Выпуск 10 1970

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ РЯДАМИ ДИРИХЛЕ

Р. М. Гаврилова

1°. В работе А. Ф. Леонтьева [1] дан метод представления функций, аналитических в некоторой области рядами вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n A(z, \lambda_n),$$

где $A(z, \lambda)$ — функция двух переменных, не обязательно аналитическая по переменному z, и приведен пример реализации этого метода для функций, аналитических в ограниченных областях. В. П. Громов [2] указанные результаты А. Ф. Леонтьева распространил на случай аналитических функций от двух комплексных переменных.

В работах А. Ф. Леонтьева [3, 4] дан несколько иной подход к подобным задачам, позволяющий представлять рядами Дирихле целые функции. В настоящей заметке аналогичные вопросы рассматриваются для целых функций двух переменных. Приведем некоторые обозначения и результаты работы [3].

1. 1. Пусть $z(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ целая функция порядка $\rho > 1$, удовлетворяющая дополнительному условию; имеется система окружностей $|z| = r_k$, $r_k \uparrow \infty$ таких, что при любом $\varepsilon > 0$ $\ln|z(r_k e^{i\varphi})| > r_k^{\rho-\varepsilon}$, где $k > K(\varepsilon)$. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \ldots$ различные нули $z(z)$, расположенные в порядке неубывания их модулей, а через $p_1, p_2, \ldots, p_n \ldots$ соответственно их кратности.

1. 2. Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi_k(z, \lambda) = \frac{z(\lambda)}{2\pi i} \int\limits_{|\mu|=r_k} \frac{e^{\mu z}}{(\mu-\lambda)\, z(\mu)}\, d\mu, \tag{1}$$

которая по переменной λ является целой функцией порядка не выше ρ. Пусть

$$\Phi_k(z, \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{mk}(z)\, \lambda^m \tag{2}$$

разложение функций (1) в ряд Гартогса. Тогда при любых k, m, z и λ справедливы следующие оценки:

$$|\Phi_k(z, \lambda)| < A(\varepsilon) \exp\left[a|z|^{q+\varepsilon} - r_k^{\rho-\varepsilon} + |\lambda|^{\rho+\varepsilon}\right], \tag{3}$$

$$|A_{mk}(z)| < A(\varepsilon) \left[\frac{e(\rho+\varepsilon)}{m}\right]^{\frac{m}{\rho+\varepsilon}} \exp\left[a|z|^{q+\varepsilon} - r_k^{\rho-\varepsilon}\right], \tag{4}$$

где $q = \frac{\rho}{\rho-1}$, a — некоторая абсолютная постоянная и постоянная $A(\varepsilon) >$

> 0. В частности оценка (4) имеет место для коэффициентов разложения в ряд Гартогса функции $e^{\lambda z}$.

1.3. Напомним еще формулу Ньютона:

$$f(zt) = A_0(t) + \sum_{k=1}^{m-1} A_k(t)(z-\lambda_1)\ldots(z-\lambda_k) + R_m(z,\ t),$$

где

$$A_0(t) = f(\lambda_1 t);\quad A_k(t) = \sum_{s=1}^{k+1} f(\lambda_s t) \prod_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq s}}^{k+1} (\lambda_s - \lambda_\mu)^{-1},\ k = 1,\ 2\ldots \tag{5}$$

и

$$R_m(z,\ t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \sum_{\mu=1}^{m}\left(\frac{z-\lambda_\mu}{u-\lambda_\mu}\right)\frac{f(ut)}{u-z}\,du,$$

C — окружность $|u| = \frac{|\lambda_m|}{\theta_1}$, содержащая внутри себя точку $u = z$, $0 < \theta_1 < 1$, t — параметр, $f(w)$ — целая функция порядка ρ.

Для остаточного члена справедливы оценки:

$$|R_m(z,\ t)| < \mu^{2m} \exp\left|m^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}|t|^{1+\varepsilon}\right], \tag{6}$$

$$|R_m(z,\ t)| < \mu^m \exp[\alpha|t|^{q+\varepsilon}], \tag{7}$$

где $|z| \leqslant 1$, $|t| \geqslant 1$, $m = m_k$, $k > K(\varepsilon)$, α — некоторая абсолютная постоянная, $\mu = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $q = \frac{\rho}{\rho-1}$.

2°. Везде ниже использованы обозначения 1°.

2.1. Пусть $z_1(z_1)$ и $z_2(z_2)$ — целые функции порядков $\rho_1 > 1$, $\rho_2 > 1$ соответственно, удовлетворяющие всем условиям 1.1.

Рассмотрим произвольную целую функцию двух переменных

$$F(z_1,\ z_2) = \sum_{k_1,\ k_2=0}^{\infty} b_{k_1k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2},\quad k_1!k_2!\,b_{k_1k_2} = \frac{\partial^{k_1+k_2}F(o,\ o)}{\partial z_1^{k_1}\partial z_2^{k_2}} \tag{8}$$

такую, что ее гиперповерхности сопряженных порядков S_ν [5] принадлежит хотя бы одна точка $(\nu_1,\ \nu_2)$, удовлетворяющая условиям: $\nu_m < \frac{\rho_m}{\rho_m - 1}$, $m = 1,\ 2$. Класс таких функций обозначим через σ. Так как всякая точка гиперповерхности сопряженных порядков удовлетворяет соотношению

$$\overline{\lim_{\|k\|\to\infty}} \frac{\left\|\frac{k}{\nu}\right\| \ln\|k\|}{-\ln|b_{k_1k_2}|} = 1,\quad \|k\| = k_1 + k_2,$$

то

$$|b_{k_1k_2}| \leqslant \|k\|^{\varepsilon - \left\|\frac{k}{\nu}\right\|}.$$

2.2. Следуя А. Ф. Леонтьеву, положим

$$\omega_F(\mu_1,\ \mu_2) = \sum_{k,\ l=1}^{\infty} c_{1k} c_{2l} R_{kl}(\mu_1,\ \mu_2), \tag{9}$$

$$P_{kl}(z_1,\ z_2)\, e^{\lambda_{1k}z_1 + \lambda_{2l}z_2} = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{C_{1k}\times C_{2l}} \frac{\omega_F(\mu_1,\ \mu_2)\, e^{\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2}}{z_1(\mu_1)\, z_2(\mu_2)}\, d\mu_1 d\mu_2, \tag{10}$$

$$MF \equiv \sum_{k,\, l=0}^{\infty} c_{1k} c_{2l} \frac{\partial^{k+l} F(o,\, o)}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2}},$$

где

$$R_{kl}(\mu_1,\, \mu_2) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial^{k+l-i-j} F(o,\, o)}{\partial z_1^{k-i} \partial z_2^{l-j}} \mu_1^{i-1} \mu_2^{j-1}, \qquad (11)$$

c_{mk} — коэффициенты Тейлора функции $z_m(z_m)$,

C_{mj} — замкнутый контур, внутри которого лежит нуль λ_{mj} функции $z_m(z_m)$ и нет других нулей этой функции,

$P_{kl}(z_1,\, z_2)$ — полином степени, меньшей p_{mj} по z_m.

Легко убедиться, что $\omega_F(\mu_1,\, \mu_2)$ — целая функция, если $F(z_1,\, z_2) \in \sigma$. В самом деле, учитывая (8) и очевидное неравенство $k! < k^{k(1+\varepsilon)}$, получим следующую оценку:

$$|c_{1k} c_{2l} R_{kl}(\mu_1,\, \mu_2)| < k^{kd_1} \cdot l^{ld_2} \cdot klR^{k+l},$$

$$d_j = 1 + \varepsilon - \frac{1}{\nu_j} - \frac{1}{\rho_j}, \quad j = 1,\, 2, |\mu_j| \leqslant R,$$

и следовательно, ряд (9) сходится на C^2.

2.3. Положим еще

$$\Phi_{kl}(z_1,\, z_2;\, \lambda_1,\, \lambda_2) = \Phi_{1k}(z_1,\, \lambda_1) e^{\lambda_2 z_2} + \Phi_{2l}(z_2,\, \lambda_2) e^{\lambda_1 z_1} -$$

$$- \Phi_{1k}(z_1,\, \lambda_1) \Phi_{2l}(z_2,\, \lambda_2) = \sum_{m,\, n=0}^{\infty} B_{mn}^{kl}(z_1,\, z_2) \lambda_1^m \lambda_2^n,$$

где $\Phi_{1k}(z_1,\, \lambda_1)$, $\Phi_{2l}(z_2,\, \lambda_2)$ — функции, введенные в 1.2. Используя (4) и (8), легко получить неравенство

$$\left| B_{mn}^{kl}(z_1,\, z_2) \frac{\partial^{m+n} F(o,\, o)}{\partial z_1^m \partial z_2^n} \right| < A(\varepsilon)\, m^{md_1} n^{nd_2} X_{mn}(z_1,\, z_2), \qquad (12)$$

где

$$X_{mn}(z_1,\, z_2) = [e(\rho_2 + \varepsilon)]^{\frac{n}{\rho_2+\varepsilon}} [e(\rho_1 + \varepsilon)]^{\frac{m}{\rho_1+\varepsilon}} \cdot \exp\left[a_1 |z_1|^{q_1+\varepsilon} - r_{1k}^{\rho_1-\varepsilon} + \right.$$

$$\left. + a_2 |z_2|^{q_2+\varepsilon} - r_{2l}^{\rho_2-\varepsilon}\right].$$

2.4. В дальнейшем нам понадобятся последовательности линейных агрегатов;

$$T_{kl}(z_1,\, z_2) = \sum_{i,\, j=1}^{p_{1k},\, p_{2l}} a_{kl ij} e^{\lambda_{1i} z_1 + \lambda_{2j} z_2}. \qquad (13)$$

Не ограничивая общности, будем считать далее $k = l$. Введем понятие гиперповерхности сопряженных порядков для последовательности (13): пусть R^2 — пространство действительных переменных a_1, a_2; через $B_\omega \in R^2$ обозначим множество тех точек $(a_1,\, a_2)$, для которых асимптотически выполняется неравенство

$$\ln M_{T_k} < R_1^{a_1} + R_2^{a_2}, \quad M_{T_k} = \max_{|z_1| \leqslant R_1 |z_2| \leqslant R_2} |T_k(z_1,\, z_2)|, \quad k = 1, 2 \ldots$$

Границу $\partial B_\omega = S_\omega$ назовем гиперповерхностью сопряженных порядков последовательности $\{T_k(z_1,\, z_2)\}$. Класс σ_T для последовательности (13) определим по S_ω так же, как и класс σ функций $F(z_1,\, z_2)$ по гиперповерхности S_ν в 2.1.

2.5. Наконец, введем следующие области:

$$K_{mj} = \{z_m : r_{m,\,j-1} < |z_m| < r_{m,\,j},\ j = 2, 3 \ldots\},$$

$$K_{m1} = \{z_m : |z_m| < r_{m1}\}.$$

Сформулируем основные результаты.

3°. ***Лемма 1.*** *Пусть* $\{\lambda_{1n}\}$, $0 < |\lambda_{11}| \leqslant \ldots$ и $\{\lambda_{2k}\}$, $0 < |\lambda_{21}| \leqslant \ldots$ *некоторые последовательности различных между собой комплексных чисел с показателями сходимости* $\rho_1 > 1$ и $\rho_2 > 1$. *Тогда для всякой целой функции* $F(z_1, z_2)$ *класса* σ *найдется последовательность линейных агрегатов* (13) *класса* σ_T, *которая будет сходиться к* $F(z_1, z_2)$ *на* C^2.

Лемма 2. *Для целой функции* $F(z_1, z_2)$ *класса* σ *справедливо соотношение*

$$L_{kj}(z_1, z_2) \equiv F(z_1, z_2) + \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{\substack{|\mu_1| = r_{1k} \\ |\mu_2| = r_{2j}}} \frac{\omega_F(\mu_1, \mu_2)\, e^{\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2}}{L_1(\mu_1)\, L_2(\mu_2)}\, d\mu_1 d\mu_2 =$$

$$= \sum_{m,\,n=0}^{\infty} B_{mn}^{kj} \frac{\partial^{m+n} F(0, 0)}{\partial z_1^m \partial z_2^n}. \tag{14}$$

Теорема 1. *Всякая целая функция* $F(z_1, z_2)$ *класса* σ *представима в виде функционального ряда*

$$F(z_1, z_2) = \sum_{k,\,j=1}^{\infty} f_{kj}(z_1, z_2), \tag{15}$$

где

$$f_{rs}(z_1, z_2) = \sum P_{kl}(z_1, z_2)\, e^{\lambda_{1k} z_1 + \lambda_{2l} z_2}$$

$$(\lambda_{1k}, \lambda_{2l}) \in K_{1r} \times K_{2s},$$

причем ряд (15) *сходится абсолютно и равномерно на любом компакте из* C^2. *Более того, при любом* $\varepsilon > 0$ *верна оценка*

$$\left| F(z_1, z_2) - \sum_{r,\,l=1}^{k,\,j} f_{rl}(z_1, z_2) \right| < A(\varepsilon) \exp \left\{ -r_{1k}^{\rho_1 - \varepsilon} - r_{2j}^{\rho_2 - \varepsilon} + \right.$$

$$\left. + |z_1|^{\frac{\rho_1}{\rho_1 - 1} + \varepsilon} + |z_2|^{\frac{\rho_2}{\rho_2 - 1} + \varepsilon} \right\}, \tag{15'}$$

где (z_1, z_2) — *любая конечная точка из* C^2.

Теорема 2. *Пусть функция* $L_m(z_m)$, $m = 1, 2$, *дополнительно удовлетворяет условиям:*

1) *все нули* $L_m(z_m)$ — *простые, а число нулей* $L_m(z_m)$ *в кольце* K_{mj} *не превосходит некоторого фиксированного числа* $\tilde{\partial}_m$, *одного и того же для всех* j;

2) *существует постоянная* g_m *такая, что* $\frac{r_{m,k}}{r_{m,\,k-1}} < g_m$, $k = 2, 3 \ldots$;

3) *существуют положительные остоянные* A_m и h_m, $h_m < \rho_m$, такие, что для любых λ_{mk}, λ_{ml} из кольца K_{mj} $(k \neq l)$ *имеем*

$$|\lambda_{mk} - \lambda_{ml}| > A_m \exp\left[-r_{mj}^{h_m}\right].$$

Тогда справедливо представление

$$F(z_1, z_2) = \sum_{k, n=1}^{\infty} a_{kn} e^{\lambda_{1k} z_1 + \lambda_{2n} z_2}, \quad a_{kn} = \frac{\omega_F(\lambda_{1k}, \lambda_{2n})}{L_1'(\lambda_{1k}) L_2'(\lambda_{2n})}, \tag{15''}$$

причем ряд сходится абсолютно на C^2.

Замечание. Если $\rho_1 = \rho_2 = 1$, то модифицируя теорему 2, можно получить представление функций, аналитических в некотором бицилиндре в виде ряда (15″). Размеры такого бицилиндра можно выразить либо через типы функций $L_i(z_i)$ [2], либо следующим образом: если $\overline{D}_i$ — наименьшее, выпуклое замкнутое множество, содержащее все особенности функции $\gamma_i(t_i)$, ассоциированной по Борелю с $L_i(z_i)$ $i = 1, 2$, то представление (15″) имеет место в бицилиндре $D = D_1 \times D_2$, причем ряд сходится абсолютно и внутри D равномерно.

4°. Перейдем к доказательству сформулированных выше предложений.

4. 1. Для доказательства леммы 1 применим формулу Ньютона к функции $e^{z_1 t_1 + z_2 t_2}$. Имеем

$$e^{z_1 t_1 + z_2 t_2} = \sum_{k, n=0}^{\tilde{m}-1} A_{kn}(t_1, t_2)(z_1 - \lambda_{11}) \ldots (z_1 - \lambda_{1k})(z_2 - \lambda_{21}) \ldots (z_2 - \lambda_{2n}) + \\ + E_{\tilde{m}}(z_1, z_2; t_1, t_2), \tag{15'''}$$

где

$$A_{kn} = \sum_{r, s=1}^{n+1, k+1} e^{\lambda_{1s} t_1 + \lambda_{2r} t_2} \cdot U_{1s}(\lambda_1) U_{2r}(\lambda_2),$$

$$U_{iq} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{l+1} (\lambda_{iq} - \lambda_{ij})^{-1}, \quad \begin{matrix} i = 1, \ l = k, \\ i = 2, \ l = n, \end{matrix}$$

$$E_{\tilde{m}}(z_1, z_2, t_1, t_2) = e^{z_1 t_1} \cdot R_{2\tilde{m}}(z_2 t_2) + e^{z_2 t_2} \cdot R_{1\tilde{m}}(z_1, t_1) - R_{1\tilde{m}}(z_1, t_1) \times \\ \times R_{2\tilde{m}}(z_2, t_2) \tag{16}$$

$$R_{jm}(z_j, t_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} \sum_{s=1}^{\tilde{m}} \left(\frac{z_j - \lambda_{js}}{u_j - \lambda_{js}}\right) \cdot \frac{e^{u_j t_j}}{u_j - z_j} du_j, \quad j = 1, 2.$$

Контур тот же, что и в 1. 4. В дальнейшем будем считать $|z_m| \leqslant 1, m = 1,2$. Дифференцируя (15‴) q_m раз по z_m и полагая $z_m = 0$ $(m = 1, 2)$, получим

$$\frac{1}{q_1! q_2!} t_1^{q_1} t_2^{q_2} - S_{q_1 q_2}^{\tilde{m}}(t_1, t_2) = \frac{1}{q_1! q_2!} \left. \frac{\partial^{q_1 + q_2} E_{\tilde{m}}(z_1, z_2, t_1, t_2)}{\partial z_1^{q_1} \partial z_2^{q_2}} \right|_{z_1 = z_2 = 0}, \tag{17}$$

где $S_{q_1 q_2}^{\tilde{m}}(t_1, t_2)$ — некоторая линейная комбинация функций $e^{\lambda_{1s} t_1 + \lambda_{2r} t_2}$ $(s, r = 1, \ldots, \tilde{m})$. Согласно неравенству Коши правая часть соотношения (17) не превосходит по модулю $\max\limits_{|z_1| = |z_2| = 1} |E_{\tilde{m}}(z_1, z_2, t_1, t_2)|$, следовательно,

$$\left| t_1^{q_1} t_2^{q_2} - Q_{q_1 q_2}^{\tilde{m}}(t_1, t_2) \right| \leqslant \max_{|z_1| = |z_2| = 1} \left| E_{\tilde{m}}(z_1, z_2, t_1, t_2) \right|, q_1!\, q_2!,$$

$$Q_{q_1 q_2}^{\tilde{m}}(t_1, t_2) = S_{q_1 q_2}^{\tilde{m}}(t_1, t_2)\, q_1! q_2! \tag{18}$$

Пусть неравенство $\mu^{\tilde{m}} q_1! q_2! < 1$ выполняется при $\tilde{m} = m_k, k > k_0(q_1, q_2)$. Пользуясь формулами (6), (16) и (7), (16), из (18) найдем соответственно:

$$\left| t_1^{q_1} t_2^{q_2} - Q_{q_1 q_2}^{\tilde{m}}(t_1, t_2) \right| < \varphi_2 |e^{z_1 t_1}| + \varphi_1 |e^{z_2 t_2}| + \varphi_1 \varphi_2, \tag{19}$$

$$\left| t_1^{q_1} t_2^{q_2} - Q_{q_1 q_2}^{\tilde{m}}(t_1, t_2) \right| < \psi_2(\varepsilon) |e^{z_1 t_1}| + \psi_1(\varepsilon) |e^{z_2 t_2}| + \psi_1(\varepsilon) \psi_2(\varepsilon), \tag{20}$$

где

$$\varphi_j = \mu^{\tilde{m}} e^{\tilde{m}^{\frac{1}{\rho_j}+\varepsilon} |t_j|^{1+\varepsilon}}, \quad \psi_j(\varepsilon) = e^{a_j |t_j|^{\rho_j+\varepsilon}}, \quad j = 1, 2.$$

Заметим, что правая часть неравенства (19) при $\tilde{m} \to \infty$ стремится к нулю, так как $\frac{1}{\rho_j} + \varepsilon < 1$ при достаточно малом ε. Пусть $\{r_k\}$ — неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел. На основании оценок (19) и (20) выберем из последовательности $\left\{Q_{q_1 q_2}^{\tilde{m}}(t_1, t_2)\right\}$ такой агрегат $Q_{q_1 q_2}^{k}(t_1, t_2)$, который удовлетворял бы условиям:

$$| t_1^{q_1} t_2^{q_2} - Q_{q_1 q_2}^{k}(t_1, t_2) | \equiv | \varepsilon_{q_1 q_2}^{k}(t_1, t_2) | < \frac{1}{k}, \quad |t_j| \leqslant r_k, \quad j = 1, 2, \tag{21}$$

$$t_1^{q_1} t_2^{q_2} - Q_{q_1 q_2}^{k}(t_1, t_2) | < \psi_2\left(\frac{1}{k}\right) |e^{z_1 t_1}| + \psi_1\left(\frac{1}{k}\right) |e^{z_2 t_2}| + \psi_1\left(\frac{1}{k}\right) \psi_2\left(\frac{1}{k}\right). \tag{22}$$

$$|t| \geqslant 1$$

Рассмотрим далее произвольную целую функцию

$$F(z_1, z_2) = \sum_{n,\, m=0}^{\infty} b_{nm} z_1^n z_2^m,$$

принадлежащую классу σ, и заметим, что при определенном выборе чисел N_k справедливо неравенство

$$\left| \sum_{n=0,\, m=N_k+1}^{N_k,\, \infty} b_{nm} t_1^n t_2^m + \sum_{m=0,\, n=N_k+1}^{N_k,\, \infty} b_{nm} t_1^n t_2^m + \sum_{n,\, m=N_k+1}^{\infty} b_{nm} t_1^n t_2^m \equiv \right.$$

$$\left. \equiv B_k(t_1, t_2) \right| < \frac{1}{k}, \quad |t_j| \leqslant r_k, \quad j = 1, 2.$$

Теперь $F(t_1, t_2)$ перепишем так:

$$F(t_1, t_2) = f_k(t_1, t_2) + \sum_{n,\, m=0}^{N_k} b_{nm} \varepsilon_{nm}^{k}(t_1, t_2) + B_k(t_1, t_2), \tag{23}$$

где $f_k(t_1, t_2) = \sum_{n,\, m=0}^{N_k} b_{nm} Q_{nm}^{k}(t_1, t_2)$ является конечной линейной комбинацией функций вида $\exp\{\lambda_{1s} t_1 + \lambda_{2r} t_2\}$. Так как в силу (21) и выбора чисел N_k при $|t_j| \leqslant r_k$, $j = 1, 2$, выполняются неравенства

$$|B_k(t_1, t_2)| \leqslant \frac{1}{k}, \quad \left| \sum_{n,\, m=0}^{N_k} b_{nm} \varepsilon_{nm}^{k}(t_1, t_2) \right| < \frac{1}{k} \sum_{n,\, m=0}^{\infty} |b_{nm}|,$$

то из (23) находим, что на C^2 справедливо соотношение

$$F(t_1, t_2) = \lim_{k \to \infty} f_k(t_1, t_2).$$

С другой стороны, из (23) на основании (22) находим, что асимптотически

$$|f_k(t_1, t_2)| \leqslant |F(t_1, t_2)| + \sum_{n,\, m=0}^{N_k} |b_{nm}\varepsilon_{nm}^{k}(t_1, t_2)| + |B_k(t_1, t_2)| <$$

$$< e^{|t_1|^{\nu_1+\varepsilon}+|t_2|^{\nu_2+\varepsilon}} + \left(\sum_{n,\, m=0}^{N_k} |b_{nm}|\right) e^{\alpha_1|t_1|^{q_1+\frac{1}{k}}+\alpha_2|t_2|^{q_2+\frac{1}{k}}}.$$

Отсюда заключаем, что при $|t_m| > r_0(\varepsilon)$, $k > k_0(\varepsilon)$,

$$|f_k(t_1, t_2)| < e^{|t_1|^{q_1+\varepsilon}+|t_2|^{q_2+\varepsilon}}. \tag{24}$$

Так как $f_k(t_1, t_2)$, будучи линейной комбинацией функций вида $\exp\{\lambda_{1s}t_1 + \lambda_{2r}t_2\}$, имеет на гиперповерхности сопряженных порядков хотя бы одну точку (ν_1, ν_2), такую, что $\nu_m < 1$, причем $q_m > 1$ $(m = 1, 2)$, то неравенство (24) будет иметь место и при $k < k_0(\varepsilon)$, $|t_m| > r_1(\varepsilon)$. Таким образом, можно утверждать, что неравенство (24) будет справедливо при всех k и $|t_m| > \max(r_0, r_1)$, $m = 1, 2$, откуда и следует утверждение леммы.

4.2. Доказательство леммы 2. Сначала докажем соотношение (14) для функции $F(z_1, z_2) = e^{\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2}$. В этом случае имеем

$$\omega_F(\mu_1, \mu_2) = \sum_{k,\, l=1}^{\infty} C_{1k}C_{2l} \sum_{j=1}^{l} \lambda_2^{l-j}\mu_2^{j-1} \sum_{i=1}^{k} \lambda_1^{k-i}\mu_1^{i-1} =$$

$$= \frac{L_1(\lambda_1) - L_1(\mu_1)}{\lambda_1 - \mu_1} \cdot \frac{L_2(\lambda_2) - L_2(\mu_2)}{\lambda_2 - \mu_2},$$

и следовательно, левая часть соотношения (14) примет вид

$$e^{\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2} + \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{|\mu_1|=r_{1k}} \frac{L_1(\lambda_1) - L_1(\mu_1)}{(\mu_1 - \lambda_1) L_1(\mu_1)} e^{\mu_1 z_1} d\mu_1 \int\limits_{|\mu_2|=r_{2j}} \frac{L_2(\lambda_2) - L_2(\mu_2)}{(\mu_2 - \lambda_2) L_2(\mu_2)} e^{\mu_2 z_2} d\mu_2 =$$

$$= \Phi_{k,j}(z_1, z_2, \lambda_1 \lambda_2).$$

А так как

$$\frac{\partial^{m+n} F(0, 0)}{\partial z_1^m \partial z_2^n} = \lambda_1^m \lambda_2^n,$$

то правая часть этого соотношения также равна функции

$$\Phi_{k,j}(z_1, z_2, \lambda_1, \lambda_2).$$

Чтобы проверить справедливость (14) для произвольной функции, воспользуемся леммой 1.

Полиномы (13) удовлетворяют соотношению

$$T_r(z_1, z_2) + \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\substack{|\mu_1|=r_{1k}\\ |\mu_2|=r_{2j}}} \frac{\omega_{T_r}(\mu_1, \mu_2)\, e^{\mu_1 z_1+\mu_2 z_2}}{L_1(\mu_1) \cdot L_2(\mu_2)} d\mu_1 d\mu_2 =$$

$$= \sum_{m,\, n=0}^{\infty} B_{nm}^{kj}(z_1, z_2) \frac{\partial^{m+n} T_r(0, 0)}{\partial z_1^m \partial z_2^n}.$$

Покажем, что это равенство в пределе при $r \to \infty$ приводит к соотношению (14), для чего оценим разность

$$I = \sum_{m,\,n=0}^{\infty} B_{mn}^{kj}\left[\frac{\partial^{m+n}F(0,0)}{\partial z_1^m \partial z_2^n} - \frac{\partial^{m+n}T_r(0,0)}{\partial z_1^m \partial z_2^n}\right] \leqslant \sum_{m,\,n=0}^{M-1,\,n-1} |B_{mn}^{kj}|\left|\frac{\partial^{m+n}F(0,0)}{\partial z_1^m \partial z_2^n} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial^{m+n}T_r(0,0)}{\partial z_1^m \partial z_2^n}\right| + I_F\begin{pmatrix}\infty & N-1\\ M & 0\end{pmatrix} + I_{T_r}\begin{pmatrix}\infty & N-1\\ M & 0\end{pmatrix} + I_F\begin{pmatrix}M-1 & \infty\\ 0 & N\end{pmatrix} +$$
$$+ I_{T_r}\begin{pmatrix}M-1 & \infty\\ 0 & N\end{pmatrix} + I_F\begin{pmatrix}\infty & \infty\\ M & N\end{pmatrix} + I_{T_r}\begin{pmatrix}\infty & \infty\\ M & N\end{pmatrix}, \qquad (24')$$

где

$$I_f\begin{pmatrix}\gamma & \delta\\ \alpha & \beta\end{pmatrix} = \sum_{m=\alpha,\,n=\beta}^{m=\gamma,\,n=\delta} \left|B_{mn}^{kj}\right| \left|\frac{\partial^{m+n}f(0,0)}{\partial z_1^m \partial z_2^n}\right|.$$

Используя далее соотношение (12), получаем следующее неравенство:

$$I_F\begin{pmatrix}\gamma & \delta\\ \alpha & \beta\end{pmatrix} \leqslant A(\varepsilon) \sum_{m=\alpha,\,n=\beta}^{m=\gamma,\,n=\delta} X_{mn} m^{md_1} n^{nd_2} < \frac{\varepsilon}{8}$$

при любых $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ из соотношения (24′). Аналогично оценим $I_{T_r}\begin{pmatrix}\gamma & \delta\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}$.

Первое слагаемое соотношения (24′) также не превосходит $\frac{\varepsilon}{8}$, так как в силу леммы 1 последовательность полиномов T_r сходится к $F(z_1, z_2)$ на C^2. Можно показать, что равномерно при $|\mu_1| < R$, $|\mu_2| < R$

$$\lim_{r\to\infty} \omega_{T_r}(\mu_1, \mu_2) = \omega_F(\mu_1, \mu_2),$$

откуда и следует справедливость леммы 2.

4.3. Доказательство теоремы 1. Пользуясь оценкой (12), получим

$$|L_{kj}(z_1, z_2)| < A(\varepsilon) \sum_{m,\,n=0}^{\infty} X_{mn} \cdot m^{md_1} \cdot n^{nd_2}.$$

Последний ряд сходится, следовательно,

$$|L_{kj}(z_1, z_2)| < \exp\{a_1 |z_1|^{q_1+\varepsilon} - r_{1k}^{\rho_1-\varepsilon} + a_2 |z_2|^{q_2+\varepsilon} - r_{2j}^{\rho_2-\varepsilon}\},$$

что и доказывает теорему 1.

Заметим, как и в случае одного комплексного переменного, если $MF \neq 0$, то в теореме 1 указанные оценки не допускают улучшений.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Леонтьев. К вопросу о представлении произвольных функций некоторыми общими рядами. Математические заметки, т. 1, 6, 1967, 689—698.

2. В. П. Громов. О представлении произвольных функций двух комплексных переменных двойными функциональными рядами типа рядов Дирихле. Изв. АН СССР, математика 32 (1968), 621—632.

3. А. Ф. Леонтьев. О представлении произвольных целых функций рядами Дирихле. ДАН СССР, 165, № 4, 1965, 759—762.

4. А. Ф. Леонтьев. К вопросу о представлении целых функций последовательностями линейных агрегатов. Матем. сб. 33 (75), 1953, 453—463.

5. Б. А. Фукс. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. Физматгиз, М., 1962.

Поступила 5 августа 1968 г.