УДК 517.335.6.

М. А. РЫЖКОВ

О ТОЧНОСТИ ОЦЕНКИ ВЕЛИЧИНЫ ОТКЛОНЕНИЯ ДЛЯ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ

Известна следующая оценка сверху для величины отклонения мероморфной функции $f(z)$ конечного нижнего порядка λ от данного комплексного числа a, введенной В. П. Петренко [2], $\beta(a, f) \leqslant B(\lambda, \Delta)$ **(1)** для любого $a \in \overline{C}$ и любого $0 < \Delta \leqslant 1$, где $\Delta = \Delta(a)$ дефект в смысле Ж. Валирона, а

$$B(\lambda, \Delta) = \begin{cases} \pi\lambda\sqrt{\Delta(2-\Delta)}, \text{ если } \lambda \geqslant 0,5 \\ \qquad \text{либо если } 0 < \lambda < 0,5, \text{ но} \\ \qquad \sin 0,5\pi\lambda \geqslant \sqrt{0,5\Delta}; \\ \pi\lambda\,[\Delta \operatorname{Ctg}\pi\lambda + \operatorname{tg}(\pi\lambda)/2, \text{ если} \\ \qquad 0 < \lambda < 0,5 \text{ и } \sin 0,5\pi\lambda < \sqrt{0,5\Delta}; \\ \Delta, \qquad\qquad\qquad \text{если } \lambda = 0. \end{cases}$$

Впервые оценка в таком виде получена Д. Шиа ([4], с. 24; см. также [3], с. 47, [7], с. 330). Известно, что в случае $\Delta = 1$ равенство в (1) справедливо для функции Миттаг-Леффлера порядка $\rho = \lambda$. В случае, когда рассматривается класс функций с фиксированным порядком ρ и нижним порядком λ, оценка (1) также точна, это показано в [5]. В. П. Петренко высказал предположение, что оценка (1) является точной и для других значений $\Delta(a, f)$ [3, с. 53]. Здесь мы докажем это предположение. Имеет место

Теорема. *Пусть* Δ, λ — *произвольные действительные числа, такие что* $0 < \Delta \leqslant 1$ *и* $0 \leqslant \lambda < \infty$. *Существует мероморфная функция* $f(z)$ *нижнего порядка* λ, *для которой* $\beta(a, f) = B(\lambda, \Delta)$, $\Delta = \Delta(a, f)$.

Доказательство. Без потери общности можно полагать $a = \infty$.

1°. В случае $0<\lambda<1$ искомой является функция $f_{uv}(z) = f(z, u)/f(-z, v)$, $1 \geqslant u \geqslant v \geqslant 0$ $u>0$, где $f(z, u)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)$ каноническое произведение Вейерштрасса рода O с положительными нулями такими, что $n(r, 0) \sim ur^{\lambda}$, $r \to \infty$. Функция $f_{uv}(z)$ исследовалась в [1, с. 277—279], откуда следует, что для любого $0<\Delta<1$ можно подобрать u и v такие, что $\Delta(\infty, f_{uv})=\Delta$. Заметим лишь, что в случае $0<\lambda<0{,}5$ и $\sin 0{,}5\pi\lambda \geqslant \sqrt{0{,}5\Delta}$ нужно наложить дополнительное условие

$$u \geqslant v \geqslant \sqrt{u^2+\left(\frac{v-u\cos\pi\lambda}{\sin\pi\lambda}\right)^2} \cos\pi\lambda \geqslant u\cos\pi\lambda.$$

Справедливость оценки $\beta(\infty, f_{uv}) \geqslant B(\lambda, \Delta)$ проверяется прямым вычислением, откуда и из неравенства (1) следует утверждение теоремы в этом случае.

2°. В случае $\lambda=0$ нужно взять за $f(z)$ мероморфную функцию рода O с положительными нулями, отрицательными полюсами, у которой $n(r, 0, f) \sim \ln r$, $n(r, \infty, f) \sim (1-\Delta)\ln r$, $r \to \infty$.

3°. В случае $\lambda \geqslant 1$ искомой является функция

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{g(z\alpha e^{i\beta})\, g(z\alpha e^{-i\beta})}{g(z)}, \\ \qquad \text{если } \lambda \text{ — нецелое;} \\ \dfrac{g(z\alpha e^{i\beta})\, g(z\alpha e^{-i\beta})}{g(z)} \exp\{(-1)^p \beta \operatorname{tg} p\beta \cdot z^p\}, \\ \qquad \text{если } \lambda = p \text{ — целое,}\end{cases}$$

где $g(z)=\prod_{n=1}^{\infty} E\left(-\frac{z}{n^{1/\lambda}}, p\right)$, $E(t, p)$ — первичный множитель Вейерштрасса рода p, $0<\beta<\pi/(2\lambda)$, $\alpha=(2\cos\beta\lambda)^{-1/\lambda}$. Эта функция исследовалась в [8, с. 72]. С помощью полученных в этой работе асимптотик (в случае $\lambda=p$ методом [6, с. 91] мы исправляем мелкую неточность) равенство проверяется непосредственно. При этом β определяет значение Δ.

Замечание. Легко привести пример p-мерной целой кривой $\vec{G}$, подтверждающий точность аналогичной оценки величины отклонения $\vec{G}$ от $\vec{a}$ [7], $\beta(\vec{a}, \vec{G}) \leqslant B(\lambda, \Delta)$, где $B(\lambda, \Delta)$ имеет тот же смысл, что и выше. А именно $\vec{G}(z)=(g_1, g_2, \ldots, g_{p-1}, g_p)$, где $g_n(z)=z^n$, $n=1, 2 \ldots, p-2$, а $g_{p-1}(z)/g_p(z)=F(z)$. Здесь $F(z)$ мероморфная функция, удовлетворяющая условию нашей теоремы, $\vec{a}=(0{,}0, \ldots, 0{,}1)$.

Список литературы: 1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. — М.: Наука, 1970. — 592 с. 2. *Петренко В. П.* Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка. — Изв. АН СССР, сер. мат., 1969, **33**, № 2, с. 414—454. 3. *Петренко В. П.* Рост мероморфных функций.— Харьков: Вища школа, 1978. — 136 с. 4. *Fuchs W. H. I.* Topics in Nevanlinna theory, Proceeding of the NRL conference on classical function theory, 1970, p. 1—32. 5. *Шеремета М. Н.* Асимптотическое поведение функций типа Миттаг-Леффлера и их приложения. — Изв. АН Арм. ССР, сер. мат., 1969, **4**, № 2, с. 144—148. 6. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: Физматгиз, 1956. —632 с. 7. *Петренко В. П.* О связи между величинами отклонений и дефектами в смысле Ж. Валирона для целых кривых и переменных поливекторов. — *Изв. АН СССР, сер. мат., 1976,* ***40****, № 2,* с. 326—337. 8. *A. Edrei, W. Fuchs.* Asymptotic behavior of meromorphic functions with extremal spread. I., Ann. acad. sci. fenn.. 1976, Ser. A. I. 2, p. 67—111.

Поступила в редколлегию 10.06.79.