УДК 517.925.3

Я. И. Житомирский, д-р физ.-мат. наук

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ПАРАМЕТР

Оценки решений дифференциальных уравнений, зависящих от параметра, справедливые при всех значениях аргумента и любых значениях комплексного параметра, используются в различных разделах анализа. Известны приложения этих оценок в вопросах единственности решения задачи Коши для линейных уравнений в частных производных [1, 2], при изучении единственности интегральных представлений [3], в вопросах разложения дифференциальных операторов по корневым функциям [4] и др.

Впервые весьма общий вариант такой оценки был получен в работе [1] (см. также [2]). Затем в [3] было дано более простое и красивое доказательство применительно к одному уравнению, позволившее также освободиться от некоторых предположений о регулярности поведения коэффициентов.

Ниже получим упомянутую оценку в весьма общей ситуации.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dy(x, \lambda)}{dx} = A(x, \lambda)\, y(x, \lambda). \tag{1}$$

в вещественной ($x \in R^1$) либо в комплексной ($x \in C^1$) области; λ — произвольное комплексное число; $y(x, \lambda) = \{ y_1(x, \lambda), \ldots, y_N(x,$

$\lambda)\}$ — комплекснозначная вектор-функция; $A(x, \lambda)$ — матрица, $N \times N$, элементы которой $A_{ij}(x, \lambda)$ — комплекснозначные функции.

Теорема. *Пусть* $A_{ij}(x, \lambda)$, $i, j = 1, \ldots, N$ — *непрерывные функции при* $x \in R^1$ (*или* $x \in C^1$), $\lambda \in C^1$. *Обозначим*

$$B_{ij}(r, \rho) = \sup_{\substack{|x| \leqslant r \\ |\lambda| \leqslant \rho}} |A_{ij}(x, \lambda)|, \quad i, j = 1, \ldots, N; \tag{2}$$

$$B(r, \rho) = (B_{ij}(r, \rho))_{ij=1}^{N};$$

$$\det(\mu E - B(r, \rho)) \equiv \mu^N + \sum_{k=0}^{N-1} B_k(r, \rho)\mu^k; \tag{3}$$

$$\int(r, \rho) = \max_{0 \leqslant k \leqslant N-1} |B_k(r, \rho)|^{\frac{1}{N-k}}. \tag{4}$$

Тогда для фундаментальной матрицы решений $Y(x, \lambda)$ *системы* (1), *удовлетворяющей условию* $Y(0, \lambda) = E$, *справедлива оценка*

$$\|Y(x, \lambda)\| \leqslant C(1 + \|B(|x|, |\lambda|)\| |x|)^N \exp\{C_1 |x| \int(|x|, |\lambda|)\}, \tag{5}$$

где постоянные C *и* C_1 *не зависят от* x *и* λ.

Доказательство. Матрицу $Y(x, \lambda)$ можно представить в виде

$$Y(x, \lambda) = E + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x A(t_1, \lambda)\,dt_1 \int_0^{t_1} A(t_2, \lambda)\,dt_2 \ldots \int_0^{t_{k-1}} A(t_k, \lambda)\,dt_k.$$

В силу (2) справедлива оценка

$$\mathrm{mod}\left\{\int_0^x A(t_1, \lambda)\,dt_1 \int_0^{t_1} A(t_2, \lambda)\,dt_2 \ldots \int_0^{t_{k-1}} A(t_k, \lambda)\,dt_k\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{k!}(|x| B(|x|, |\lambda|))^k,$$

где неравенство понимается поэлементно, а символ $\mathrm{mod}\{\cdot\}$ означает матрицу, составленную из абсолютных величин элементов матрицы $\{\cdot\}$.

Поэтому

$$\|Y(x, \lambda)\| \leqslant \|\exp\{|x| B(|x|, |\lambda|)\}\|. \tag{6}$$

Для дальнейших оценок используется следующая

Лемма [5, с. 78]. *Пусть* P — *произвольная матрица* $m \times m$ *с комплексными элементами*, μ_j — *характеристические корни* P *и* $\Lambda = \max_j \mathrm{Re}\,\mu_j$. *Тогда при* $t \geqslant 0$

$$\|e^{tP}\| \leqslant e^{t\Lambda}(1 + 2t\|P\| + \cdots + (2t)^{m-1}\|P\|^{m-1}). \tag{7}$$

Полагая в (7) $t=|x|$, $P=B(|x|, |\lambda|)=B$, из (6) получаем

$$\|Y(x, \lambda)\| \leqslant e^{\Lambda |x|} (1+2|x|\,\|B\|+\cdots+(2|x|)^{N-1}\|B\|^{N-1}) \leqslant \leqslant C_1 e^{\Lambda|x|}(1+|x|\,\|B\|)^N. \tag{7'}$$

Докажем теперь, что характеристические корни $\mu(r, \rho)$ матрицы $B(r, \rho)$ удовлетворяют оценке

$$|\mu(r, \rho)| \leqslant C_2 S(r, \rho), \tag{8}$$

где $S(r, \rho)$ определяется формулами (3), (4). Действительно, если для некоторого корня $\mu(r, \rho)$ оценка (8) неверна, то найдется последовательность (r_ν, ρ_ν), стремящаяся к бесконечности, такая, что $|\mu(r_\nu, \rho_\nu)| > \nu S(r_\nu, \rho_\nu)$.

Тогда из (3) получим

$$1+\sum_{k=0}^{N-1} (\mu(r_\nu, \rho_\nu))^{k-N} B_k(r_\nu, \rho_\nu) \equiv 0.$$

Отсюда ясно, что при некотором K для некоторой подпоследовательности $\nu_l \to \infty$ справедлива оценка

$$|B_k(r_{\nu_l}, \rho_{\nu_l})(\mu(r_{\nu_l}, \rho_{\nu_l}))^{k-N}| \geqslant C > 0,$$

откуда

$$|B_k(r_{\nu_l}, \rho_{\nu_l})| \geqslant C|\mu(r_{\nu_l}, \rho_{\nu_l})|^{N-k} \geqslant C\nu_l^{N-k}(S(r_{\nu_l}, \rho_{\nu_l}))^{N-k},$$

что противоречит (4).

Используя (8) и (7'), получаем оценку (5).

В заключение в качестве примера рассмотрим уравнение

$$y^{(N)}+\sum_{k=0}^{N-1} P_k(x, \lambda)\, y^{(k)}=0, \tag{9}$$

коэффициенты которого $P_k(x, \lambda)$ являются непрерывными функциями, удовлетворяющими при всех значениях $x \in R^1$ (или $x \in C^1$), $\lambda \in C^1$, оценкам

$$|P_k(x, \lambda)| \leqslant C(1+|x|^{m_k}+|\lambda|^{l_k}),\quad k=0,\ 1 \ldots,\ N-1. \tag{10}$$

Обозначим $\alpha=\max\limits_k \dfrac{m_k}{N-k}$, $\beta=\max\limits_k \dfrac{l_k}{N-k}$. Тогда для фундаментальной системы решений $y_1(x, \lambda), \ldots, y_N(x, \lambda)$ уравнения (9), нормированной условиями $y_k^{(m)}(0, \lambda)=\delta_{k\,m+1}$, $m=0, \ldots, N-1$, $k=1, \ldots, N$, справедливы оценки

$$|y_k(x, \lambda)| \leqslant C_1 \exp\{C_2|x|(|x|^\alpha+|\lambda|^\beta)\}, \tag{11}$$

где постоянные C_1 и C_2 не зависят от x и λ.

Действительно, уравнение (9) можно записать в виде системы (1), причем для функций $B_k(r, \rho)$ в силу (10) справедливы оценки

$$|B_k(r, \rho)| \leqslant C(1 + r^{m_k} + \rho^{l_k}), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Отсюда $S(r, \rho) \leqslant C'(1 + r^{\alpha} + \rho^{\beta})$, что на основании (5) приводит к (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Житомирский Я. И. Классы единственности решения задачи Коши.— «Докл. АН СССР», 1967, т. 172, № 6, с. 1258—1261.
2. Житомирский Я. И. Классы единственности решения задачи Коши для линейных уравнений с растущими коэффициентами. — «Изв. АН СССР», 1967, т.31, вып. 4, с. 763—782.
3. Золотарев Г. Н. Теоремы единственности для одного класса интегральных представлений. —«Мат. сб.», 1969, т. 78 (120), № 3, с. 408—424.
4. Ткаченко В. А. О разложении целой функции конечного порядка по корневым функциям одного дифференциального оператора. — «Мат. сб.», 1972, т. 89 (131), № 4, с. 558—568.
5. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1958. 307 с.