УДК 517.575

А. Ю. РАШКОВСКИЙ

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В КЛАССЕ ПЛЮРИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ОБОБЩЕННОМ ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Пусть U^n — единичный поликруг в $\boldsymbol{C}^n$, T^n — его остов, $\sigma(\zeta)$ — нормированная мера Лебега на T^n, $P(z, \varsigma)$ — ядро Пуассона для U^n $(z \in U^n,\ \zeta \in T^n)$, $P[\mu](z) = \int\limits_{T^n} P(z, \zeta)\, d\mu(\zeta)$ — интеграл Пуассона меры μ на T^n.

Известна следующая теорема У. Рудина [1]:

Теорема 1. *Пусть $F(\zeta)$ — полунепрерывная снизу положительная функция на T^n, $F \in L^1(T^n)$. Тогда существует сингулярная мера $\lambda \geqslant 0$ на T^n такая, что $P[Fd\sigma - d\lambda]$ является плюригармонической функцией в U^n.*

В [2] содержится подобный результат для единичного шара в C^n.

Настоящая работа посвящена доказательству аналогичного утверждения для обобщенного единичного круга D_n *).

Пусть z — квадратная матрица порядка n, составленная из n^2 комплексных чисел; ее можно рассматривать как точку в C^{n^2}. Матрицу, сопряженную к z, будем обозначать z^*.

Обобщенным единичным кругом называется область D_n в C^{n^2}: $D_n = \{z : I - z^*z > 0\}$. Приведем некоторые предварительные сведения об этой области (см. [3, 5, 6]).

1. Границей Шилова области D_n является множество унитарных матриц порядка n: $U_n = \{\zeta : \zeta^*\zeta = I\}$.

2. Ядро Пуассона области D_n имеет вид

$$P(z, \zeta) = \left\{\frac{\det(I - z^*z)}{|\det(I - \zeta^*z)|^2}\right\}^n \quad (z \in D_n,\ \zeta \in U_n).$$

Если μ — комплексная борелевская мера на U_n, то интеграл Пуассона меры μ будем записывать в виде $P[\mu](z) = \int\limits_{U_n} P(z, \zeta)\, d\mu(\zeta)$. Пусть σ — нормированная мера Хаара на U_n. Если $F \in L^1(U_n)$, то $P[Fd\sigma]$ будем обозначать просто $P[F]$.

3. Если $F \in A(D_n)$ (т. е. F голоморфна в D_n и непрерывна в $\bar{D}_n$), то $F(z) = P[F](z)$ $(z \in \bar{D}_n)$.

4. Если $F = P[\mu]$, то $F(r\zeta) \underset{r \to 1}{\to} \mu$ $(\zeta \in U_n)$ в слабой топологии мер.

Если $d\mu = Gd\sigma + d\lambda$, где $G \in L^1(U_n)$, а λ — сингулярная (относительно меры σ) мера на U_n, — разложение Лебега меры μ, то F имеет допустимый предел**, равный $G(\zeta)$, для почти всех $\xi \in U_n$.

5. Пусть $T_f(\varsigma)$ — унитарное представление порядка N_f группы U_n с сигнатурой $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \vec{Z}^n$, т. е. $f_j \in Z$ $(j = 1, \ldots, n)$, $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots \geqslant f_n$. Тогда совокупность $\{T_f(\zeta)\}$ (для всех сигнатур f) образует полную систему попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений группы U_n.

6. Пусть $T_f(\zeta)$ имеет в каком-либо базисе вид.

$T_f(\zeta) = (t^f_{ij}(\zeta))^{N_f}_{i,j=1}$; положим $\varphi^f_{ij}(\zeta) = (N_f)^{\frac{1}{2}} t^f_{ij}(\zeta)$. Тогда $\{\varphi^f_{ij}(\zeta)\}$

*) Исследованию различных классов функций в D_n и других классических областях посвящена книга Хуа Ло-кена [3], а также цикл работ В. С. Владимирова [4], в котором, в частности, содержится теорема 3 для $n = 2$.

** Определение допустимого предела см. в [6].

образуют полную ортонормированную систему в $L^2(U_n)$. Всякая непрерывная функция на U_n может быть равномерно аппроксимирована линейными комбинациями вида $\sum a^i_{fj}\varphi^f_{ij}(\zeta)$ (теорема Петера — Вейля).

7. Пусть $\vec{Z}^n_+ = \{f \in \vec{Z}^n : f_n \geqslant 0\}$. Если $f \in \vec{Z}^n_+$, $1 \leqslant i, j \leqslant N_f$, то $\varphi^f_{ij}(\zeta)$ есть однородный полином степени $\|f\| = |f_1| + \cdots + |f_n|$. Любая функция F, голоморфная в $\bar{D}_n$, может быть разложена в ряд

$$F(z) = \sum_{f \in \vec{Z}^n_+} \sum_{i,j=1}^{N_f} a^f_{ij}\varphi^f_{ij}(z) \quad (z \in \bar{D}_n).$$

8.
$$P(z, \varsigma) = \sum_{h \in \vec{Z}^n} \sum_{i,j=1}^{N_h} \Phi^h_{ij}(z)\,\varphi^h_{ij}(\zeta),$$

где $\Phi^h_{ij}(z) = P[\varphi^h_{ij}](z)$. Ряд сходится равномерно в области $D^r_n = \{z : rI - z^*z > 0\}$ $(0 < r < 1)$.

Опираясь на эти факты, перейдем к доказательству результатов, полученных в настоящей работе.

Пусть μ — мера на U_n; коэффициенты Фурье меры μ относительно системы $\{\varphi^f_{ij}(\varsigma)\}$ будем обозначать $\hat{\mu}(f;\ i, j) = \int\limits_{U_n} \overline{\varphi^f_{ij}(\zeta)}\, d\mu(\zeta)$.

Теорема 2. *Функция $F = P[\mu]$ голоморфна в D_n тогда и только тогда, когда* $\hat{\mu}(f;\ i, j) = 0\ \forall f \notin \vec{Z}^n_+$, $1 \leqslant i, j \leqslant N_f$ (1).

Доказательство. Пусть $F = P[\mu]$ голоморфна в D_n, $0 < r < 1$. Тогда $F_r(\zeta) \equiv F(r\zeta)$ есть сумма равномерно сходящегося в $\bar{D}_n$ ряда $\sum\limits_{f \in \vec{Z}^n_+} \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant N_f} a^f_{ij}\varphi^f_{ij}(\zeta)$, поэтому $\hat{F}_r(f;\ i, j) = 0$ $\forall f \notin \vec{Z}^n_+$, $1 \leqslant i, j \leqslant N_f$. Выберем последовательность $r_k \to 1$ такую, что F_{r_k} слабо сходится к μ при $k \to \infty$. Тогда $\hat{\mu}(f;\ i, j) = \lim\limits_{k \to \infty} \hat{F}_{r_k}(f;\ i, j)$, т. е. $\hat{\mu}(f;\ i, j) = 0$ при $f \notin \vec{Z}^n_+$, $1 \leqslant i, j \leqslant N_f$.

Обратно, пусть выполнимо соотношение (1). Тогда

$$F(z) = \int\limits_{U_n} P(z, \zeta)\, d\mu(\zeta) = \int\limits_{U_n} \sum_{h \in \vec{Z}_n} \sum_{k,l=1}^{N_h} \Phi^h_{kl}(z)\,\varphi^h_{kl}(\zeta)\, d\mu(\zeta) =$$

$$= \sum_{h \in \vec{Z}^n} \sum_{k,l=1}^{N_h} \Phi^h_{kl}(z)\,\hat{\mu}(h;\ k,\ l) = \sum_{h \in \vec{Z}^n_+} \sum_{k,l=1}^{N_k} \Phi^h_{kl}(z)\,\hat{\mu}(h;\ k,\ l).$$

Поскольку ряд равномерно сходится в области D_n, а $\Phi^h_{kl}(z)$ аналитичны при $h \in \vec{Z}^n_+$, то $F(z)$ аналитична в D_n, что и завершает доказательство.

Пусть $\vec{Z}^n_- = \{f \in \vec{Z}^n ; f_1 \leqslant 0\}$ и положим $Y_n = \vec{Z}^n_+ \cup \vec{Z}^n_-$.

Теорема 3. *Пусть* μ — *действительная мера на* U_n. *Тогда* $F = P[\mu]$ *является плюригармонической функцией в* D_n *тогда и только тогда, когда* $\hat{\mu}(f;\ i,\ j) = 0$ *для* $\forall f \notin Y_n$, $1 \leqslant i, j \leqslant N_f$ (2).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Для дальнейшего нам понадобится следующая конструкция. Пусть M — целое положительное число. Положим $H = \{\zeta \in U_n : (\det \zeta)^M = 1\}$. Очевидно, что H — компактная подгруппа U_n;) пусть μ_H — ее мера Хаара. Назовем сигнатуры $f = (f_1, \ldots, f_n$ и $g = (g_1, \ldots, g_n)$ H-эквивалентными ($f^H g$), если существует $k \in \mathbf{Z}$: $f_j - g_j = kM$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Лемма.

$$\int\limits_H \varphi_{ij}^f(\zeta)\,\overline{\varphi_{kl}^g(\zeta)}\,d\mu(\zeta) = \begin{cases} 1, & \textit{если } f^H g,\ i = k,\ j = l; \\ 0, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Очевидно, что все T_f являются неприводимыми унитарными представлениями группы H. Покажем, что если f и g не H-эквивалентны, то неэквивалентны и представления T_f и T_g группы H.

Пусть $T_f \sim T_g$, т. е. существует невырожденный оператор A такой, что $T_f(\zeta) = A^{-1} T_g(\zeta) A$ $(\forall \zeta \in H)$.

Возьмем произвольную диагональную матрицу $\theta \in H$, $\Theta = [e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}]$. Тогда спектры $T_f(\Theta)$ и $T_g(\Theta)$

$$\{e^{i(p_1^1\theta_1 + p_2^1(\theta_2 + \cdots + p_n^1\theta_n)}, e^{i(p_1^2\theta_1 + \cdots + p_n^2\theta_n)}, \ldots, e^{i(p_1^m\theta_1 + \cdots + p_n^m\theta_n)}\}$$

и

$$\{e^{i(q_1^1\theta_1 + q_2^1\theta_2 + \cdots + q_n^1\theta_n)}, e^{i(q_1^2\theta_1 + \cdots + q_n^2\theta_n)}, \ldots, e^{i(q_1^m\theta_1 + \cdots + q_n^m\theta_n)}\}$$

соответственно, где $m = N_f = N_g$, $(p_1^j, \ldots, p_n^j)$ — веса T_f, $(q_1^j, \ldots, q_n^j)$ — веса T_g $(j = 1, \ldots, m)$. Поскольку представления $T_f(\Theta)$ и $T_g(\Theta)$ эквивалентны, то совпадают и их спектры. Пусть $(q_1^r, \ldots, q_n^r) = (q_1, \ldots, q_n)$ — старший вес T_g. Тогда $\exists j : e^{i(q_1^r\theta_1 + \cdots + q_n^r\theta_n)} = e^{i(p_1^j\theta_1 + \cdots + p_n^j\theta_n)}$. Так как это справедливо для любого $\Theta \in H$, то отсюда следует, что $\exists k \in \mathbf{Z} : q_s^r = kM + p_s^r$ $(s = 1, \ldots, n)$. Поскольку $(q_1^r, \ldots, q_n^r)$ — старший вес T_g, то $(p_1^j, \ldots, p_n^j)$ — старший вес T_f, т. е. $f^H g$. Значит, при f и g не H-эквивалентных представления T_f и T_g также не эквивалентны. Далее, очевидно, что при $f^H g T_f = T_g$ на H. Наконец, (2) следует из леммы Шура.

Теорема 4*. *Пусть* $F(\zeta)$ — *полунепрерывная снизу положительная функция на* U_n, $F \in L^1(U_n)$. *Тогда существует сингуляр-*

---

* Когда настоящая работа была подготовлена к печати, этот результат в числе других был сформулирован в докладе А. Б. Александрова на конференции в Черноголовке в 1983 г. Метод доказательства, по-видимому, отличен от нашего.

ная мера $\lambda \geqslant 0$ *на* U_n *такая, что* $P[f - d\lambda]$ *— плюригармоническая функция в* D_n.

Доказательство. По теореме 3 достаточно построить сингулярную меру $\lambda \geqslant 0$ такую, что $\hat{\lambda}(g;\ i,\ j) = \hat{F}(g;\ i,\ j)$ для $\forall g \notin Y_n (1 \leqslant i, j \leqslant N_g)$. Пусть сначала $F(\zeta) = \sum\limits_{g \in G} \sum\limits_{i,j=1}^{N_g} a_{ij}^g \varphi_{ij}^g(\zeta) > 0$, где G — некоторое конечное множество сигнатур. Выберем $M \in \mathbf{Z} : M > \max\limits_{g \in G} \| g \|$. Понятно, что $0 \notin G - j(M, M, \ldots, M) \subset \subset Y_n$ $(j = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ (3). Положим $H = \{\zeta \in U_n : \det \zeta)^M = 1\}$. Пусть μ_H — мера Хаара группы H, а $d\lambda(\zeta) = F(\zeta)\, d\mu_H(\zeta)$. Тогда $\lambda \geqslant 0$, λ сингулярна (так как $\sigma(H) = 0$);

$$\hat{\lambda}(g;\ i,\ j) = \int\limits_{U_n} \overline{\varphi_{ij}^g(\zeta)}\, F(\zeta)\, d\mu_H(\zeta) =$$

$$= \sum_{h \in G} \sum_{k,l=1}^{N_h} a_{kl}^h \int\limits_H \varphi_{kl}^h(\zeta)\, \varphi_{ij}^g(\xi)\, d\mu_H(\zeta).$$

В силу (3), если $h \in G$ и $h^H g$, то либо $g = h$, либо $g \in Y_n$. Таким образом, для любого $g \notin Y_n$ по лемме

$$\int\limits_H \varphi_{kl}^h(\zeta)\, \overline{\varphi_{ij}^g(\zeta)}\, d\mu_H(\zeta) = \begin{cases} 1\ (h = g,\ k = i,\ l = j). \\ 0, \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

откуда получаем, что для $\forall g \in Y_n$ $\hat{\lambda}(g;\ i,\ j) = a_{ij}^g = \hat{F}(g;\ i,\ j)$. Кроме того, $\| \lambda \| = \hat{\lambda}(0) = \hat{F}(0) = \| F \|_1$.

Пусть теперь F — произвольная положительная полунепрерывная снизу функция из $L^1(U_n)$. Тогда ее можно представить в виде

$$F = \sum_{j=1}^{\infty} F_j, \text{ где } F_j(\zeta) > 0 \text{ — непрерывные функции.}$$

По теореме Петера — Вейля каждая F_j может быть равномерно аппроксимирована снизу конечными линейными комбинациями функций $\varphi_{ij}^g(\zeta)$, так что $F_j = \sum\limits_{i=1}^{\infty} F_{ij}$, где $F_{ij}(\zeta) = \sum\limits_{g \in G_{ij}} \sum\limits_{k,l=1}^{N_g} a_{kl}^{ijg} \times \times \varphi_{kl}^g(\zeta) > 0$, а G_{ij} — конечные множества сигнатур. С каждой $F_{ij}(\zeta)$ свяжем сингулярную меру $\lambda_{ij} \geqslant 0$, построенную выше. Так как

$$\| \lambda_{ij} \| = \| F_{ij} \|_1, \text{ а } \sum_{i,j} \| F_{ij} \|_1 = \sum_{i,j} \int\limits_{U_n} F_{ij}\, d\sigma = \int\limits_{U_n} F d\sigma < \infty,$$

то ряд $\sum\limits_{i,j} \lambda_{ij}$ сходится по вариации к некоторой сингулярной мере $\lambda \geqslant 0$ такой, что для $\forall g \notin Y_n$, $1 \leqslant k, l \leqslant N_g$

$$\hat{\lambda}(g;\ k,\ l) = \sum_{i,j} \hat{\lambda}_{ij}(g;\ k,\ l) = \sum_{i,j} \hat{F}_{ij}(g;\ k,\ l) = \hat{F}(g;\ k,\ l).$$

Следствие 1. *Любая полунепрерывная снизу положительная суммируемая на U_n функция является почти всюду граничным значением — в смысле допустимой сходимости — некоторой плюригармонической в D_n функции.* Доказательство немедленно следует из теоремы 4 и утверждения 4, сформулированного в предварительных сведениях.

Следствие 2. *Пусть $\psi(\zeta)$ — положительная ограниченная полунепрерывная снизу функция на U_n. Тогда почти всюду на U_n она является граничным значением — в смысле допустимой сходимости — функции $|G(z)|$ для некоторой $G \in H^\infty(D_n)$.*

Доказательство. Так как $\psi(\xi)$ достигает на U_n минимума, то можем считать, что $\psi(\xi) > 1$. По теореме 4, примененной к функции $F(\xi) = \log \psi(\xi)$, существует сингулярная мера $\lambda \geqslant 0$ и функция $K(z) \in H(D_n)$ такие, что $\operatorname{Re} K = P[\log \psi - d\lambda]$. Положим $G(z) = e^{K(z)}$. Тогда $\log|G| \leqslant P[\log \psi]$ и в силу ограниченности функции $\psi G \in H^\infty(D_n)$. Следовательно, $\log|G| = \operatorname{Re} K$ имеет допустимый предел почти всюду на U_n, равный $\log \psi$.

Список литературы: 1. *Рудин У.* Теория функций в поликруге.— М.: Мир, 1974.— 160 с. 2. *Александров А. Б.* Существование внутренних функций в шаре.— Мат. сб., 1982, **118**, № 2, с. 147—163. 3. *Хуа Ло-кен.* Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях.— М.: Иностр. лит., 1959.—163 с. 4. *Владимиров В. С.* Голоморфные функции с положительной мнимой частью в трубе будущего, IV.— Мат. сб., 1977, **104**, № 3, с. 341—370. 5. *Koranyi A.* The Poisson integral for genereIised half-planes and bounded symmetric domains.— Ann. Math., 1965, vol. 82 № 2, p. 332—350. 6. *Stein E. M., Weiss N. I.* Convergence of Poisson integrals for bounded symmetric domains.— Proc. Nat. Acad. of Science, 1968, vol. 60, p. 1160—1162.

Поступила в редколлегию 04.06.83.