr +$$

$$+ 20\gamma \int_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1} N(r)\, dr + C_{12} R^{-\gamma} \cdot T(2R, f) + C_{13} \leqslant 72\gamma \int_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1} T(r, f)\, dr +$$

$$+ C_{12} R^{-\gamma} T(2R, f) + C_{13}. \tag{3.9}$$

Применим теперь это неравенство к $f'(z)$, вместо $f(z)$ (это можно сделать, так как порядок и нижний порядок у $f(z)$ и $f'(z)$ совпадают ([4] стр. 52). Учитывая, кроме того, соотношение ([5] стр. 61)

$$T(r, f') \leqslant 2T(r, f) + 4 \cdot \overset{+}{\ln} T(2r, f) + 4 \overset{+}{\ln} r + K_{15} \quad (0 < r_0 < r),$$

мы из (3.9) находим

$$\int_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1}\left\{r\mathfrak{M}\left(r, \frac{f''}{f'}\right)\right\} dr \leqslant 144\gamma \int_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1} \cdot T(r, f)\, dr +$$

$$+ C_{14} \int_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1} \overset{+}{\ln} T(r, f)\, dr + C_{15} R^{-\gamma}\{T(4R, f) + \overset{+}{\ln} T(4R, f)\} +$$

$$+ C_{16} \leqslant \{144\gamma + o(R)\} \int_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1} T(r, f)\, dr + C_{15}(1 +$$

$$+ o(R)) R^{-\gamma} T(4R, f) + C_{16}.$$

Таким образом,

$$\frac{\int_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1}\left\{r\mathfrak{M}\left(r, \frac{f''}{f'}\right)\right\} dr}{\int_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1} T(r, f)\, dr} \leqslant 144\gamma + o(R) + \frac{C_{15}(1 + o(R)) R^{-\gamma} T(4R, f) + C_{16}}{\int_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1} T(r, f)\, dr} \tag{3.10}$$

Так как $\gamma < \rho$, то при $R \to \infty$

$$\int_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1} T(r, f)\, dr \to \infty,$$

с другой стороны, $\lambda < \gamma$, поэтому найдется последовательность $\{R_i\} \uparrow \infty$, что

$$R_i^{-\gamma} T(4R_i, f) \to 0,$$

следовательно, устремляя в (3.10) $R \to \infty$ по этой последовательности $\{R_i\} \uparrow \infty$, получаем

$$\varliminf_{R \to \infty} \frac{\int_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1}\left\{r\mathfrak{M}\left(r, \frac{f''}{f'}\right)\right\} dr}{\int_{r_0}^{0,5R} r^{-\gamma-1} T(r, f)\, dr} \leqslant 144\gamma.$$

Поэтому

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{r\mathfrak{M}\left(r,\frac{f''}{f'}\right)}{T(r,f)}\leqslant 144\gamma.$$

Так как последнее неравенство справедливо при любом γ, $\lambda<\gamma<\rho$, то теорема 3 доказана для случая $\lambda<\rho$.

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3 ($\lambda=\rho$).

Пусть $\rho<\gamma<\rho+\varepsilon$, тогда при $\alpha<\pi(2\gamma)^{-1}$ получаем $x=\pi(2\alpha)^{-1}>\gamma$. Устремляя в (2.7) R к ∞, получим соотношение

$$r\mathfrak{M}\left(r,\frac{f'}{f}\right)\leqslant 6\pi\alpha^{-2}\int\limits_0^\infty\{m(t,0)+m(t,\infty)\}P(t,r,\alpha)\,dt+$$

$$+6\int\limits_0^\infty\left(\frac{r}{t}\right)^x\Phi\left[\left(\frac{r}{t}\right)^x\right]dn(t),\tag{4.1}$$

справедливое при любом r $(0<r_0<r<\infty)$. Умножим (4.1) на $r^{-\gamma-1}$ и проинтегрируем по r от ω до ∞, имеем

$$\int r^{-\gamma-1}\left\{r\mathfrak{M}\left(r,\frac{f'}{f}\right)\right\}dr\leqslant 6\pi\alpha^{-2}\int\limits_0^\infty\{m(t,0)+m(t,\infty)\}\int\limits_\omega^\infty r^{-\gamma-1}P(t,r,\alpha)\,dr\,dt+$$

$$+6\int\limits_0^\infty dn(t)\int\limits_\omega^\infty r^{-\gamma-1}\left(\frac{r}{t}\right)^x\Phi\left[\left(\frac{r}{t}\right)^x\right]dr.$$

Обозначим

$$I_4=\int\limits_0^\infty\{m(t,0)+m(t,\infty)\}\,dt\int\limits_\omega^\infty r^{-\gamma-1}P(t,r,\alpha)\,dr.$$

Производя замену $r=ts$, получаем

$$I_4=\int\limits_0^\infty t^{-\gamma-1}\{m(t,0)+m(t,\infty)\}\,dt\int\limits_{\frac{\omega}{t}}^\infty s^{-\gamma-1}P(1,s,\alpha)\,ds.\tag{4.2}$$

Положим

$$G_1(u)=\int\limits_u^\infty s^{-\gamma-1}P(1,s,\alpha)\,ds,$$

$$F_1(u)=\int\limits_u^\infty s^{-\gamma-1}\{m(s,0)+m(s,\infty)\}\,ds,$$

тогда (4.2) принимает вид

$$I_4=-\int\limits_0^\infty G\left(\frac{\omega}{t}\right)dF_1(t).$$

Интегрирование по частям в последнем равенстве дает

$$I_4=-F_1(t)\,G_1\left(\frac{\omega}{t}\right)\Bigg|_0^\infty+\int\limits_0^\infty F_1(t)\cdot\left(\frac{\omega}{t}\right)^{-\gamma-1}P\left(1,\frac{\omega}{t},\alpha\right)\frac{\omega}{t^2}\,dt.$$

Замечая далее, что при $t \to 0$ и $\omega \geqslant \omega_0 > 0$

$$F_1(t)\cdot G_1\left(\frac{\omega}{t}\right)=\int\limits_t^\infty r^{-\gamma-1}\{m(r,0)+m(r,\infty)\}\,dr\int\limits_{\frac{\omega}{t}}^\infty s^{-\gamma-1}P(1,s,\alpha)\,ds=$$

$$=\int\limits_t^\infty r^{-\gamma-1}\{m(r,0)+m(r,\infty)\}\,dr\int\limits_{\frac{\omega}{t}}^\infty \frac{s^{\frac{\pi}{2\alpha}}}{s^{\gamma+1}\left(1+s^{\frac{\pi}{\alpha}}\right)}\,ds=$$

$$=t^{\gamma+\frac{\pi}{2\alpha}}\int\limits_t^\infty r^{-\gamma-1}\{m(r,0)+m(r,\infty)\}\,dr\int\limits_\omega^\infty \frac{u^{\frac{\pi}{2\alpha}}\,du}{u^{\gamma+1}\left(t^{\frac{\pi}{\alpha}}+u^{\frac{\pi}{\alpha}}\right)}\leqslant$$

$$\leqslant 2\cdot t^{\gamma+\frac{\pi}{2\alpha}}\int\limits_t^\infty \frac{T(r,f)}{r^{\gamma+1}}\,dr\int\limits_\omega^\infty \frac{du}{u^{\gamma+1+\frac{\pi}{2\alpha}}}=\frac{2}{\left(\gamma+\frac{\pi}{2\alpha}\right)\omega^{\gamma+\frac{\pi}{2\alpha}}}\,t^{\gamma+\frac{\pi}{2\alpha}}\int\limits_t^1 \frac{T(r,f)}{r^{\gamma+1}}\,dr+$$

$$+\frac{2}{\left(\gamma+\frac{\pi}{2\alpha}\right)\omega^{\gamma+\frac{\pi}{2\alpha}}}\,t^{\gamma+\frac{\pi}{2\alpha}}\int\limits_1^\infty \frac{T(r,f)}{r^{\gamma+1}}\,dr\leqslant K_{16}t^{\frac{\pi}{2\alpha}}(1+o(t))\to 0$$

и

$$\lim_{t\to\infty}F_1(t)\,G_1\left(\frac{\omega}{t}\right)=0,$$

мы имеем

$$I_4=\int\limits_0^\infty F_1(t)\left(\frac{\omega}{t}\right)^{-\gamma-1}P\left(1,\frac{\omega}{t},\alpha\right)\frac{\omega}{t^2}\,dt. \tag{4.3}$$

Рассмотрим также двойной интеграл

$$I_5=\int\limits_0^\infty dn(t)\int\limits_\omega^\infty r^{-\gamma-1}\cdot\left(\frac{r}{t}\right)^x\cdot\Phi\left[\left(\frac{r}{t}\right)^x\right]dr=\int\limits_0^\infty t^{-\gamma}\,dn(t)\int\limits_{\frac{\omega}{t}}^\infty s^{x-\gamma-1}\Phi(s^x)\,ds.$$

Аналогично положим

$$G_2(u)=\int\limits_u^\infty s^{x-\gamma-1}\Phi(s^x)\,ds,$$

$$F_2(u)=\int\limits_u^\infty s^{-\gamma}\,dn(s)=-\frac{n(u)}{u^\gamma}-\gamma\,\frac{N(u)}{u^\gamma}+\gamma^2\int\limits_u^\infty s^{-\gamma-1}N(s)\,ds.$$

Поэтому

$$I_5=-\int\limits_0^\infty G_2\left(\frac{\omega}{t}\right)dF_2(t)=-F_2(t)\,G_2\left(\frac{\omega}{t}\right)\Big|_0^\infty+$$

$$+\int\limits_0^\infty F_2(t)\left(\frac{\omega}{t}\right)^{x-\gamma-1}\Phi\left[\left(\frac{\omega}{t}\right)^x\right]\frac{\omega}{t^2}\,dt=-\int\limits_0^\infty\frac{n(t)+\gamma N(t)}{t^\gamma}\left(\frac{\omega}{t}\right)^{x-\gamma-1}\Phi\left[\left(\frac{\omega}{t}\right)^x\right]\frac{\omega}{t^2}\,dt+$$

$$+\gamma^2\int\limits_0^\infty\left\{\int\limits_t^\infty r^{-\gamma-1}N(r)\,dr\right\}\left(\frac{\omega}{t}\right)^{x-\gamma-1}\Phi\left[\left(\frac{\omega}{t}\right)^x\right]\frac{\omega}{t^2}\,dt,$$

…ть

$$I_5 \leqslant \gamma^2 \int\limits_0^\infty \left\{\int\limits_t^\infty r^{-\gamma-1} N(r)\, dr\right\} \left(\frac{\omega}{t}\right)^{x-\gamma-1} \Phi\left[\left(\frac{\omega}{t}\right)^x\right] \frac{\omega}{t^2}\, dt. \tag{4.4}$$

…тывая соотношения (4.3) и (4.4), получаем

$$\int\limits_\omega^\infty r^{-\gamma-1} \left\{r\mathfrak{M}\left(r, \frac{f'}{f}\right)\right\} dr \leqslant 6\pi\alpha^{-2} \int\limits_0^\infty \left[\int\limits_t^\infty r^{-\gamma-1} \{m(r, 0) +$$

$$+ m(r, \infty)\}\, dr\right] \left(\frac{\omega}{t}\right)^{-\gamma-1} P\left(1, \frac{\omega}{t}, \alpha\right) \frac{\omega}{t^2}\, dt +$$

$$+ 6\gamma^2 \int\limits_0^\infty \left\{\int\limits_t^\infty r^{-\gamma-1} N(r)\, dr\right\} \left(\frac{\omega}{t}\right)^{x-\gamma-1} \Phi\left[\left(\frac{\omega}{t}\right)^x\right] \frac{\omega}{t^2}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 12\pi\alpha^{-2} \int\limits_0^\infty \left\{\int\limits_t^\infty r^{-\gamma-1} T(r, f)\, dr\right\} \left(\frac{\omega}{t}\right)^{-\gamma-1} P\left(1, \frac{\omega}{t}, \alpha\right) \frac{\omega}{t^2}\, dt +$$

$$+ 12\gamma^2 \int\limits_0^\infty \left\{\int\limits_t^\infty r^{-\gamma-1} T(r, f)\, dr\right\} \left(\frac{\omega}{t}\right)^{x-\gamma-1} \Phi\left[\left(\frac{\omega}{t}\right)^x\right] \frac{\omega}{t^2}\, dt =$$

$$= 12 \int\limits_0^\infty \left\{\int\limits_t^\infty r^{-\gamma-1} T(r, f)\, dr\right\} \left\{\pi\alpha^{-2} \left(\frac{\omega}{t}\right)^{-\gamma-1} P\left(1, \frac{\omega}{t}, \alpha\right) +\right.$$

$$\left. + \gamma^2 \left(\frac{\omega}{t}\right)^{x-\gamma-1} \Phi\left[\left(\frac{\omega}{t}\right)^x\right]\right\} \frac{\omega}{t^2}\, dt. \tag{4.5}$$

…а γ следует, что

$$\lim_{t \to \infty} t^\varepsilon \int\limits_t^\infty \frac{T(r, f)}{r^{\gamma+1}}\, dr = \infty,$$

существует неограниченная возрастающая последовательность … что при $t \leqslant \omega_i$

$$t^\varepsilon \int\limits_t^\infty \frac{T(r, f)}{r^{\gamma+1}}\, dr \leqslant \omega_i^\varepsilon \int\limits_{\omega_i}^\infty \frac{T(r, f)}{r^{\gamma+1}}\, dr. \tag{4.6}$$

… стороны, $\int\limits_t^\infty r^{-\gamma-1} T(r, f)\, dr$ не возрастает с t, т. е. при $t \geqslant \omega_i$

$$\int\limits_{\omega_i}^\infty r^{-\gamma-1} T(r, f)\, dr \geqslant \int\limits_t^\infty r^{-\gamma-1} T(r, f)\, dr. \tag{4.7}$$

…им теперь в соотношении (4.5) $\omega = \omega_i$, тогда, учитывая (4.6) и … лучаем

$$\ldots r\mathfrak{M}\left(r, \frac{f'}{f}\right)\Big\}\, dr \leqslant 12 \int\limits_{\omega_i}^\infty \frac{T(r, f)}{r^{\gamma+1}}\, dr \left[\int\limits_0^{\omega_i} \left\{\pi\alpha^{-2} \left(\frac{\omega_i}{t}\right)^{\varepsilon-\gamma-1} P\left(1, \frac{\omega_i}{t}, \alpha\right) +\right.\right.$$

$$\ldots \gamma^2 \left(\frac{\omega_i}{t}\right)^{x+\varepsilon-\gamma-1} \Phi\left[\left(\frac{\omega_i}{t}\right)^x\right]\Big\} \frac{\omega_i}{t^2}\, dt + \int\limits_\omega^\infty \left\{\pi\alpha^2 \left(\frac{\omega_i}{t}\right)^{-\gamma-1} P\left(1, \frac{\omega_i}{t}, \alpha\right) +\right.$$

$$+ \gamma^2 \left(\frac{\omega_i}{t}\right)^{x-\gamma-1} \Phi\left[\left(\frac{\omega_i}{t}\right)^x\right]\Big\} \frac{\omega_i}{t^2}\, dt\Big] =$$

$$= 12 \int_{\omega_i}^{\infty} \frac{T(r, f)}{r^{\gamma+1}}\, dr \left[\int_0^1 \left\{\pi\alpha^{-2}\left(\frac{1}{u}\right)^{\varepsilon-\gamma-1} P\left(1, \frac{1}{u}, \alpha\right) + \gamma^2 \left(\frac{1}{u}\right)^{x+\varepsilon-\gamma-1} \Phi\left[\left(\frac{1}{u}\right)^x\right]\right\} \frac{du}{u^2} + \right.$$

$$\left. + \int_1^{\infty} \left\{\pi\alpha^{-2}\left(\frac{1}{u}\right)^{-\gamma-1} P\left(1, \frac{1}{u}, \alpha\right) + \gamma^2 \left(\frac{1}{u}\right)^{x-\gamma-1} \Phi\left[\left(\frac{1}{u}\right)^x\right]\right\} \frac{du}{u^2}\right] =$$

$$= 12A(\alpha, \varepsilon, \gamma) \int_{\omega_i}^{\infty} r^{-\gamma-1} T(r, f)\, dr.$$

Полученное неравенство также можно применить к $f'(z)$ вместо $f(z)$ тогда

$$\int_{\omega_i}^{\infty} r^{-\gamma-1} \left\{r\mathfrak{M}\left(r, \frac{f''}{f'}\right)\right\} dr \leqslant 12A(\alpha, \varepsilon, \gamma) \int_{\omega_i}^{\infty} r^{-\gamma-1} T(r, f')\, dr \leqslant$$

$$\leqslant 24A(\alpha, \varepsilon, \gamma) \int_{\omega_i}^{\infty} r^{-\gamma-1} \{T(r, f) + O(\ln r)\}\, dr.$$

Таким образом,

$$\varlimsup_{\omega \to \infty} \frac{\int_{\omega}^{\infty} r^{-\gamma-1} \left\{r\mathfrak{M}\left(r, \frac{f''}{f'}\right)\right\} dr}{\int_{\omega}^{\infty} r^{-\gamma-1} \{T(r, f) + O(\ln r)\}\, dr} \leqslant 24A(\alpha, \varepsilon, \gamma)$$

и, значит,

$$\varliminf_{r \to \infty} \frac{r\mathfrak{M}\left(r, \frac{f''}{f'}\right)}{T(r, f)} = \varliminf_{r \to \infty} \frac{r\mathfrak{M}\left(r, \frac{f''}{f'}\right)}{T(r, f) + O(\ln r)} \leqslant 24A(\alpha, \varepsilon, \gamma).$$

Устремляя теперь $\varepsilon \to 0$ и учитывая (3.2) и (3.6), получаем:

$$A(\alpha, \varepsilon, \gamma) \to A(\alpha, 0, \rho) = \pi\alpha^{-2} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{u}\right)^{-\rho-1} P\left(1, \frac{1}{u}, \alpha\right) \frac{du}{u^2} +$$

$$+ \rho^2 \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{u}\right)^{x-\rho-1} \Phi\left[\left(\frac{1}{u}\right)^x\right] \frac{du}{u^2} =$$

$$= \pi\alpha^{-2} \int_0^{\infty} s^{-\rho-1} P(1, s, \alpha)\, ds + \rho^2 \int_0^{\infty} s^{x-\rho-1} \Phi(s^x)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{\alpha \cos \alpha\rho} + \frac{8{,}8\alpha}{\pi \sin 2\alpha\rho} \rho^2.$$

Так как полученное неравенство справедливо при любом $\alpha < \frac{\pi}{2\rho}$, то теорема 3 доказана полностью.

§ 5. ЗАМЕЧАНИЯ

Теорема 4. *Пусть Δ — сумма дефектов мероморфной функции $f(z)$ конечного нижнего порядка λ. Тогда $f(z)$ имеет хоть один дефект, удовлетворяющий условию*

$$\delta(a) > \Delta^2 (4k_2^2 \lambda)^{-1}.$$

Эта теорема содержит результат Фукса [2].

Для доказательства мы используем рассуждение, аналогичное [2 стр. 209]. Пусть

$$\eta = \Delta^2 (4K_2^2 \lambda)^{-1}.$$

Так как из $\delta(a) < \eta$ следует

$$\delta(a)\eta > \delta^2(a),$$

$$\sum_{\delta(a)<\eta} \delta(a) < \sum_{\delta(a)<\eta} \sqrt{\eta}\sqrt{\delta(a)} = \Delta(2K_2\sqrt{\lambda})^{-1} \sum_{\delta(a)<\eta} \sqrt{\delta(a)}.$$

Учитывая неравенство (1.2), получаем

$$\sum_{\delta(a)<\eta} \delta(a) < \frac{\Delta}{2},$$

поэтому

$$\sum_{\delta(a)\geqslant\eta} \delta(a) \geqslant \frac{\Delta}{2}.$$

Теорема 4 доказана.

В работе [6] нами получен следующий результат, дополняющий теорему 1.

Теорема 5. *Справедлива оценка*

$$\sigma_1(\lambda) \leqslant K_{16}\sqrt{\lambda} \qquad 0 < \lambda < 0{,}5, \tag{5.1}$$

где $\sigma_1(\lambda) = \sup\limits_{(f)} S(f)$, $\sup$ *берется по всем мероморфным функциям нижнего порядка λ, имеющим не менее двух дефектных значений.*

Из этой теоремы мы получаем следующий результат.

Теорема 6. *Если мероморфная функция $f(z)$ нижнего порядка $\lambda (\lambda < 0{,}5)$ имеет не менее двух дефектных значений, то*

$$\Delta = \sum_{(a)} \delta(a) < K_{17} \cdot \lambda^{\frac{3}{2}}. \tag{5.2}$$

Доказательство. Пусть $\eta = \Delta^2(4K_{16}^2 \cdot \lambda)^{-1}$, тогда, так же как и в теореме 4, находим, что существует хоть один дефект, удовлетворяющий неравенству

$$\delta(a_m) \geqslant \eta = \Delta^2(4 \cdot K_{16}^2 \cdot \lambda)^{-1}. \tag{5.3}$$

С другой стороны, если число дефектов мероморфной функции нижнего порядка $0 < \lambda < 0{,}5$ не меньше двух, тогда (см. [8], [9]) при любом a

$$\delta(a) \leqslant 1 - \cos \pi\lambda < K_{18} \cdot \lambda^2. \tag{5.4}$$

Из (5.3) и (5.4) получаем утверждение теоремы. Точность оценок (5.1) и (5.2) нам установить не удалось. Мы предполагаем, что в (5.2) показатель $\frac{3}{2}$ можно заменить на 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции. ОГИЗ. М.— Л, 194

2. W. H. J. Fuchs. A theorem on the Nevanlinnas deficiencies of meromorph function of finite order, Ann. of Math., 68, № 2, 203—209 (1958).

3. A. Edrei, W. H. J. Fuchs. On the growth of meromorphic functions with s veral deficient values, Trans. Amer. Math. Soc., 93, № 2, 292—328 (1959).

4. Г. Виттих. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функция Физматгиз, М., 1960.

5. R. Nevanlinna. Le théorème de Picard — Borel et la théorie des fonctio méromorphes. Paris, Gauthier — Villars, 1929.

6. В. П. Петренко. Некоторые оценки логарифмической производной мероморф ной функции. «Изв. АН Арм. ССР, серия физико-матем.», 17, № 1, 23—36, (1964).

7. A. Edrei, W. H. J. Fuchs. On the deficiencies of meromorphic function of o der less than one. Duke Math. J., 27, 233—240 (1960).

8. И. В. Островский. О дефектах мероморфных функций нижнего порядк меньше единицы. «Докл. АН СССР», 150, № 1, 32—35 (1963).

9. А. А. Гольдберг. О дефектах мероморфных функций. «Докл. АН СССР» 98, № 3, 893—895 (1954).