УДК 519. 9: 575.1

Ю. И. Любич, д-р. физ.-мат. наук

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КВАДРАТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Настоящая заметка примыкает к статье [1] и посвящена квадратичным отображениям n-мерного вещественного пространства R^n в себя,

$$V : x'_j = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik,\,j} x_i x_k \quad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

сохраняющим гиперплоскость

$$s(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

и удовлетворяющим в этой гиперплоскости условию $V^2 = V$.

Для этого класса отображений в [1] была получена следующая квазитреугольная форма:

$$s' = s^2,$$
$$u' = su + B(u, v) + Kv,$$
$$v' = Qu,$$

где u, v — многомерные, вообще говоря*, координатные блоки, дополняющие линейную форму s до системы координат в $\boldsymbol{R}^n$; K, Q — квадратичные отображения; B — билинейное отображение, причем

$$KQu = 0, \quad B(u, Qu) = 0, \quad B(Kv, Qu) = 0, \quad B(B(u, v), Qu) = 0$$

и

$$\hat{Q}(u, Kv) = 0, \quad \hat{Q}(u, B(u, v)) = 0, \quad Q(B(u, v)) = 0;$$

где $\hat{Q}$ — поляра отображения Q.

Далее, в [1, 2] было доказано, что размерности блоков u, v инвариантны относительно способа приведения к квазитреугольному виду, что позволяет назвать пару чисел (m, δ), где $m = \dim u + 1$, $\delta = \dim v = n - m$, *типом* отображения V.

Линейная форма f называется *инвариантной* (для отображения V), если $f(Vx) = s(x) f(x)$ (т. е. $f(Vx) = f(x)$ при $s(x) = 1$). Инвариантные линейные формы образуют подпространство I_V, размерность которого не превосходит m, ибо, как нетрудно доказать (см. [1]), ивариантные линейные формы не зависят от v. Если $\dim I_V = m$, то отображение V называется *правильным*. В этом и только в этом случае $K = 0$, $B = 0$** независимо от способа приведения к квазитреугольному виду). Правильные отображения представляют особый интерес в связи с их приложениями в математической генетике. Поэтому полезно иметь работающие признаки правильности. Известные нам признаки связаны с рассмотрением пространства N_V линейных форм, исчезающих под действием V:

$$N_V \quad \{g \mid g(Vx) = 0\}.$$

Размерность этого пространства не превосходит δ, ибо, как нетрудно доказать (см. [1]), исчезающие линейные формы не зависят от s, u. Точнее, $\dim N_V = \delta - \dim(\operatorname{Lin} \operatorname{Im} Q)$.

В [1] были указаны некоторые случаи, когда из $N_V = 0$ следует правильность отображения, а именно: 1) $m \geqslant 2$, $\delta = 1$; 2) $m = 3$, $\delta = 2$; 3) $m = 3$, $\delta = 3$, и было далее сказано (с. 72), что «для остальных типов это неверно». К сожалению, последнее утверждение само неверно, что и побудило нас к дальнейшему исследованию, результаты которого излагаются ниже.

---

* Не исключено, что u или v отсутствуют. При отсутствии u будет $v' = 0$, при отсутствии v $u' = su$.

** Или отсутствует u.

Теорема 1. *Если*

$$\dim N_V < \delta - \frac{(m-1)(m-2)}{2} \tag{1}$$

или $\delta = 1$, $\dim N_V = 0$, *или, наконец*, $\delta = 0$, *то отображение* V *правильно.*

Доказательство. Пусть выполнено неравенство (1). Покажем, что подпространство

$$\operatorname{Ker} \hat{Q} = \{ w \mid \forall u : \hat{Q}(u, w) = 0 \}$$

равно нулю.

Пусть $e_1 \in \operatorname{Ker} \hat{Q}$, $e_1 \neq 0$. Дополним e_1 в u-подпространстве до базиса $e_1, \ldots, e_{m-1}$. В этом базисе Q не зависит от первой координаты. Тем самым,

$$\dim (\operatorname{Lin} \operatorname{Im} Q) \leqslant \frac{(m-1)(m-2)}{2}, \tag{2}$$

а с другой стороны, эта размерность равна $\delta - \dim N_V$. Следовательно, вопреки (1),

$$\dim N_V \geqslant \delta - \frac{1}{2}(m-1)(m-2).$$

Итак, $\operatorname{Ker} \hat{Q} = 0$. Но $\operatorname{Im} K \subset \operatorname{Ker} \hat{Q}$. Поэтому $K = 0$. Остается показать, что $B = 0$.

Запишем B в виде

$$B(u, v) = \sum_{i=1}^{\delta} v_i B_i u,$$

где B_i — линейные операторы. Так как $\hat{Q}(u, B(u, v)) = 0$, то

$$\hat{Q}(u, B_i u) = 0 \quad (i = 1, \ldots, \delta) \tag{3}$$

и, так как $Q(B(u, v)) = 0$, то

$$\hat{Q}(B_i u, B_k u) = 0 \quad i, k = 1, \ldots, \delta). \tag{4}$$

Введем в u-подпространстве евклидову метрику с тем, чтобы иметь представление $\hat{Q}(u, w) = (Su, w)$, где S — система из δ самосопряженных операторов. Тогда (3) и (4) запишутся в виде

$$(B_i^* S u, u) = 0, \quad (B_k^* S B_i u, u) = 0$$

и, так как пространство вещественно, а $S^* = S$, то

$$B_i^* S + S B_i = 0, \quad B_k^* S B_i + B_i^* S B_k = 0.$$

Отсюда следует

$$B_i^* S B_k + S B_i B_k = 0, \quad B_k^* S B_i + S B_k B_i = 0$$

и

$$S\,(B_iB_k + B_kB_i) = 0,$$

т. е.

$$\operatorname{Im}(B_iB_k + B_kB_i) \subset \operatorname{Ker} S.$$

Но $\operatorname{Ker} S = \operatorname{Ker} \hat{Q} = 0$. Поэтому $B_iB_k + B_kB_i = 0$.
В частности,

$$B_i^2 = 0 \quad (i = 1, \ldots, \delta). \tag{5}$$

Если $B \neq 0$, то, например, $B_1 \neq 0$, но, согласно (5), $B_1^2 = 0$. Рассмотрим жорданов базис $e_1, \ldots, e_{m-1}$ оператора B_1. Будем считать его ортонормированным в выбранной метрике. Тогда

$$B_1e_1 = 0, \ B_1e_2 = e_1, \ (B_1e_k, \ e_1) = 0 \quad (k > 2).$$

Пусть X — самосопряженный оператор, удовлетворяющий уравнению

$$B_1^*X + XB_1 = 0. \tag{6}$$

Тогда

$$Xe_1 = XB_1e_2 = -B_1^*Xe_2,$$

откуда

$$(Xe_1, \ e_1) = -(Xe_2, \ B_1e_1) = 0$$

и

$$(Xe_1, \ e_2) = -(Xe_2, \ B_1e_2) = -(Xe_2, \ e_1) = -(Xe_1, \ e_2),$$

т. е. $(Xe_1, \ e_2) = 0$. Далее, при $k > 2$

$$(Xe_1, \ e_k) = -(Xe_2, \ B_1e_k) = -\sum_{i=2}^{m-1} (Xe_2, \ e_i)\,(e_i, \ B_1e_k).$$

Таким образом, действие оператора X определяется матричными элементами $(Xe_j, \ e_i)$ $(j, \ i \geqslant 2)$. Следовательно, размерность пространства самосопряженных решений уравнения (6) не превосходит $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$. С другой стороны, этому уравнению удовлетворяют все операторы системы S, порождающие квадратичные отображения Q. Мы снова приходим к неравенству (2), противоречащему (1). Поэтому $B = 0$.

Рассмотрим теперь случай $\delta = 1$, $\dim N_V = 0$. Если при этом $m \leqslant 2$, то выполняется неравенство (1), т. е. мы имеем предыдущий случай. Пусть $m > 2$. Тогда

$$s' = s^2, \ u' = su + vBu + kv^2, \ v' = q\,(u),$$

где q — квадратичная форма, отличная от нуля в силу условия $N_V = 0$; k — вектор; B — линейный оператор. Так как $KQ = 0$, то $kq\,(u) = 0$, следовательно, $k = 0$. Так как $B\,(u, \ Qu) = 0$, то $q\,(u)\,Bu = 0$, следовательно, $B = 0$.
Отображение оказывается правильным.

Случай $\delta = 0$ вполне тривиален.

Следствие 1. *Если*

$$\delta > \frac{1}{2}(m-1)(m-2) \tag{7}$$

или $\delta = 1$, *или* $\delta = 0$, *то условие* $N_V = 0$ *влечет правильность отображения* V.

Следствие 2. *Во всех размерностях* $n \leqslant 5$ *условие* $N_V = 0$ *влечет правильность отображения* V.

Действительно, если $\delta \geqslant 2$, то $m \leqslant 3$ и

$$\frac{1}{2}(m-1)(m-2) \leqslant 1 < \delta.$$

Замечание. Если вместо (7) выполнено более сильное неравенство

$$\delta > \frac{1}{2} m(m-1), \tag{8}$$

то $N_V \neq 0$, ибо всегда

$$\dim(\mathrm{Lin\ Im}\, Q) \leqslant \frac{1}{2} m(m-1).$$

Поэтому в случае (8) следствие 1 бессодержательно, хотя и верно. Однако при

$$\delta \leqslant \frac{1}{2} m(m-1)$$

оно уже содержательно, как показывает пример

$$s' = s^2, \quad u_i' = su_i \ (1 \leqslant i \leqslant m-1), \quad v_{jk} = u_j u_k,$$

где $j < k$ и число различных пар (j, k) равно δ.

Теорема 1 неулучшаема в терминах размерностей m, δ, $\dim N_V$, ибо справедлива

Теорема 2. *Если целые числа* m, δ, d $(m \geqslant 1,\ \delta \geqslant 2,\ 0 \leqslant d \leqslant \delta - 2)$ *удовлетворяют неравенству*

$$d \geqslant \delta - \frac{1}{2}(m-1)(m-2), \tag{9}$$

то существует неправильный оператор V *типа* (m, δ), *для которого* $\dim N_V = d$.

Для доказательства нам понадобится

Лемма. *Пусть*

$$2 \leqslant k \leqslant \frac{1}{2} p(p+1). \tag{10}$$

Тогда в $\boldsymbol{R}^p$ *существует* k *линейно независимых квадратичных форм* $q_i(w)$ *и* k *линейных форм* $\varphi_i(w)$ *таких, что*

$$\sum_{i=1}^{k} q_i(w)\varphi_i(w) = 0.$$

Доказательство — индукция по k. В $\boldsymbol{R}^2$ берем любые линейно независимые формы φ_1, φ_2 и полагаем $q_1 = -\varphi_2\psi$, $q_2 = \varphi_1\psi$, где $\psi \neq 0$ — любая линейная форма.

Пусть для некоторого $k < \frac{1}{2} p(p+1)$ уже есть требуемые системы форм

$$q_1, \ldots, q_k;$$
$$\varphi_1, \ldots, \varphi_k.$$

Возьмем любую квадратичную форму q, не принадлежащую линейной оболочке форм $q_1, \ldots, q_k$, что возможно благодаря неравенству $k < \frac{1}{2} p(p+1)$. Системы $k+1$ форм

$$q_1, \ldots, q_{k-1}, \frac{1}{2} q_k - q, \frac{1}{2} q_k + q;$$

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}, \varphi_k, \varphi_k$$

удовлетворяют всем требуемым условиям.

Теперь можно указать конструкцию отображения, требуемого в теореме 2. Выберем в $(m+\delta)$-мерном пространстве систему координат

$$s, u_1, \ldots, u_{m-1}, v_1, \ldots, v_{\delta-d}, v_{\delta-d+1}, \ldots, v_\delta.$$

Так как

$$2 \leqslant \delta - d \leqslant \frac{1}{2}(m-1)(m-2),$$

то существуют, согласно лемме, $\delta - d$ линейно независимых квадратичных форм $q_i(u_2, \ldots, u_{m-1})$ и столько же линейных форм $\varphi_i(u_2, \ldots, u_{m-1})$, связанных тождеством

$$\sum_{i=1}^{\delta-d} q_i(u)\varphi_i(u) = 0. \tag{11}$$

Отображение V, заданное формулами

$$\begin{aligned} s' &= s^2, \\ u_1' &= su_1 + \sum_{i=1}^{\delta-d} v_i \varphi_i(u), \\ u_i' &= su_i \quad (i = 2, \ldots, m-1), \\ v_i' &= q_i(u) \quad (i = 1, \ldots, \delta - d), \\ v_i' &= 0 \quad (i = \delta - d + 1, \ldots, \delta), \end{aligned} \tag{12}$$

сохраняет гиперплоскость $s(x) = 1$, удовлетворяет условию $V^2 = V$ при $s = 1$ (благодаря (11)), имеет, очевидно, тип (m, δ), $\dim N_V = d$ (благодаря линейной независимости форм $q_i(u)$) и, очевидно, V неправильно.

Следствие 3. *Если*

$$2 \leqslant \delta \leqslant \frac{1}{2}(m-1)(m-2),$$

то существует неправильный оператор V, для которого $\dim N_V = 0$.

Этот результат исчерпывающе дополняет следствие 1.

Следствие 4. *В размерности $n = 6$ существует неправильный оператор, V, для которого $N_V = 0$.*

Этот оператор имеет тип (4,2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Любич Ю. И. Основные понятия и теоремы эволюционной генетики свободных популяций. — «Успехи мат. наук», 1971, т. XXVI, вып. 5, с. 52—116.

2. Любич Ю. И. Письмо в редакцию. — «Успехи мат. наук», 1971, т. XXVI, вып. 6, с. 2—265.

Поступила 24 ноября 1972 г.