Валентина Марковна Тупицына (18. X 1948 — 6. XI 1970) умерла через несколько месяцев после окончания Харьковского университета. Настоящая статья представляет собой ее дипломную работу. Вопросами, естественно возникающими в связи с этой работой, Валентина Марковна предполагала заниматься в дальнейшем, но этим планам не суждено было сбыться.

И. В. Островский

ОБ АРИФМЕТИКЕ ХРЕБТОВЫХ ФУНКЦИЙ

В. М. Тупицына

А. Я. Хинчин доказал [1] (см. также [2, стр. 96—100]) две теоремы, имеющие фундаментальное значение для арифметики вероятностных законов. В терминах характеристических функций (х. ф.) эти теоремы можно сформулировать так.

Теорема А. *Всякая х. ф. $\varphi(t)$, имеющая хотя бы одну неразложимую компоненту, представляется в виде*

$$\varphi(t) = \varphi_0(t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,\ldots\,\varphi_n(t)\ldots, \tag{1}$$

где $\varphi_0(t)$ — х. ф., не имеющая неразложимых компонент, а $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ... — неразложимые х. ф. в конечном или счетном числе.*

Теорема Б. *Если х. ф. $\varphi(t)$ не имеет неразложимых компонент, то она безгранично делима.*

Первую теорему можно рассматривать как аналог теоремы о разложении любого целого числа на простые множители. Существенное отличие, однако, состоит в том, что разложение (1), вообще говоря, не единственно [2, стр. 93] и, кроме того, существуют х. ф., не имеющие ни одной неразложимой компоненты (например, х. ф. закона Гаусса [2, стр. 107], х. ф. закона Пуассона [2, стр. 119]).

Вторая теорема дает необходимое условие отсутствия неразложимых компонент. Это условие не является достаточным [1] (также [2, стр. 105]). Проблема описания класса х. ф., не имеющих неразложимых компонент (этот класс принято обозначать через I_0) не решена до сих пор, и ей посвящено много глубоких исследований (библиографию работ до 1960 г. см. [2], более поздних — [3]).

Если х. ф. $\varphi(t)$ голоморфна в полосе $|\operatorname{Im} t| < R$, то она [2, стр. 61] удовлетворяет условиям

$$|\varphi(t)| \leqslant \varphi(i \operatorname{Im} t),\ \varphi(0) = 1. \tag{2}$$

Функции, голоморфные в полосе $|\operatorname{Im} t| < R$ и удовлетворяющие этим условиям, будем называть, следуя Ю. В. Линнику [2],

* В последнем случае произведение равномерно сходится на любом конечном интервале.

хребтовыми в полосе $|\operatorname{Im} t| < R$. Известно [2, стр. 63], что этот класс строго шире класса х. ф., голоморфных в полосе $|\operatorname{Im} t| < R$.

В настоящей работе мы докажем для хребтовых функций теоремы, аналогичные теоремам А и Б.

В дальнейшем будем считать полосу $|\operatorname{Im} t| < R$, в которой рассматриваются хребтовые функции, фиксированной и вместо слов «хребтовая в полосе $|\operatorname{Im} t| < R$ функция» писать просто «хр. ф.»

Введем для хр. ф. понятия компоненты, неразложимости и безграничной делимости.

Определение 1. *Хр. ф. $\varphi_1(t)$ называется хр. компонентой хр. ф. $\varphi(t)$, если существует такая хр. ф. $\varphi_2(t)$, что*

$$\varphi(t) = \varphi_1(t)\,\varphi_2(t) \quad (|\operatorname{Im} t| < R).$$

Очевидно, что при любом α, $-\infty < \alpha < \infty$, хр. ф. $e^{i\alpha t}$ и $e^{-i\alpha t}\varphi(t)$ являются хр. компонентами $\varphi(t)$. Компоненты такого вида назовем несобственными.

Определение 2. *Хр. ф. $\varphi(t)$ называется неразложимой, если она не представляется в виде $\varphi(t) = e^{i\alpha t}$ $(\operatorname{Im}\alpha = 0)$ и имеет только несобственные хр. компоненты.*

Неразложимые хр. ф. существуют, это мы докажем в конце работы.

Определение 3. *Хр. ф. $\varphi(t)$ называется безгранично делимой, если она во всей полосе $|\operatorname{Im} t| < R$ не имеет корней.*

Это определение можно считать естественным по такой причине. Известно [4, стр. 80], что для того, чтобы характеристическая функция $\varphi(t)$ была безгранично делимой, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\lambda > 0$ функция $[\varphi(t)]^\lambda$ была характеристической. Поэтому безгранично делимые хр. ф. можно было определять как хр. ф. $\varphi(t)$ такие, что при любом $\lambda > 0$ функция $[\varphi(t)]^\lambda$ является хр. ф. Однако, чтобы функция $[\varphi(t)]^\lambda$ при любом $\lambda > 0$ была голоморфной при $|\operatorname{Im} t| < R$, приходится требовать, чтобы функция $\varphi(t)$ там не обращалась в нуль. Однако очевидно, что если хр. ф. $\varphi(t)$ не имеет корней в полосе $|\operatorname{Im} t| < R$, то при любом $\lambda > 0$ функция $[\varphi(t)]^\lambda$ является хр. ф*.

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *Всякая хр. ф. $\varphi(t)$, имеющая хотя бы одну неразложимую хр. компоненту, представляется в виде*

$$\varphi(t) = \varphi_0(t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,\ldots\,\varphi_n(t)\,\ldots \quad (|\operatorname{Im} t| < R),$$

---

* Заметим, что для х. ф. аналогичное утверждение неверно. Например, известно [2, стр. 94], что функция $[\varphi(t)]^\lambda$, где

$$\varphi(t) = \exp\left\{3e^{4it} + 3e^{3it} - e^{2it} + 2e^{it} - 7\right\},$$

является х. ф. лишь при $\lambda \geqslant 1/2$.

где $\varphi_0(t)$ — хр. ф., не имеющая неразложимых хр. компонент, а $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ... — неразложимые хр. ф. в конечном или счетном числе. В последнем случае бесконечное произведение сходится абсолютно и равномерно на любом компакте, лежащем в полосе $|\operatorname{Im} t| < R$.

Теорема 2. *Если хр. ф. $\varphi(t)$ не имеет неразложимых компонент, то она безгранично делима.*

Отметим существенное обстоятельство, отличающее арифметику хр. ф. от арифметики х. ф. В то время как класс I_0 х. ф., не имеющих неразложимых компонент, является собственным подклассом класса безгранично делимых х. ф., класс хр. ф., не имеющих неразложимых хр. компонент, совпадает с классом безгранично делимых хр. ф. Действительно, из определений 1 и 3 видно, что хр. компоненты безгранично делимой хр. ф. не имеют корней в полосе $|\operatorname{Im} t| < R$ и, следовательно, безгранично делимы. Поэтому класс безгранично делимых хр. ф. содержится в классе хр. ф., не имеющих неразложимых компонент. Включение в другую сторону имеет место по теореме 2.

Перейдем к вспомогательным утверждениям, используемым для доказательства теорем 1 и 2.

Лемма 1. *Каждая хр. компонента $\varkappa(t)$ хр. ф. $\varphi(t)$ может быть представлена в виде*

$$\varkappa(t) = e^{-i\alpha t}\varkappa^{\circ}(t),$$

где α — действительное число, а $\varkappa^{\circ}(t)$ — хр. компонента $\varphi(t)$, удовлетворяющая условию

$$(d/dt)\,\varkappa^{\circ}(0) = 0.$$

При этом, если $\varkappa(t)$ — неразложимая хр. компонента, то и $\varkappa^{\circ}(t)$ — неразложимая хр. компонента.

Доказательство. Так как $\varkappa(t)$ — хр. ф., то $\operatorname{Re}\varkappa(t) \leqslant \operatorname{Re}\varkappa(0)$, $-\infty < t < \infty$, откуда $\operatorname{Re}\varkappa'(0) = 0$. Рассматривая функцию $\varkappa^{\circ}(t) = e^{i\alpha t}\varkappa(t)$, где $\alpha = i\varkappa'(0)$, убеждаемся в справедливости леммы.

Лемма 2. *Пусть хр. ф. $\psi(t) \not\equiv 1$ удовлетворяет условию $\psi'(0) = 0$. Тогда при $-R < \eta < R$ выполняется $\psi(i\eta) \geqslant 1$, причем знак равенства в последнем неравенстве имеет место только при $\eta = 0$.*

Доказательство. Как известно [2, стр. 62], если $\psi(t)$ — хр. ф., то функция $f(\eta) = \ln\varphi(i\eta)$ выпукла на интервале $-R < \eta < R$. Так как $\psi(0) = 1$, $\psi'(0) = 0$, то $f(0) = f'(0) = 0$. Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть $\varphi(t)$ — хр. ф., $\{\psi(t)\}$ — множество всех ее хр. компонент, удовлетворяющих условию $\psi'(0) = 0$. Функции $\psi(t)$ ограничены в своей совокупности в любой полосе $|\operatorname{Im} t| \leqslant R_1 < R$.*

Доказательство. Для каждой из функций $\psi(t)$ найдется хр. ф. $\varkappa(t)$ такая, что $\varphi(t) = \psi(t)\varkappa(t)$. Положим $\alpha = i\varphi'(0)$. В силу $\psi(0) = 1$, $\psi'(0) = 0$ имеем

$$\varphi'(0) = \psi'(0)\varkappa(0) + \psi(0)\varkappa'(0) = \varkappa'(0),$$

откуда следует, что хр. ф. $\varkappa_1(t) = e^{i\alpha t}\varkappa(t)$ удовлетворяет условию $\varkappa_1'(0) = 0$. По лемме 2 выполняется $\varkappa_1(i\eta) \geqslant 1$, $-R < \eta < R$, поэтому

$$\psi(i\eta) \leqslant \psi(i\eta)\varkappa_1(i\eta) = e^{-\alpha\eta}\psi(i\eta)\varkappa(i\eta) = e^{-\alpha\eta}\varphi(i\eta).$$

Таким образом,

$$|\psi(t)| \leqslant e^{-\alpha \operatorname{Im} t}\varphi(i \operatorname{Im} t),$$

и мы получаем утверждение леммы.

Лемма 4. *Пусть $\varphi(t)$ — хр. ф., $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, ... — последовательность ее хр. компонент. Если*

$$\psi_n(t) \to \psi(t)$$

равномерно на любом компакте в $|\operatorname{Im} t| < R$, то $\psi(t)$ является хр. компонентой для $\varphi(t)$.

Доказательство. В силу классической теоремы Вейерштрасса функция $\psi(t)$ голоморфна в полосе $|\operatorname{Im} t| < R$. Очевидно, условия (2) выполняются для $\psi(t)$, поэтому $\psi(t)$ является хр. ф. Рассмотрим мероморфную в полосе $|\operatorname{Im} t| < R$ функцию

$$\varkappa(t) = \varphi(t)/\psi(t).$$

Лемма будет доказана, если установим, что $\varkappa(t)$ — хр. ф.

Так как функция $\psi(t)$ является хр. ф., то она, очевидно, не обращается в 0 при $t = i\eta$, $-R < \eta < R$. Поэтому функция $\varkappa(t)$ голоморфна на интервале $t = i\eta$, $-R < \eta < R$. Пусть $0 < R_1 < R$, K — любой компакт в полосе $|\operatorname{Im} t| \leqslant R_1$, включающий отрезок $t = i\eta$, $-R_1 \leqslant \eta \leqslant R_1$, но не содержащий ни одного корня функции $\psi(t)$. По классической теореме Гурвица функции $\psi_n(t)$, начиная с некоторого n, не будут иметь корней на K.

Рассмотрим последовательность

$$\varkappa_n(t) = \varphi(t)/\psi_n(t).$$

Так как $\psi_n(t)$ — хр. компоненты для $\varphi(t)$, то $\varkappa_n(t)$ — хр. ф. и, следовательно,

$$|\varkappa_n(t)| \leqslant \varkappa_n(i \operatorname{Im} t).$$

В силу сказанного ранее последовательность $\varkappa_n(t)$ на компакте K равномерно сходится к $\varkappa(t)$. Поэтому на K выполняется $|\varkappa(t)| \leqslant \varkappa(i \operatorname{Im} t)$. В силу произвола в выборе K получаем, что последнее неравенство выполняется во всей полосе $|\operatorname{Im} t| \leqslant R_1$. Так как функция $\varkappa(t)$ не имеет полюсов на отрезке $t = i\eta$, $-R_1 \leqslant \eta \leqslant R_1$, то из указанного неравенства следует, что $\varkappa(t)$ не имеет полюсов в полосе $|\operatorname{Im} t| \leqslant R_1$. Лемма доказана.

Замечание. Из лемм 3 и 4 непосредственно вытекает, что множество всех удовлетворяющих условию $\psi'(0)=0$ хр. компонент $\psi(t)$ заданной хр. ф. $\varphi(t)$ является (по терминологии Монтеля) нормальным семейством.

Для доказательства теорем А и Б Хинчин [1] воспользовался функционалом

$$N_a[\varphi] = -\int_0^a \ln|\varphi(t)|\,dt,$$

определенным на классе всех х. ф. Для доказательства теорем 1 и 2 нам удобно пользоваться функционалом на классе хр. ф.:

$$M_r[\varphi] = \max_{-r\leq\eta\leq r} \ln\varphi(i\eta),\quad 0<r<R.$$

Отметим такие свойства этого функционала:

1) $M_r[\varphi]\geqslant 0$, $0<r<R$; 2) если для некоторого r, $0<r<R$, выполняется $M_r[\varphi]=0$, то $\varphi(t)\equiv 1$; 3) если хр. ф. $\varphi(t)$ и ее хр. компонента $\psi(t)\not\equiv\varphi(t)$ удовлетворяют условию $\varphi'(0)=\psi'(0)=0$, то $M_r[\psi]<M_r[\varphi]$.

Свойство 1) очевидно, так как $\varphi(0)=1$. Для получения 2) заметим, что из $|\varphi(t)|\leqslant\varphi(i\operatorname{Im}t)$ следует $M_r[\varphi]=\ln\max\limits_{|t|\leq r}|\varphi(t)|$, и пользуемся принципом максимума модуля. Свойство 3) получается так. Для некоторой хр. ф. $\varkappa(t)$ имеем $\varphi(t)=\psi(t)\varkappa(t)$. Так как $\varphi'(0)=\psi'(0)=0$, то

$$\varkappa'(0)=\psi'(0)\varkappa(0)+\psi(0)\varkappa'(0)=\varphi'(0)=0.$$

Так как $\varkappa(t)\not\equiv 1$, то по лемме 2 имеем $\varkappa(i\eta)>1$ при $-R<\eta<R$, $\eta\not\equiv 0$, откуда

$$\psi(i\eta)=\varphi(i\eta)/\varkappa(i\eta)<\varphi(i\eta),\quad -R<\eta<R,\quad \eta\neq 0.$$

Тем самым свойство доказано.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\varphi(t)$ — хр. ф., имеющая неразложимые компоненты. Не уменьшая общности, можно считать, что $\varphi'(0)=0$, в противном случае можно было бы рассматривать функцию $e^{i\alpha t}\varphi(t)$, где $\alpha=i\varphi'(0)$.

Для всякой хр. ф. $\psi(t)$ условимся через $\psi^\circ(t)$ обозначать функцию $\psi^\circ(t)=e^{i\alpha t}\psi(t)$, где $\alpha=i\psi'(0)$. Если $\psi(t)$ — неразложимая хр. компонента для $\varphi(t)$, то по лемме 1 функция $\psi^\circ(t)$ тоже является неразложимой хр. компонентой для $\varphi(t)$.

Обозначим через A_1 множество всех неразложимых хр. компонент функции $\varphi(t)$. Фиксируя r, $0<r<R$, положим

$$\beta_1=\sup_{\psi\in A_1} M_r[\psi^\circ].$$

В силу свойства 3) функционала M_r имеем $\beta_1\leqslant M_r[\varphi]$. Выберем из множества A_1 хр. компоненту $\psi_1(t)$, для которой $M_r[\psi_1^\circ]\geqslant\beta_1/2$.

Функция $\overset{\bullet}{\psi}_1(t)$ тоже является хр. компонентой для $\varphi(t)$. Рассмотрим разложение

$$\varphi(t) = \overset{\bullet}{\psi}_1(t)\, \varkappa_1(t), \tag{3}$$

где $\varkappa_1(t)$ — хр. ф. Если $\varkappa_1(t)$ не имеет неразложимых хр. компонент, то (3) является тем разложением, существование которого утверждается в теореме 1. Пусть $\varkappa_1(t)$ имеет неразложимые хр. компоненты. Легко видеть (ср. доказательство свойства 3) функционала M_r), что $\varkappa_1'(0) = 0$. Обозначим через A_2 множество неразложимых хр. компонент для $\varkappa_1(t)$ и положим

$$\beta_2 = \sup_{\psi \in A_2} M_r[\psi^\circ].$$

В силу свойства 3) функционала M_r имеем $\beta_2 \leqslant M_r[\varkappa_1] \leqslant M_r[\varphi]$. Выберем из множества A_2 хр. компоненту $\psi_2(t)$ такую, что

$$M_r[\overset{\circ}{\psi}_2] \geqslant \beta_2/2,$$

и рассмотрим разложение

$$\varphi(t) = \overset{\circ}{\psi}_1(t)\, \overset{\circ}{\psi}_2(t)\, \varkappa_2(t).$$

Для функции $\varkappa_2(t)$ проводим такое же рассуждение, как для $\varkappa_1(t)$ и т. д.

Если после некоторого конечного числа шагов придем к разложению

$$\varphi(t) = \overset{\circ}{\psi}_1(t)\, \overset{\circ}{\psi}_2(t) \ldots \overset{\bullet}{\psi}_n(t)\, \varkappa_n(t), \tag{4}$$

где $\varkappa_n(t)$ не имеет неразложимых хр. компонент, то утверждение теоремы доказано.

Если для любого n функция $\varkappa_n(t)$ имеет неразложимые хр. компоненты, то мы получаем бесконечную последовательность разложений (4). При этом функция $\psi_n(t)$ выбирается из множества A_n неразложимых хр. компонент функции $\varkappa_{n-1}(t)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$M_r[\overset{\circ}{\psi}_n] \geqslant \beta_n/2, \tag{5}$$

где

$$\beta_n = \sup_{\psi \in A_n} M_r[\overset{\circ}{\psi}_n].$$

Рассмотрим последовательность функций

$$\Psi_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \overset{\circ}{\psi}_k(t).$$

Из (4) видно, что функции $\Psi_n(t)$ являются хр. компонентами для $\varphi(t)$. Кроме того, так как $(d/dt)\,\overset{\circ}{\psi}_k(0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, то и $\Psi_n'(0) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Применяя лемму 3, заключаем, что функции $\Psi_n(t)$ ограничены в совокупности в любой полосе вида $|\operatorname{Im} t| \leqslant R_1 < R$.

Далее, по лемме 2 имеем $\overset{\circ}{\psi}_k(i\eta) \geqslant 1$, $-R < \eta < R$. Поэтому $\Psi_n(i\eta) \leqslant \Psi_{n+1}(i\eta)$, $-R < \eta < R$, и, следовательно, на интервале $t = i\eta$, $-R < \eta < R$, последовательность $\Psi_n(t)$ сходится. Применяя классическую теорему Витали ([5], стр. 194), заключаем, что последовательность $\Psi_n(t)$ сходится равномерно на любом компакте, лежащем в полосе $|\operatorname{Im} t| < R$.

В силу леммы 4 функция

$$\Psi(t) = \lim_{n\to\infty} \Psi_n(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \overset{\circ}{\psi}_k(t) \tag{6}$$

является хр. компонентой для $\varphi(t)$, следовательно,

$$\psi(t) = \Psi(t)\,\varkappa(t), \tag{7}$$

где $\varkappa(t)$ — хр. ф. Остается показать, что $\varkappa(t)$ не имеет неразложимых хр. компонент.

В силу равномерной на отрезке $t = i\eta$, $-r \leqslant \eta \leqslant r$ сходимости бесконечного произведения (6) имеем

$$M_r\,[\overset{\circ}{\psi}_n] = \max_{-r\leqslant\eta\leqslant r} \ln \overset{\circ}{\psi}_n(i\eta) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Поэтому из (5) вытекает, что

$$\beta_n \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{8}$$

Предположим, что $\varkappa(t)$ имеет неразложимые хр. компоненты; пусть $\varkappa_0(t)$ одна из них. Из (4), (6) и (7) следует, что

$$\varkappa_n(t) = \left\{\prod_{k=n+1}^{\infty} \overset{\circ}{\psi}_k(t)\right\}\varkappa(t).$$

Отсюда видно, что $\varkappa_0(t)$ является неразложимой хр. компонентой и для $\varkappa_n(t)$, то есть $\varkappa_0(t) \in A_{n+1}$. Поэтому

$$M_r\,[\overset{\circ}{\varkappa}_0] \leqslant \beta_{n+1}.$$

Так как это неравенство справедливо при любом $n = 1, 2, \ldots$, то, учитывая (8), получим

$$M_r\,[\overset{\circ}{\varkappa}_0] = 0.$$

Из свойства 2) функционала M_r следует, что $\overset{\circ}{\varkappa}_0(t) \equiv 1$, откуда $\varkappa_0(t) = e^{i\alpha t}$, где α — некоторое действительное число. Это противоречит предположению о неразложимости функции $\varkappa_0(t)$. Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Пусть хр. ф. $\varphi(t)$ не имеет неразложимых хр. компонент. Предположим, вопреки утверждению теоремы, что существует точка t_0, $|\operatorname{Im} t_0| < R$, такая, что $\varphi(t_0) = 0$. Обозначим через A множество всех хр. компонент функции $\varphi(t)$, которые обращаются в нуль в точке t_0.

Множество A непусто, так как, например, ему принадлежит сама функция $\varphi(t)$. Положим

$$\gamma = \inf_{\psi \in A} M_r[\psi^\circ].$$

Покажем, что существует хр. компонента $\psi(t) \in A$ такая, что $M_r[\psi^\circ] = \gamma$.

Выберем из множества A последовательность $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots$, такую, что

$$M_r[\overset{\circ}{\psi}_n] \to \gamma \quad (n \to \infty).$$

В силу леммы 3 функции $\overset{\circ}{\psi}_n(t)$ ограничены в совокупности в любой полосе $|\operatorname{Im} t| \leqslant R_1 < R$. Пользуясь принципом компактности теории аналитических функций, выделим подпоследовательность $\overset{\circ}{\psi}_{n_k}(t)$, равномерно сходящуюся в любой полосе $|\operatorname{Im} t| \leqslant$ $\leqslant R_1 < R$. Пусть

$$\psi(t) = \lim_{k \to \infty} \overset{\circ}{\psi}_{n_k}(t).$$

По лемме 4 функция $\psi(t)$ является хр. компонентой функции $\varphi(t)$. Очевидно, что $\psi(t_0) = 0$, поэтому $\psi(t) \in A$. Кроме того ясно, что $M_r[\psi] = \gamma$. Но из $(d/dt)\overset{\circ}{\psi}_n(0) = 0$ следует $(d/dt)\psi(0) = 0$, поэтому $\psi(t) = \psi^\circ(t)$ и $M_r[\psi^\circ] = \gamma$. Заметим, что так как $\psi(t_0) = 0$, то $\psi(t)$ не представляется в виде $\psi(t) = e^{i\alpha t}$, откуда в силу свойства 2) функционала M_r следует, что $\gamma > 0$.

Так как хр. ф. $\varphi(t)$ не имеет неразложимых хр. компонент, то хр. ф. $\psi(t)$ разложима. Рассмотрим разложение

$$\psi(t) = \varkappa_1(t)\varkappa_2(t), \tag{9}$$

где ни одна из функций $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ не совпадает с функцией вида $e^{i\alpha t}$, $\operatorname{Im}\alpha = 0$. Хотя бы одна из функций $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ должна обращаться в нуль в точке t_0. Пусть это будет функция $\varkappa_1(t)$, тогда $\varkappa_1(t) \in A$.

В силу леммы 1 можно считать, что $\varkappa_1'(0) = 0$. Так как $\varkappa_1(t) \not\equiv$ $\not\equiv \psi(t)$, то по свойству 3) функционала M_r имеем

$$M_r[\varkappa_1] < M_r[\psi],$$

откуда $M_r[\varkappa_1] < \gamma$, что невозможно по определению числа γ. Теорема доказана.

Следствие. *Неразложимые хр. ф. существуют. В самом деле, по теореме 2 всякая хр. ф. $\varphi(t)$ (например, $\varphi(t) = \cos t$), имеющая хоть один корень в полосе $|\operatorname{Im} t| < R$, имеет неразложимую хр. компоненту.*

В случае $R = \infty$ мы можем указать в явном виде пример неразложимой хр. ф. Для этого понадобится следующая лемма.

Лемма. *Целая функция*

$$\varphi_\alpha(t) = (1 - t^2)e^{-\alpha t^2}, \quad \alpha > 0, \tag{10}$$

является хр. ф. при $\alpha \geqslant \theta$ *и не является хр. ф. при* $0 < \alpha < \theta$, *где* θ — *корень уравнения* $1 + \theta + \ln \theta = 0$.

Эта лемма, ее доказательство, а также замечание 1 сообщены нам И. В. Островским и приводятся здесь с его согласия.

Доказательство. Неравенство $|\varphi_\alpha(\xi + i\eta)| \leqslant \varphi_\alpha(i\eta)$ равносильно неравенству

$$\frac{1}{\xi^2}\ln\frac{|1-t^2|}{1+\eta^2} \leqslant \alpha, \quad (t = \xi + i\eta),$$

поэтому функция $\varphi_\alpha(t)$ является хр. ф. для тех и только для тех значений α, которые удовлетворяют неравенству

$$\alpha \geqslant \theta = \sup_{-\infty < \xi,\, \eta < \infty} f(\xi, \eta),$$

где

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{\xi^2}\ln\frac{|1-t^2|}{1+\eta^2} = \frac{1}{2\xi^2}\ln\left\{1 + \xi^2\frac{\xi^2 + 2\eta^2 - 2}{(1+\eta^2)^2}\right\}.$$

Рассмотрим на (ξ, η)-плоскости кривые C_ρ с уравнением

$$\xi^2 + 2\eta^2 - 2 = \rho(1+\eta^2)^2.$$

На кривой C_ρ имеем

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{2\xi^2}\ln(1 + \rho\xi^2).$$

Если $\rho \leqslant 0$, то на кривой C_ρ выполняется $f(\xi, \eta) \leqslant 0$, поэтому в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением кривых C_ρ при $\rho > 0$. Пусть

$$G(\rho) = \max_{(\xi, \eta) \in C_\rho} f(\xi, \eta).$$

Так как функция $y^{-1}\ln(1+y)$ является убывающей на полуоси $y \geqslant 0$, то

$$G(\rho) = \frac{1}{2\xi^2(\rho)}\ln(1 + \rho\xi^2(\rho)),$$

где

$$\xi^2(\rho) = \min_{(\xi, \eta) \in C_\rho} \xi^2.$$

На кривой C_ρ выполняется

$$\xi^2 = \rho(1+\eta^2)^2 + 2 - 2\eta^2,$$

поэтому имеем

$$\xi^2(\rho) = \begin{cases} 2 + \rho, & \rho \geqslant 1, \\ 4 - 1/\rho, & {}^1/_4 \leqslant \rho \leqslant 1, \\ 0, & 0 < \rho \leqslant {}^1/_4. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$G(\rho) = \begin{cases} \dfrac{\ln(\rho+1)}{\rho+2}, & \rho \geqslant 1, \\ \dfrac{\rho\ln(4\rho)}{2(4\rho-1)}, & {}^1/_4 \leqslant \rho \leqslant 1, \\ \rho/2, & 0 < \rho \leqslant {}^1/_4. \end{cases}$$

С помощью стандартных приемов нахождения максимума получаем, что максимум $G(\rho)$ достигается для значения $\rho=\rho_0$, удовлетворяющего уравнению

$$(\rho+1)\ln(\rho+1)=\rho+2.$$

Легко видеть, что $\rho_0>1$ и поэтому

$$G(\rho_0)=\frac{1}{\rho_0+1}.$$

Так как

$$\theta=\sup_{-\infty<\xi,\,\eta<\infty} f(\xi,\eta)=\sup_{\rho} G(\rho)=G(\rho_0)=\frac{1}{\rho_0+1},$$

то утверждение леммы доказано. Вычисления показывают, что $0{,}27<\theta<0{,}28$.

Покажем теперь, что хр. ф. $\varphi_\theta(t)$ является неразложимой хр. ф. $(R=\infty)$. Рассмотрим разложение

$$\varphi_\theta(t)=\psi_1(t)\,\psi_2(t),$$

где $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ — хр. ф. Так как всякая хр. ф. принимает на мнимой t-оси положительные значения, то корни хр. ф. расположены симметрично относительно этой оси. Функция $\varphi_\theta(t)$ имеет два корня $(+1)$ и (-1), поэтому одна из хр. ф. $\psi_j(t)$ — пусть это будет $\psi_1(t)$ — вовсе не имеет корней, а другая — пусть $\psi_2(t)$ — имеет оба корня $(+1)$ и (-1).

Так как ([2], стр. 72) порядки компонент не выше порядка самой хр. ф., то порядки функций $\psi_j(t)$ не превосходят 2. Применяя к $\psi_1(t)$ теорему Марцинкевича ([2], стр. 65), заключаем, что

$$\psi_1(t)=\exp\{-\gamma t^2+i\beta t\},\quad \gamma\geqslant 0,\ \operatorname{Im}\beta=0.$$

Для хр. ф. $\psi_2(t)$ получаем выражение

$$\psi_2(t)=\varphi_\theta(t)/\psi_1(t)=\varphi_{\theta-\gamma}(t)\,e^{-i\beta t}.$$

Отсюда видно, что функция $\varphi_{\theta-\gamma}(t)$ тоже является хр. ф. Это возможно лишь при $\gamma\leqslant 0$. Поэтому $\gamma=0$, $\psi_1(t)=e^{i\beta t}$, а это и означает, что функция $\varphi_\theta(t)$ неразложима.

Замечание 1. Покажем, что характеристическая функция неразложимого закона может оказаться разложимой хр. ф. Рассмотрим функцию (10) при $\alpha=\frac{1}{2}$. Известно ([2], стр. 89), что в этом случае она является х. ф. неразложимого закона. Но

$$\varphi_{1/2}(t)=\varphi_\theta(t)\exp\left\{-\left(\frac{1}{2}-\theta\right)t^2\right\},$$

и, следовательно, $\varphi_{1/2}(t)$ — разложимая хр. ф. $(0<R\leqslant\infty)$.

Замечание 2. Известная теорема Д. А. Райкова ([2], стр. 69) гласит, что если характеристическая функция $\varphi(t)$ голоморфна в полосе $|\operatorname{Im} t|<R$, то в той же полосе голоморфны и все ее

компоненты. Возникает вопрос, может ли быть эта теорема перенесена на хр. ф. и хр. компоненты в следующей формулировке. Если $\varphi(t)$ — хр. ф. в полосе $|\operatorname{Im} t| < R$, а в полосе $|\operatorname{Im} t| < R_1 < R$ выполнено

$$\varphi(t) = \varphi_1(t)\,\varphi_2(t),$$

где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — хр. ф. в полосе $|\operatorname{Im} t| < R_1$, то $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ будут голоморфны и в полосе $|\operatorname{Im} t| < R$.

Ответ на этот вопрос отрицателен. Рассмотрим целую функцию

$$\psi_\alpha(t) = (1 - it)\, e^{-\alpha t^2}, \quad \alpha > \frac{1}{2}.$$

Замечая, что неравенство $|\psi_\alpha(\xi + i\eta)| \leqslant \psi_\alpha(i\eta)$ равносильно неравенству

$$\frac{1}{2\xi^2} \ln\left\{1 + \left(\frac{\xi}{1+\eta}\right)^2\right\} \leqslant \alpha$$

и беря в левой части максимум по ξ, легко приходим к выводу, что $\psi_\alpha(t)$ является хр. ф. в полосе

$$|\operatorname{Im} t| < 1 - \sqrt{\frac{1}{2\alpha}}.$$

Искомый контрпример получим, полагая

$$\varphi(t) = e^{-\alpha t^2}, \quad \varphi_1(t) = \psi_\alpha(t), \quad \varphi_2(t) = (1 - it)^{-1},$$

$$R = \infty, \quad R_1 = 1 - \sqrt{\frac{1}{2\alpha}}.$$

Замечание 3. Пример функции $\psi_\alpha(t)$ показывает, что хр. ф. в полосе может аналитически продолжаться в более широкую полосу, но без сохранения в последней «свойства хребта». Как известно [2, стр. 61], аналогичное обстоятельство невозможно для характеристических функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Хинчин. Об арифметике законов распределения. Бюлл. МГУ, Ai, 1937, 6—17.
2. Ю. В. Линник. Разложения вероятностных законов. Изд-во ЛГУ, 1960.
3. И. В. Островский. О некоторых классах безгранично делимых законов. Изв. АН СССР, серия матем., 34, № 4, 1970, 923—944.
4. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М. — Л., ГТТИ, 1949.
5. Е. Титчмарш. Теория функций. М. — Л., ГТТИ, 1951.

Поступила 23 декабря 1970 г.