

УДК 517.954;621.372.85

О СХОДИМОСТИ МОДОВЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СФЕРИЧЕСКИМ ГАРМОНИКАМ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

Б. А. Кочетов, А. Ю. Бутрым

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина

E-mail: bkochetov@bk.ru

Поступила в редакцию 28 октября 2009 г.

В статье на примере простой задачи, допускающей аналитическое решение, показана сходимость к точному решению модовых разложений по сферическим гармоникам во временной области. В качестве тестовой задачи рассматривалась задача об излучении кольца с нестационарным током. Установлено, что для каждой частоты на каждой сферической поверхности фиксированного радиуса из всего счетного множества сферических мод, лишь конечное число главных мод являются распространяющимися. Из этого следует, что для того чтобы в рамках модового базиса в сферической системе координат описать излучение нестационарного источника, расположенного внутри сферы заданного радиуса, потребуется конечное число главных мод.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: метод модового базиса, нестационарные поля, сферические моды, кольцевой ток.

У статті на прикладі простої задачі, що допускає аналітичний розв'язок, показано збіжність до точного розв'язку модових розкладень по сферичним гармонікам у часовій області. В якості тестової задачі розглядалася задача про випромінювання кільця з нестационарним струмом. Встановлено, що для кожної частоти на кожній сферичній поверхні фіксованого радіуса з усієї нескінченної множини сферичних мод, лише скінченне число головних мод є модами, які розповсюджуються. З цього випливає, що для того щоб в рамках модового базису в сферичній системі координат описати випромінювання нестационарного джерела, яке розташовано всередині сфери заданого радіуса, потрібно кінчене число головних мод.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: метод модового базису, нестационарні поля, сферичні моди, кільцевий струм.

The convergence of spherical mode expansions in the time domain to the exact solution is shown on an example of a test problem that has a closed-form solution. Radiation of a ring with transient current in free space is considered. It was shown that there exist only a finite number of propagating modes for any frequency at any given radius of a circumventing spherical surface. Thus within the framework of mode basis method in spherical coordinate system a finite number of main modes is sufficient to describe radiation of a transient sources located within a sphere of some given radius.

KEYWORDS: mode basis method, transient field, spherical modes, ring current.

В связи с тем, что в последнее время большой интерес вызывает применение сверхширокополосных сигналов, стали активно развиваться методы, позволяющие проводить анализ электромагнитных явлений во временной области, без перехода к комплексным амплитудам для частотных компонент. Одним из таких подходов является метод, основанный на представлении полей в виде модовых разложений во временной области. Впервые этот метод был предложен в цилиндрической системе координат для анализа нестационарных полей в многосвязных полых волноводах с идеально проводящими стенками [1]. Позднее этот метод в различных вариантах (метод модового базиса, метод собственных функций) был развит для исследования нестационарных электромагнитных явлений в резонаторах и волноводах с неоднородным и нестационарным заполнением и широко используется в последнее время [2-9]. В работах [10-13] получил развитие аналогичный метод в сферической системе координат для анализа нестационарных электромагнитных сигналов в свободном пространстве, различных магнитоэлектрических средах и многосвязных конических линиях передачи. При этом поля представляются в виде бесконечного ряда сферических гармоник с зависящими от времени и радиальной координаты коэффициентами. В статье на примере излучения нестационарного кольцевого тока в вакууме показывается сходимость к точному решению таких рядов [12-13] и устанавливается, что для описания излучения нестационарного источника, расположенного внутри сферы заданного радиуса, в рамках метода модового базиса достаточно учитывать конечное число главных мод.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В свободном пространстве имеется кольцо радиуса R , расположенное в плоскости $z = 0$ таким образом, что центр кольца совпадает с началом системы координат (рис. 1). По кольцу течет нестационарный ток следующего вида:

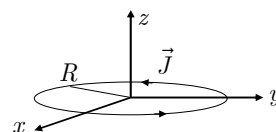


Рис. 1. Кольцо с нестационарным током.

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{\varphi}_0 \delta(r - R) \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) f(t) \quad (1)$$

где $\vec{\varphi}_0$ – орт, $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака, $f(t)$ – произвольная функция времени.

РЕШЕНИЕ В ВИДЕ ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Электрическое поле, создаваемое током (1), может быть рассчитано по следующей формуле:

$$\vec{E}(r, \theta, t) = \vec{\varphi}_0 \frac{\mu_0}{4\pi} cR^2 \int_0^{2\pi} \frac{f'(t - c^{-1}\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR\sin(\theta)\cos(\xi)})}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR\sin(\theta)\cos(\xi)}} \cos(\xi) d\xi \quad (2)$$

Штрих в этой формуле означает дифференцирование по t , μ_0 – магнитная постоянная, c – скорость света.

РЕШЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА МОДОВОГО БАЗИСА

Согласно общей теории метода модового базиса (ММБ) [12-13], решение рассматриваемой задачи может быть представлено в следующем виде:

$$\vec{E}(r, \theta, t) = \frac{\vec{\varphi}_0}{\varepsilon_0^{1/2} r \sin(\theta)} \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\frac{m(m+1)}{2m+1}} e_m^H(r, t) [P_{m-1}(\cos(\theta)) - P_{m+1}(\cos(\theta))] \quad (3)$$

где ε_0 – электрическая постоянная, $P_m(\cdot)$ – полиномы Лежандра. Функции $e_m^H(r, t)$, описывающие эволюцию поля во времени, называются модовыми амплитудами. Каждая из этих модовых амплитуд в рассматриваемом случае удовлетворяет следующему линейному дифференциальному уравнению:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 e_m^H}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 e_m^H}{\partial r^2} + \frac{m(m+1)}{r^2} e_m^H(r, t) = \frac{\sqrt{\mu_0}}{2c} \sqrt{\frac{m(m+1)}{2m+1}} [P_{m+1}(0) - P_{m-1}(0)] r \delta(r - R) \frac{df(t)}{dt} \quad (4)$$

Это уравнение мы будем решать численно с помощью метода конечных разностей [14]. Для этого от непрерывной функции двух переменных $u(r, t)$ переходим к ее дискретному аналогу (сеточной функции), заданной на равномерной дискретной сетке: $u(r, t) \rightarrow u|_i^j = u(i\Delta r, j\Delta t)$; $i, j \in \mathbb{N}$; Δr и Δt – шаг по радиальной координате и времени, соответственно. На этой сетке производные определяются с помощью центральных конечных разностей второго порядка точности:

$$\partial_{tt} u|_i^j \approx (u|_i^{j+1} - 2u|_i^j + u|_i^{j-1}) \Delta t^{-2}; \quad \partial_{rr} u|_i^j \approx (u|_{i+1}^j - 2u|_i^j + u|_{i-1}^j) \Delta r^{-2}. \quad (5)$$

Дискретизируя уравнение (4) таким образом, получаем следующее явную конечно-разностную схему:

$$e_m^H|_i^{j+1} = A_1|_i e_m^H|_i^j + A_2(e_m^H|_{i+1}^j + e_m^H|_{i-1}^j) - e_m^H|_i^{j-1} + (c\Delta t)^2 F(i\Delta r, j\Delta t) \quad (6)$$

где $A_1|_i = \left\{ 2 - (c\Delta t / \Delta r)^2 (2 + m(m+1) / i^2) \right\}$, $A_2 = (c\Delta t / \Delta r)^2$, $F(r, t)$ – правая часть уравнения (4).

Это уравнение позволяет по заданным в текущий j и предыдущий $j-1$ моменты времени для всех координат i значениям функции найти значение функции для всех координат в следующий момент времени $j+1$. Все модовые амплитуды вычисляются параллельно по этой конечно-разностной схеме.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Прежде всего, отметим, что несмотря на наличие в (3) множителя, стремящегося к бесконечности как \sqrt{m} при $m \rightarrow \infty$, ряд сходится ввиду того, что все модовые амплитуды экспоненциально стремятся к нулю при $m \rightarrow \infty$. В самом деле, если в однородном уравнении (4) предположить, что модовые амплитуды зависят по гармоническому закону $\sim \exp(i(kr - \omega t))$, тогда из уравнения (4) для каждой модовой амплитуды с номером m получим следующее дисперсионное соотношение:

$$k^2 = \omega^2 / c^2 - m(m+1) / r^2 \quad (7)$$

Из анализа уравнения (7) следует, что для любой частоты ω на каждой сферической поверхности конечного радиуса $r < +\infty$, существует только конечное число распространяющихся мод. Другими словами, для любого ω и фиксированного r всегда найдется такой номер M , что все моды с номерами $m \geq M$ будут нераспространяющимися (k будет мнимым числом). Проведенные рассуждения остаются справедливыми и во временной области, где под ω следует понимать наивысшую частоту в спектре сигнала. Покажем, что ряд (3) действительно сходится к точному решению (2) и выясним, как спектр возбуждающего сигнала влияет на количество мод, которые необходимо учесть. В численных расчетах возьмем радиус кольца единичным $R = 1$. В качестве временной функции используется лягеровский импульс:

$$f(t) = (t/T)^2 (1 - t/3T) \exp(-t/T) \quad (8)$$

Временной параметр, T входящий в (8), будем выражать в единицах радиуса R/c . На рис. 2 представлены спектры временной функции для двух значений параметра T и частоты отсечки первых 10 ненулевых мод. Током (1) возбуждаются только нечетные моды, ввиду того, что правая часть уравнения (4) для всех четных номеров m равна нулю. Таким образом, первой моде соответствует номер $m = 1$, второй – $m = 3$ и т.д. Критические частоты рассчитывались по формуле (7) на сфере радиуса $r = R + 12Tc$ ($12Tc$ – пространственная длительность лягеровского импульса).

С помощью ММБ по формуле (3) рассчитывается поле, излучаемое кольцом с током. Результаты сравниваются с точным решением (2). На рис. 3 представлена зависимость от времени напряженности электрического поля, рассчитанная в фиксированной точке ($r_0 = 2R, \theta_0 = \pi/2, \varphi$) с помощью ММБ (сплошная линия) и на основе аналитического решения (точки). В формуле (3) суммировались первые 10 нечетных гармоник (четные гармоники не возбуждаются в силу симметрии выбранного возбуждения).

На рис. 3. видно хорошее совпадение результатов расчетов разными методами. Процесс сходимости для сигналов с разной длительностью (шириной спектра) продемонстрирован на рис. 4-5. Рис. 4 показывает разницу между решениями, которые получены в одно-, трех- и десятимодовом приближениях для двух значений временного параметра T . Видно, что для более узкополосного сигнала ($T = R/c$), уже трехмодовое приближение достаточно хорошо совпадает с точным решением. Для сигнала с более широкой полосой частот ($T = R/4c$) трехмодового приближения явно недостаточно для получения решения с требуемой точностью, так как в его спектре содержатся частоты, на которых неучтенные моды ($m > 3$) вне сферы данного радиуса являются распространяющимися. Детальнее процесс сходимости показан на рис. 5, где изображена взятая по модулю разность (в логарифмическом масштабе) между решениями, полученными в приближениях с разным количеством учитываемых мод. Из рис. 5 а следует, что при расчете поля, которое создает источник с временным параметром $T = R/c$, пренебрежение всеми ненулевыми модами, начиная с шестой, дает относительную погрешность в вычислениях меньшую 2%. При расчете же поля, которое возбуждается источником с временным параметром $T = R/4c$, пятимодовое приближение дает неприемлемую ошибку в вычислениях (рис. 5 б). В этом случае для получения решения с требуемой точностью требуется учесть не меньше чем восемь-девять первых ненулевых мод.

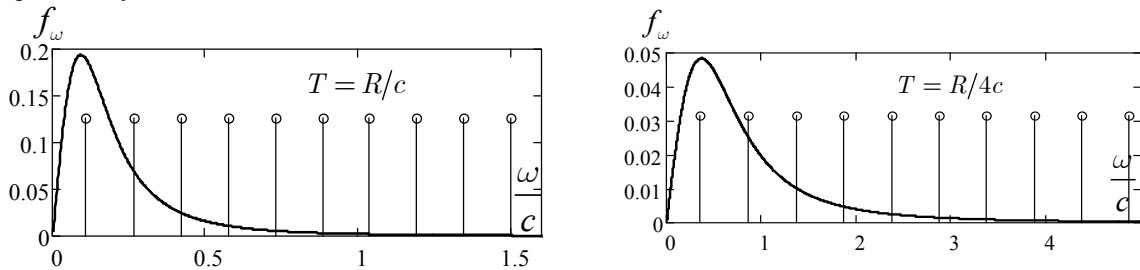


Рис. 2. Спектр лягеровского импульса разной длительности и критические частоты.

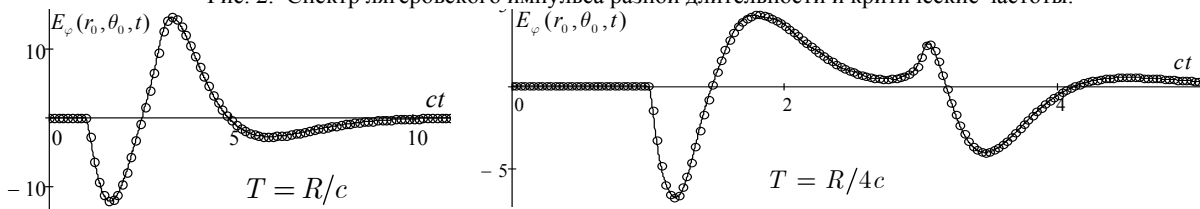


Рис. 3. Зависимость от времени напряженности электрического поля в точке $(2R, \pi/2, \varphi)$, рассчитанная с помощью ММБ в котором учитывались первые 10 ненулевых мод (сплошная линия) и на основе аналитической формулы (точки), вычисленная для двух значений временного параметра T .

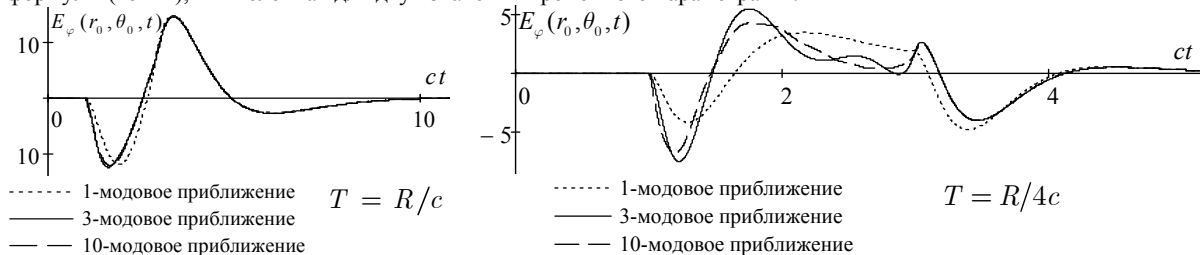


Рис. 4. Зависимость от времени напряженности электрического поля в точке $(2R, \pi/2, \varphi)$, рассчитанная с помощью ММБ в одно-, трех- и десятимодовом приближениях, вычисленная для двух значений временного параметра T .

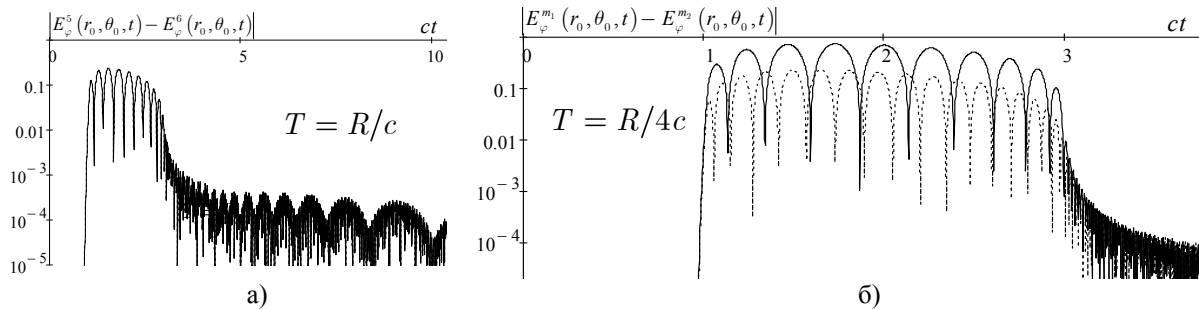


Рис. 5. Зависимость (в логарифмической шкале) от времени разницы взятой по модулю между решениями вычисленные в точке $(2R, \pi/2, \varphi)$, которые получены в приближениях с разным числом учитываемых мод, для двух значений временного параметра T :

а) разница между пяти- и шестимодовым приближениями; б) разница между пяти- и шестимодовым приближениями (сплошная линия), и между девяти- и десятимодовым приближениями (пунктирная линия).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Совпадение решения тестовой задачи, которое было получено в рамках ММБ в сферической системе координат с точным аналитическим решением в виде запаздывающих потенциалов, подтверждает правильность построенного вычислительного метода. Установлено, что из всего счетного множества мод, по которым производится разложение электромагнитного поля, существенный вклад в решение дает только конечное число главных мод, которые являются распространяющимися на сфере, описанной вокруг источников. Высшие моды, которые не являются распространяющимися в окрестности источника, вносят пренебрежимо малый вклад в решение. Число основных мод, подлежащих обязательному учету, зависит от максимальной частоты в спектре сигнала, радиуса сферы, внутри которой расположены источники, а также от расстояния, на котором вычисляются поля. Другими словами, для каждой частоты на сфере заданного радиуса всегда возбуждается лишь конечное число распространяющихся сферических модовых амплитуд. С увеличением радиуса сферической поверхности при фиксированном значении частоты, число распространяющихся мод увеличивается, что позволяет рассматривать свободное пространство как волновод с частотой отсечки, которая уменьшается от сечения к сечению с увеличением радиуса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кисунько Г. В. Электродинамика полых систем. Л.: Издание ВКАС, 1949. — 426 С.
2. Третьяков О. А. Метод модового базиса // РиЭ. — 1986. — т. 31, № 6, — с. 1071-1082.
3. Третьяков О. А. Эволюционные волноводные уравнения // РиЭ. — 1989. — т. 34, №5, — с. 917-926.
4. Aksoy S. and O. A. Tretyakov The evolution equations in study of the cavity oscillations excited by a digital signal // IEEE Trans. Antennas Propagation. — 2004. Vol. 52, No. 1, — p. 263-270.
5. W. Geyi Time-domain theory of waveguide // Progress in Electromagnetics Research, PIER. — 2006. — Vol. 59, p. 267-297.
6. O. A. Tretyakov and F. Erden Temporal cavity oscillations caused by a wide-band waveform // Progress In Electromagnetics Research B. — 2008. Vol. 6, p. 183-204.
7. W. Geyi Time-domain theory of metal cavity resonator// Progress In Electromagnetics Research, PIER. — 2008. Vol. 78, — p. 219-253.
8. M. S. Antyufeyeva, A. Yu. Butrym, O. A. Tretyakov Transient electromagnetic fields in cavity with dispersive double negative medium // Progress In Electromagnetics Research, PIER M. 2009. — Vol. 8, — p. 51-65.
9. А. Ю. Бутрым, Б. А. Кочетов Метод модового базиса во временной области для волновода с поперечно неоднородным многосвязным сечением 1. общая теория метода // Радиофизика и радиоастрономия. — 2009. — т. 14, № 2, с. 162-173.
10. A. Shlivinski and E. Heyman Time-domain near-field analysis of short-pulse antennas — Part I: Spherical wave (multipole) expansion // IEEE Trans. Antennas and Propagation. — 1999. — Vol. 47, No. 2, p. 271-279.
11. Tretyakov O., Dumin A., Dumina O., Katrich V. Modal basis method in radiation problems // Proc. Int. Conf. on Math. Methods in Electromagnetic Theory, Ukraine (Dnepropetrovsk). — 2004. — p. 312 - 314.
12. Butrym A. Yu., Kochetov B. A. Mode basis method for spherical TEM-transmission lines and antennas // Proc. Int. Conf. on Antenna Theory and Techniques, Ukraine (Sevastopol). — 2007. — p. 243 - 245.
13. A. Yu. Butrym, B. A. Kochetov Mode expansion in time domain for conical lines with angular medium inhomogeneity // Progress In Electromagnetics Research, PIER B. 2010. — Vol. 19, — p. 151-176.
14. Taflov A., Hagness S. C. Computational Electromagnetics: The Finite-Difference Time-Domain Method. — 2nd edition. — Norwood (MA, USA): Artech House, 2000. — 852 p.