ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXV 1957

О СВЯЗЯХ НАИБОЛЬШЕЙ ЖЕСТКОСТИ

М. Д. Дольберг

Харьков

Наложением на упругую вибрирующую систему дополнительных связей стараются обычно максимально увеличить частоту основного тона системы.

Очевидно, при прочих равных условиях наиболее эффективными, в указанном смысле, являются абсолютно жесткие связи, однако, насколько нам известно, до сих пор в задачах о колебаниях не ставился вопрос о разыскании общих условий, которым должны удовлетворять связи (количество их задано), максимально повышающие основной тон колебания системы.

Аналогичная проблема, хотя и в более частной форме, была поставлена И. Г. Бубновым в задаче об устойчивости сжатых стержней [1]. И. Г. Бубнов показал, что при некоторых условиях балка, лежащая на упругих опорах, будет равноустойчива с балкой, лежащей на абсолютно жестких опорах. Ввиду сходства задач о колебаниях и устойчивости удалось применить метод, предложенный нами для решения обобщенной задачи Бубнова [2], к решению задачи о колебании упругой системы.

В предлагаемой работе будут приведены необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять связи (число их задано), максимально повышающие основной тон колебания системы.

Дополнительно будет решена задача об оптимальном опирании балки.

§ 1. Будем предполагать, что у заданной упругой системы существует функция влияния $K(x, s)$, являющаяся неотрицательным ядром. Из самого факта существования функции влияния исходной упругой системы, которую в дальнейшем будем называть системой S, следует, что точки системы S связаны с точками некоторых опорных конструкций. Функция поремещений точек системы $u(x)$ (x — точка системы) в силу сказанного должна удовлетворять некоторым условиям, вытекающим из характера исходной системы и опорных конструкций, либо, как мы будем говорить, функция $u(x)$ должна удовлетворять исходным связям.

Если точки системы S соединены с точками некоторой новой опорной конструкции так, что функция перемещений построенной системы $\bar{u}(x)$ помимо исходных связей удовлетворяет единственному дополнительному условию

$$\int \bar{u}(x)\,dp(x) = 0, \tag{1}$$

где $p(x)$ — некоторая функция ограниченной вариации, то мы будем говорить, что на систему S положена одна дополнительная связь. (Здесь и впоследствии интегрирование проводится по точкам системы S).

Присоединяемую конструкцию будем называть связью, определяемую этой конструкцией функцию $p(x)$ — функцией-связью и условие (1) — условием связи. n связей, определяющих функции $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$, мы будем называть зависимыми, если существуют числа α_1, α_2, ..., α_n, из которых по крайней мере одно отлично от нуля, такие что

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int u(x)\, dp_i(x) = 0,$$

где $u(x)$ — произвольная функция перемещений системы S. В противном случае связи будем называть независимыми. Систему, полученную из S наложением n дополнительных независимых связей, будем называть S_n. Обозначим ее функцию влияния $K_n(x, s)$.

Согласно определению связи функция перемещения системы S_n — $u_n(x)$ удовлетворяет исходным связям и условиям, налагаемым дополнительными связями

$$\int u_n(x)\, dp_i(x) = 0 \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

а в остальном эти функции произвольны.

Отметим, что функции-связи отвечает не единственная связь, то есть существует множество конструкций, которым соответствует одно и то же условие связи, а поэтому система S_n не определяется однозначно условиями (2).

Из всех связей, определяющих функции $p_i(x)$, будем в дальнейшем рассматривать лишь такие, виртуальная работа реакций которых равна нулю на всех перемещениях точек системы S_n.

В соответствии с принятой терминологией такие связи будем называть идеальными. Мы покажем ниже, что условия (2) и требование идеальности связей однозначно определяют систему S_n.

Если $dr(x)$ — реакция связей, приходящаяся на элемент системы S и связи идеальны, то

$$\int \delta u_n(x)\, dr(x) = 0,$$

где $\delta u_n(x)$ — виртуальные перемещения точек системы S_n.

Перейдя в условиях (2) к виртуальным перемещениям и сопоставляя их с равенством (3), найдем

$$dr(x) = \sum_{i=1}^{n} c_1\, dp_i(x) + dv(x),$$

где c_i — некоторые параметры и $dv(x)$ ортогонально ко всем функциям перемещений точек системы S, то есть ортогонально к $K(x, s)$.

Из определения функции влияния следует, что

$$K_n(x, s) = K(x, s) + \int K(x, t)\, dr(t),$$

либо, после подстановки значения $dr(t)$, находим

$$K_n(x, s) = K(x, s) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) \int K(x, t)\, dp_i(t). \tag{3}$$

Умножив полученное равенство на $dp_j(x)$ и заметив, что $K_n(x, s)$ удовлетворяет условиям (2), придем к системе уравнений, из которых найдем параметры $c_i(s)$

$$\int K(t, s)\, dp_j(t) + \sum_{i=1}^{n} K_{ji} c_i(s) = 0, \tag{4}$$

где

$$K_{ji} = \int\int K(x, s)\, dp_j(x)\, dp_i(s).$$

Исключая из (3) и (4) числа c_i, получим

$$\left| \begin{array}{c|ccc} K(x, s) - K_n(x, s) & \int K(x, t)\, dp_1(t) & \dots & \int K(x, t)\, dp_n(t) \\ \hline \int K(s, t)\, dp_1(t) & & & \\ \vdots & & K_{ij} & \\ \int K(s, t)\, dp_n(t) & & & \end{array} \right| = 0. \tag{5}$$

Для того, чтобы доказать существование и единственность функции $K_n(x, s)$, а следовательно, однозначность определения системы S_n, нужно показать, что определитель

$$\left| K_{ij} \right|_{ij=1}^{n}$$

отличен от нуля.

Требуемое положение будет доказано, если будет установлена положительность квадратичной формы

$$\sum_{ij=1}^{n} K_{ij} \alpha_i \alpha_j = \int\int K(x, s) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, dp_i(x) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, dp_i(s). \tag{6}$$

Последнее доказывается без труда

Действительно, из неотрицательности ядра $K(x, s)$ следует, что при произвольных функциях $P(x)$ и $Q(x)$ выражение

$$\int\int K(x, s)\, d[P(x) + Q(x)]\, d[P(s) + Q(s)]$$

неотрицательно.

Если функция $P(x)$ такая, что

$$\int\int K(x, s)\, dP(x)\, dP(s) = 0,$$

то из произвольности функции $Q(x)$ непосредственно видно, что

$$\int K(x, s)\, dP(s) = 0$$

во всех точках области интегрирования.

Из сделанного замечания вытекает, что обращение квадратичной формы (6) в ноль при некоторых значениях чисел $\alpha_i \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \neq 0 \right)$ приводит к тождеству

$$\int K(x, s) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, dp_i(s) \equiv 0,$$

что противоречит условию независимости связей.

Полученное противоречие доказывает сделанное утверждение.

Из формулы (5) находим

$$K_n(x, s)=\frac{\begin{vmatrix} K(x, s) & \int K(x, t)\,dp_1(t)\ldots\int K(x, t)\,dp_n(t) \\ \int K(s, t)\,dp_1(t) & \\ \vdots & K_{ij} \\ \int K(s, t)\,dp_n(t) & \end{vmatrix}}{\left|K_{ij}\right|_{ij=1}^{n}}. \qquad (6)$$

Введем в рассмотрение динамические податливости систем S и S_n, то есть резольвенты ядер $K(x, s)$ и $K_n(x, s)$, которые обозначим соответственно $\Gamma(x, s; \lambda)$ и $\Gamma_n(x, s; \lambda)$.

Согласно теореме Бетмена [3] из (6) получим

$$\Gamma_n(x, s; \lambda)=\frac{\begin{vmatrix} \Gamma(x, s; \lambda) & \int \Gamma(x, t; \lambda)\,dp_1(t)\ldots\int \Gamma(x, t; \lambda)\,dp_n(t) \\ \int \Gamma(s, t; \lambda)\,dp_1(t) & \\ \vdots & \gamma_{ij}(\lambda) \\ \int \Gamma(s, t; \lambda)\,dp_n(t) & \end{vmatrix}}{\left|\gamma_{ij}(\lambda)\right|_{ij=1}^{n}},$$

где

$$\gamma_{ij}(\lambda)=\iint \Gamma(x, s; \lambda)\,dp_i(x)\,dp_j(s).$$

В дальнейшем мы примем без доказательства несколько положений, которые являются естественными обобщениями на системы со связями рассматриваемого нами типа, общих положений математической теории колебаний [4].

Будем считать известным:

а) при наложении на систему S одной связи с функцией-связью $p_1(x)$ все корни уравнения

$$\gamma_{11}(\lambda)=0 \qquad (8)$$

являются квадратами частот системы S_1;

б) для того, чтобы некоторая частота системы S была также частотой системы S_1, необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере одна амплитудная функция системы S, отвечающая этой частоте, удовлетворяла условию связи;

в) система S_1 не имеет частот, отличных от указанных в пунктах а) и б);

г) каждая амплитудная функция системы S, удовлетворяющая условию связи, является также амплитудной функцией системе S_1;

д) если все амплитудные функции системы S, отвечающие k-ой частоте, (квадрат этой частоты обозначим λ_k), удовлетворяют условию связи и $\gamma_{11}(\lambda_k)=0$, то у системы S_1 этой частоты помимо амплитудных функций, указанных в пункте д) отвечает еще одна амплитудная функция

$$\tilde{\varphi}(x)=\int \Gamma(x, s; \lambda_k)\,dp_1(s). \qquad (9)$$

Напомним, кроме того, что амплитудные функции системы S и квадраты ее частот соответственно будут фундаментальными функциями и собственными значениями интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int K(x, s)\varphi(s)\, d\sigma(s),$$

где $d\sigma(s)$ — масса элемента системы S.

Из свойств резольвенты симметричного ядра следует, что функция $\gamma_{11}(\lambda)$ имеет простые полюсы при значениях λ, равных квадратам тех частот системы, которым отвечает, по крайней мере, одна амплитудная функция, неудовлетворяющая условию связи.

Неотрицательность ядра $K(x, s)$ приводит к положительности всех вычетов функции $\gamma_{11}(\lambda)$ и условию $\gamma_{11}(\lambda) > 0$ при $\lambda < \lambda_1$.

Из положительности вычетов функции $\gamma_{11}(\lambda)$ вытекает, что эта функция монотонно возрастает между полюсами, а это означает, что нули и полюсы функции $\gamma_{11}(\lambda)$ перемежаются. Заметив, кроме того, что первый полюс этой функции будет меньше всех ее нулей, легко получим, что и для рассматриваемой связи справедлив известный результат, гласящий, что

$$\lambda_k \leqslant \lambda_k^{(1)} \leqslant \lambda_{k+1}, \qquad (10$$

где $\lambda_k^{(1)}$ — квадраты частот системы S_1

Знаки равенства в соотношении (10) достигаются лишь в случае, предусмотренном в пункте б). Существенно, что каждая частота системы S встречается в неравенствах (10) точно столько раз, какова ее кратность, то есть столько раз, сколько амплитудных функций ей отвечает.

Из неравенства (10) видно, что какая бы связь не накладывалась на систему, всегда

$$\lambda_n^{(1)} \leqslant \lambda_{n+1}.$$

Имея ввиду разыскание связей максимальной жесткости, мы найдем условия, которым должна удовлетворять функция-связь, обеспечивающая равенство

$$\lambda_n^{(1)} = \lambda_{n+1}.$$

Естественно, из рассмотрения будет исключен случай равенства λ_n и λ_{n+1}, ибо при этом, как это видно из (10), любая связь решает задачу. Это замечание означает, что если $n+1$-ая частота системы S будет кратности ρ, то $\lambda_{n+1} = \lambda_{n+2} = \ldots = \lambda_{n+\rho}$.

Лемма. Для того, чтобы при наложении на систему S одной связи с функцией-связью $p_1(x)\lambda_n^{(1)}$ было равно λ_{n+1}, необходимо и достаточно выполнение условий:

А) Все амплитудные функции системы S, отвечающие ее $n+1$-частоте, должны удовлетворять условию связи.

В) Значение функции $\gamma_{11}(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_{n+1}$ должно быть неотрицательно.

Если $\gamma_{11}(\lambda_{n+1}) = 0$, то кратность n-ой частоты системы S_1 будет на единицу выше кратности $n+1$-ой частоты системы S.

Докажем достаточность условий лёммы. Из условия (А) следует, что λ_{n+1} является квадратом частоты системы S_1, причем все амплитудные функции системы S, которые отвечают λ_{n+1}, будут амплитудными функциями системы S_1. Выполнение условия (А) означает также, что $\gamma_{11}(\lambda)$ непрерывно при $\lambda = \lambda_{n+1}$. Из последнего замечания вы-

вытекает[1], что, в случае, когда λ_{n+1} имеет кратность ρ, в промежуток $<\lambda_n, \lambda_{n+\rho+1}>$ попадает точно один корень уравнения (8), который в силу условия (B) и монотонности функции $\gamma_{11}(\lambda)$ будет не меньше, чем λ_{n+1}, а следовательно, как это видно из (10), этот корень будет квадратом частоты системы S_1 с номером $n+\rho$.

Последнее означает (это также следует из (10), что $\lambda_n^{(1)} = \lambda_{n+1}^{(1)} = \ldots = \lambda_{n+\rho-1}^{(1)} = \lambda_{n+1}$. Если $\gamma_{11}(\lambda_{n+1}) = 0$, то, как было указано, n-ой частоте системы S_1, помимо амплитудных функций системы S, отвечает также еще одна амплитудная функция $\vec{\varphi}(x)$, определяемая равенством (9), которая, очевидно, ортогональна ко всем упомянутым функциям. Таким образом, число амплитудных функций, отвечающих $\lambda_n^{(1)}$, будет равно $\rho+1$.

Перейдем к доказательству необходимости условий (A) и (B). Предположение, что условие (A) не выполняется, приводит к противоречию.

Действительно, если существует амплитудная функция системы S, отвечающая ее $n+1$-ой частоте, не удовлетворяющая условию связи, то λ_{n+1} будет полюсом функции $\gamma_{11}(\lambda)$. Отсюда следует, что существует корень уравнения (8), лежащий внутри интервала $<\lambda_n, \lambda_{n+1}>$. Неравенство (10) убеждает нас в том, что этот корень будет квадратом n-ой частоты системы S_1. Таким образом, сделанное допущение привело к неравенству $\lambda_n^{(1)} < \lambda_{n+1}$, противоречащему условию теоремы.

Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве достаточности условия (B), мы обнаружим из равенства $\lambda_n^{(1)} = \lambda_{n+1}$, что корень уравнения (8), лежащий в интервале $<\lambda_n, \lambda_{n+\rho+1}>$, не меньше λ_{n+1}. Последнее утверждение приводит к условию (B), так как функция $\gamma_{11}(\lambda)$ монотонно возрастает.

Исследуем теперь распределение частот системы S_n.

Из неравенства (9) следует, что при произвольных связях имеет место

$$\lambda_1^{(n)} \leqslant \lambda_{n+1}.$$

Поэтому мы будем говорить, что связи, наложенные на систему S, обладают максимальной жесткостью, если для этих связей справедливо равенство

$$\lambda_1^{(n)} = \lambda_{n+1}.$$

Докажем следующее предположение.

Теорема. Для того, чтобы n связей, наложенных на систему S, обладали максимальной жесткостью, необходимо и достаточно иметь два условия:

A) все амплитудные функции системы S, отвечающие ее $n+1$-ой частоте, должны удовлетворять условиям связи,

B) квадратичная форма

$$\sum_{ij=1}^{n} \gamma_{ij}(\lambda_{n+1})\, \alpha_i \alpha_j \tag{11}$$

должна быть неположительная, причем кратность первой частоты системы S_n равна кратности n-ой частоты системы S, сложенной с дефектом матрицы квадратичной формы (11).

---

[1] Мы предполагаем здесь, что точки λ_n и $\lambda_{n+\rho+1}$ являются полюсами функции $\gamma_{11}(\lambda)$. Внимательный читатель легко распространит доказательство и на случай, когда эти условия не выполняются

При доказательстве достаточности условий теоремы первоначально предположим, что квадратичная форма (11) отрицательна. Это допущение дает возможность утверждать, что отношение двух последовательных главных миноров матрицы формы (11) будет также отрицательно.

Будем считать, что система S_1 строится из системы S наложением связи с функцией-связью $p_1(x)$, а система S_{k+1} строится из системы S_k наложением связи с функцией-связью $p_{k+1}(x)$.

Замечание, сделанное о минорах рассматриваемой матрицы, и формула (7) приводят к выводу, что

$$\iint \Gamma_k(x, s; \lambda_{n+1})\, dp_{k+1}(x)\, dp_{k+1}(s) < 0.$$

Полученные неравенства позволяют применить результат доказанной леммы для анализа распределения частот последовательно построенных упругих систем, что приведет к доказательству высказанного в настоящей теореме утверждения.

Допустим теперь, что на некоторых функциях $\overline{p}_k(x)$ удовлетворяющих условию (A), и при некоторых значениях параметров α_k квадратичная форма (11) обращается в нуль.

Рассмотрим функции $p_k(x)$, определяемые равенствами:

$$dp_k(x) = d\overline{p}_k(x) + \varepsilon \int k(x,s)\, d\overline{p}_k(s)\, d\sigma(x),$$

где ε — произвольное положительное число.

Непосредственно видно, что функции $p_k(x)$ удовлетворяют условию (A), и что квадратичная форма (11) на этих функциях отрицательна. Поэтому, как было доказано, при произвольном положительном ε справедливо равенство $\lambda_1^{(n)} = \lambda_{n+1}$.

Из формулы (6) видно, что при малых ε $K_n(x, s)$ будет функцией непрерывной от ε, что приводит к непрерывности по ε частот системы S_n. Сделанное замечание приводит к заключению, что первая частота системы S_n, которая построена по функциям $\overline{p}_k(x)$, будет также равна $n+1$-ой частоте системы S_n.

Выводы леммы также позволяют утверждать, что кратность первой частоты системы S_n равна кратности $n+1$-ой частоты системы S, сложенной с дефектом матрицы формы (11).

Необходимость условий теоремы легко доказать последовательным применением результатов леммы к системам $S_1, S_2, \ldots, S_n$, что читатель проделает без труда.

При доказательстве теоремы мы предполагали, что $\lambda_n \neq \lambda_{n+1}$. Понятно, что если это условие невыполнено, то поставленная задача может быть решена наложением меньшего чем n числа связей [1].

В заключении настоящего параграфа укажем на известную общность решенной нами задачи и задачи Р. Куранта о мини-максимальных свойствах собственных значений интегрального уравнения.

Как известно, [5] теорема Р. Куранта гласит, что минимум максимумов функционала

$$(K\varphi, \varphi) = \iint K(x, s)\, \varphi(x)\, \varphi(s)\, dx\, ds \tag{12}$$

[1] Можно показать, что число положительных квадратов в форме (11) на единицу меньше номера частоты системы S_n, квадрат которой равен λ_{n+1}.

при условии нормирования

$$\int \varphi^2(x)\,dx = 1$$

и связях вида

$$\int \varphi(x)\,v_i(x)\,dx = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

равен обратной величине $n+1$-го собственного значения ядра $K(x, s)$ и достигается в случае, когда функции $v_i(x)$ равны первым n фундаментальным функциям ядра $K(x, s)$.

Можно показать, что решенная нами задача эквивалентна разысканию максимума минимумов того же функционала при связях вида

$$\iint K(x, s)\,\varphi(x)\,dp_i(s) = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

и при следующем условии нормирования

$$\iiint K(x, t)\,K(s, t)\,\varphi(x)\,\varphi(s)\,dx\,ds\,d\sigma(t) = 1.$$

Мы указали все связи, при которых достигается максимум минимумов функционала (12) (этот максимум равен λ_{n+1}) при принятом нами условии нормирования.

Если $K(x, s)$ — неотрицательное ядро и существует оператор A, обратный интегральному оператору K, то можно доказать, что, если на функциях $v_i(x)$ оператор A имеет смысл, то задача Р. Куранта приводится к нашей задаче.

Действительно, полагая в задаче Р. Куранта

$$\varphi(x) = K^{\frac{1}{2}}\psi,$$

мы придем к рассматриваемой нами задаче при функциях-связях $p_i(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\frac{dp_i(x)}{dx} = A^{\frac{1}{2}} v_i.$$

Таким образом, при наложенных ограничениях мы, как нам кажется, существенно дополнили теорему Куранта, указав все функции-связи, при которых достигается экстремальное значение функционала (12). Для приложений важно также, что мы в отличие от Куранта не требуем дифференцируемости функций-связей. Неоднозначность в выборе связей, при которых функционал достигает мини максимального значения, наглядно можно проиллюстрировать в трехмерном пространстве.

Разыскание максимума функционала в трехмерном пространстве при наличии связи означает рызскание большой полуоси эллипса, получаемого от пересечения эллипсоида плоскостью, проходящей через его центр. Результат Куранта гласит, что такая полуось будет минимальна и равна средней полуоси эллипсоида в случае, если плоскость сечения ортогональна большой полуоси эллипсоида. Очевидно, что нужным свойством обладает не только указанная плоскость. Можно провести через среднюю ось эллипсоида пучок плоскостей, в которых большей осью эллипсов, получающихся в сечениях, будет средняя ось эллипсоида. Все указанные плоскости, видимо, будут заключены между двумя плоскостями, для которых в сечении получаются окружности.

Легко непосредственно записать эти результаты геометрического исследования в принятых символах, что приведет к условиям леммы.

§ 2. Рассмотрим задачу на применение точечных связей.

Если балку, лежащую на жестких опорах, дополнительно опереть на n абсолютно жестких опор, то, как известно, первая частота построенной балки тогда и только тогда достигнет максимального значения — $n+1$-ой частоты исходной балки, когда дополнительные опоры попадают в нули $n+1$-ой формы колебаний исходной балки. Будет показано, что того же эффекта можно добиться, если соединить n точек балки с упругим телом, обладающим достаточно высокой первой частотой. Точнее говоря, мы укажем необходимые и достаточные условия, которым должна быть подчинена упругая система; n произвольных точек которой попарно соединяются с n точками балки для того, чтобы построенная таким путем система обладала максимальной первой частотой.

Прежде, чем приступить к решению сформулированной задачи, укажем, что балка, лежащая лишь на жестких опорах, обладает следующими свойствами [6]:

1. Каждой частоте соответствует одна форма колебаний.

2. Число нулей амплитудной функции (не считая нулей на опорах) на единицу меньше номера функции.

3. При наложении на балку n дополнительных жестких опор первая частота построенной балки тогда и только тогда равна $n+1$-ой частоте исходной балки, когда опоры подставлены в нулях ее $n+1$-ой формы колебания.

Отметив, что абсолютно жесткой опоре, подставленной в точке ξ, соответствует такая функция $p(x)$, что

$$\int u(x)\,dp(x) = u(\xi),$$

и обозначив $G(x, s; \lambda)$ резольвенту балки, лежащей на жестких опорах, а через ξ_i — нули ее $n+1$-ой амплитудной функции, получим на основании доказанной теоремы и приведенных здесь результатов, что квадратичная форма

$$\sum_{ij=1}^{n} G(\xi_i, \xi_j; \lambda_{n+1})\,\alpha_i\alpha_j$$

будет отрицательно-определенной [1].

Рассмотрим теперь систему S, состоящую из двух независимых подсистем — заданной балки, лежащей на абсолютно жестких опорах и некоторой упругой системы, в дальнейшем называемой опорной.

В силу изолированности подсистем спектр частой системы S состоит из частот спектров каждой подсистемы.

Изменение параметров опорной системы меняет ее частоты, то есть меняет место этих частот в спектре частоты системы S.

Легко видеть, что $n+1$-ая частота системы S будет максимально возможной и равной $n+1$-ой частоте балки лишь в случае, если первая частота опорной системы не меньше $n+1$-ой частоты балки. Поэтому в дальнейшем будем считать это условие выполненным.

---

[1] Невозможность обращения формы в ноль следует из того, что балка на жестких опорах не имеет кратных частот.

Соединению точки ξ балки с точкой ξ^* опорной системы соответствует функция $p(x)$, для которой

$$\int u(x)\,dp(x) = u(\xi) - u(\xi^*).$$

Формы колебаний системы S описываются функциями двух видов: функции первого вида совпадают на балке с ее амплитудными функциями и равны нулю в точках опорной системы, функции второго вида равны нулю в точках балки и совпадают на опорной системе с ее амплитудными функциями.

Вследствие сказанного $n+1$-ая амплитудная функция балки должна иметь нули в соединяемых точках, так как только в этом случае выполняется условие (A) теоремы.

Кроме того, нужно потребовать, чтобы первая частота опорной системы не совпадала с $n+1$-ой частотой балки. Действительно, в противном случае соединяемые точки опорной системы не могли бы быть произвольными, так как $n+1$-ая частота системы S была бы кратной и для выполнения условия (A) соединяемые точки опорной системы необходимо должны были бы быть нулями ее первой формы колебания.

Резольвента системы S равна $G(x, s; \lambda)$ — резольвенте балки, когда x и s являются точками балки, равна $G^*(x, s; \lambda)$ — резольвенте опорной системы, когда x и s — точки опорной системы и равна нулю, когда x и s принадлежат различным подсистемам.

Сделанные здесь выводы и ранее доказанная теорема позволяют утверждать следующее.

Теорема. Для того, чтобы первая частота системы, построенной попарным соединением n точек заданной балки, лежащей на жестких опорах с n произвольными точками опорной системы, была максимальна, необходимо и достаточно, чтобы:

1. Соединяемые точки балки были нулями ее $n+1$-ой формы колебания.

2. Первая частота опорной системы была больше $n+1$-ой частоты балки.

3. Сумма квадратичных форм

$$\sum_{ij=1}^{n} G(\xi_i, \xi_j; \lambda_{n+1})\,\alpha_i\alpha_j + \sum_{ij=1}^{n} G^*(\xi_i^*, \xi_j^*; \lambda_{n+1})\,\alpha_i\alpha_j$$

была неположительна.

Возможность реализации первого условия следует из свойств амплитудных функций балки. Выполнение двух других условий обеспечивается выбором достаточно жесткой опорной системы, ибо, как было отмечено, первая квадратичная форма, входящая в третье условие, отрицательно-определенная.

В качестве примера рассмотрим однородную балку постоянной жесткости, шарнирно опертую по концам на жесткие опоры, и будем предполагать, что опорная система состоит из n одинаковых изолированных подсистем (колонны, балки и т. п.).

Значение резольвенты балки в соединяемых точках в рассматриваемом случае будет равно:

$$G(\xi_i, \xi_j; \lambda_{n+1}) = -\frac{l^3}{2\pi^3(n+1)^3 B}\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{(n+1)\pi}{l}\xi_i \operatorname{sh}\frac{(n+1)\pi}{l}(l-\xi_j)}{\operatorname{sh}(n+1)\pi}\quad \xi_i \leqslant \xi_j,$$

где B — изгибная жесткость балки, l — ее длина.

Нули $n+1$-ой формы колебания балки делят ее на $n+1$ участков равной длины, поэтому $\xi_i = \frac{il}{n+1}$.

Укажем еще, что если ρ — погонная масса балки, то

$$\lambda_{n+1} = \frac{\pi^4 (n+1)^4 B}{l^4 \rho}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что функция Грина $Q(x, s)$ оператора

$$\frac{2\pi^2 (n+1)^2 B}{l^2} y''(x) - \frac{2\pi^4 (n+1)^4 B}{l^4} y(x)$$

при граничных условиях

$$y(0) = y(l) = 0$$

в точках ξ_i, ξ_j равна $-G(\xi_i, \xi_j; \lambda_{n+1})$.

Исходя из того, что опорная система состоит из одинаковых независимых подсистем, заключаем, что

$$G^*(\xi_i^*, \xi_j^*; \lambda_{n+1}) = 0 (i \neq j) \text{ и } G^*(\xi_i^*; \xi_i^*; \lambda_{n+1}) = G^*(\xi_j^*, \xi_j^*; \lambda_{n+1}) = \mu.$$

Следовательно, для решения поставленной задачи необходимо и достаточно, чтобы выражение

$$\sum_{ij=1}^{n} Q(\xi_i, \xi_j) \alpha_i \alpha_j - \mu \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$$

было неотрицательно, то есть чтобы имело место неравенство

$$Min \frac{\sum\limits_{ij=1}^{n} Q(\xi_i, \xi_j) \alpha_i \alpha_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2} \geqslant \mu.$$

Разыскание минимума отношения двух форм приводит, как известно, к рассмотрению собственных значений ν_k системы уравнений:

$$\alpha_i = \nu \sum_{j=1}^{n} Q(\xi_i, \xi_j) \alpha_j. \tag{9}$$

Обратная величина наибольшего собственного значения этой системы является искомым минимумом.

Таким образом, опоры должны удовлетворять условию

$$\frac{1}{\nu_n} \geqslant \mu.$$

Для разыскания ν_n отметим, что функцию $Q(x, s)$ можно трактовать, как функцию влияния струны длины l, защемленной по концам растянутой силой, равной $\frac{2\pi^2 (n+1)^2 B}{l^2}$ и лежащей на упругом основании жесткости $\frac{2\pi^4 (n+1)^4 B}{l^4}$.

Вследствие сказанного квадраты частот такой струны являются собственными значениями системы уравнений (9), если считать, что струна несет лишь n сосредоточенных масс в равностоящих точках и величины масс равны единице.

Для разыскания частот колебаний струны удобно записать уравнение колебаний при помощи коэффициентов жесткости. В рассматриваемом случае это приводит к решению конечно-разностного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, откуда легко находим, что

$$\nu_n = \frac{4\pi^3 (n+1)^3 B}{l^3} \; \frac{\operatorname{ch}\pi + \cos\dfrac{\pi}{n+1}}{\operatorname{sh}\pi}.$$

Если, к примеру, опорами являются n одинаковых балок длины L, постоянной жесткости A и с постоянной погонной массой σ и середины этих балок являются точками опирания, то

$$\mu = \frac{l^3}{4\pi^3 (n+1)^3 B} \; \frac{\rho}{\sigma} \sqrt[4]{\frac{B\sigma}{A\rho}} (\operatorname{tg} z - \operatorname{th} z),$$

где

$$z = \frac{\pi (n+1)}{2} \; \frac{L}{l} \sqrt[4]{\frac{B\sigma}{A\rho}}.$$

Следовательно, для того чтобы опорные балки были наиболее эффективными, необходимо и достаточно, чтобы заданная балка опиралась на опоры в нулях соответствующей формы колебания и параметры балок-опор удовлетворяли условиям:

$$z < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\rho}{\sigma} \sqrt[4]{\frac{B\rho}{A\sigma}} (\operatorname{tg} z - \operatorname{th} z) \leqslant \frac{\operatorname{sh}\pi}{\operatorname{ch}\pi + \cos\dfrac{\pi}{n+1}}.$$

Аналогично решается задача для опор любого иного вида.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Бубнов. Строительная механика корабля, т. 1, 1912.
2. М. Д. Дольберг. Об одном обобщении задачи Бубнова, „Украинский математический журнал", т. III, № 4, 1951.
3. H. Batheman. Messengers of Mathematics, 37 (12), 1908.
4. Я. Л. Нудельман. Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем ,1949.
5. Р. Курант и Д. Гильберт. Методы математической физики, т. 1, 1951.
6. М. Г. Крейн и Ф. Р. Гантмахер. Осцилляционные матрицы и малые колебания механических систем, 1950.