С.Н. Зиненко

Векторный и тензорный анализ

Элементы дифференциальной геометрии и их приложения к механике

(сборник задач)

2014

1. Естественный трехгранник кривой

<table>
<tr><td colspan="2">№ 1.1. Дано уравнение траектории движения материальной точки $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t)$
Найти величину и направление скорости $\vec{\boldsymbol{v}} = v \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{v}}$ и ускорения $\vec{\boldsymbol{w}} = w \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{w}}$
Разложить ускорение $\vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\boldsymbol{w}}_{\parallel} + \vec{\boldsymbol{w}}_{\perp}$ на касательную и нормальную составляющие</td></tr>
<tr><td>$\vec{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{bmatrix} \cos t^2 \\ \sin t^2 \\ t^2 \end{bmatrix} \qquad \forall t$</td><td>$\vec{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{bmatrix} \cos t^3 \\ \sin t^3 \\ t^3 \end{bmatrix} \qquad \forall t$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 1.2. Дано параметрическое уравнение кривой $\vec{\boldsymbol{r}}(t)$
Перейти к естественной параметризации $\vec{\boldsymbol{\rho}}(l)$
Построить уравнения ребер и граней естественного трехгранника кривой в случаях a) естественной и b) исходной (некоторой произвольной) параметризации</td></tr>
<tr><td>$L = \left\{ \vec{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} \cos e^t \\ \sin e^t \\ e^t \end{bmatrix} \right\}, \qquad t_0 = 0$</td><td>$L = \left\{ \vec{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \\ e^t \end{bmatrix} \right\}, \qquad t_0 = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 1.3. Построить уравнения ребер и граней естественного трехгранника кривой</td></tr>
<tr><td>$L = \left\{ \vec{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} t \cos t \\ t \sin t \\ t \end{bmatrix} \right\}, \qquad t_0 = \pi$</td><td>$L = \left\{ \vec{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} t \cos t - \sin t \\ t \sin t + \cos t \\ t \end{bmatrix} \right\}, \quad t_0 = \pi$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 1.4. Проверить, что кривая имеет в каждой точке одну и ту же соприкасающуюся плоскость. Показать, что кривая лежит в этой плоскости</td></tr>
<tr><td>$L = \left\{ \vec{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} a \cos t \\ b \sin t \\ b \cos t + a \sin t \end{bmatrix} \right\}$</td><td>$L = \left\{ \vec{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} a \operatorname{ch} t \\ b \operatorname{sh} t \\ b \operatorname{ch} t - a \operatorname{sh} t \end{bmatrix} \right\}$</td></tr>
</table>

2. Кривизна и кручение кривой

<table>
<tr><td colspan="2">№ 2.1. Дано уравнение траектории движения материальной точки $\vec{r} = \vec{r}(t)$ Найти кривизну k_τ и радиус кривизны d_τ. Проверить для составляющих ускорения $\vec{w} = \vec{w}_{||} + \vec{w}_{\perp}$, что $w_{||} = v'$, $w_{\perp} = \frac{v^2}{d_\tau}$</td></tr>
<tr><td>$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} \cos t^2 \\ \sin t^2 \\ t^2 \end{bmatrix} \qquad \forall t$</td><td>$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} \cos t^3 \\ \sin t^3 \\ t^3 \end{bmatrix} \qquad \forall t$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 2.2. Дано параметрическое уравнение кривой $\vec{r}(t)$
Найти кривизну k_τ и кручение k_β в случаях
a) естественной и b) исходной (некоторой произвольной) параметризации</td></tr>
<tr><td>$L = \left\{ \vec{r} = \begin{bmatrix} \cos e^t \\ \sin e^t \\ e^t \end{bmatrix} \right\}$</td><td>$L = \left\{ \vec{r} = \begin{bmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \\ e^t \end{bmatrix} \right\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">№ 2.3. Проверить, что кривизна и кручение винтовой линии постоянны</td></tr>
<tr><td>“правый винт”
$L = \left\{ \vec{r} = \begin{bmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ bt \end{bmatrix} \right\} \qquad (a,\, b > 0)$</td><td>“левый винт”
$L = \left\{ \vec{r} = \begin{bmatrix} a\cos(-t) \\ a\sin(-t) \\ bt \end{bmatrix} \right\} \qquad (a,\, b > 0)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Найти кривизну и кручение кривой в заданной точке</td></tr>
<tr><td>№ 2.4.
$L = \left\{ \begin{bmatrix} x = pt + x_0 \\ y = qt + y_0 \\ z = rt + z_0 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \forall t$

№ 2.5.
$L = \left\{ \vec{r} = \begin{bmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ t \end{bmatrix} \right\}, \qquad t_0 = \pi$

№ 2.6.
$L = \left\{ \vec{r} = \begin{bmatrix} a\cos t \\ b\sin t \\ b\cos t + a\sin t \end{bmatrix} \right\}, \quad \forall t$</td><td>№ 2.4.
$L = \left\{ \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r} \right\}, \quad \forall (x, y, z)$

№ 2.5.
$L = \left\{ \vec{r} = \begin{bmatrix} t\cos t - \sin t \\ t\sin t + \cos t \\ t \end{bmatrix} \right\}, \quad t_0 = \pi$

№ 2.6.
$L = \left\{ \vec{r} = \begin{bmatrix} a\,\mathrm{ch}t \\ b\,\mathrm{sh}t \\ b\,\mathrm{ch}t - a\,\mathrm{sh}t \end{bmatrix} \right\}, \qquad \forall t$</td></tr>
</table>

3. Центр инерции

<table>
<tr><td colspan="2">Найти центр инерции тела V с объемной плотностью $\rho(\vec{r})$</td></tr>
<tr><td>

№ 3.1.

$V = \left\{ x,\ y\ ,\ z\ \geq\ 0,\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1 \right\}\ (a,\ b,\ c > 0)$

$\rho = const$

№ 3.2.

$V = \left\{ z \geq \sqrt{x^2 + y^2},\quad z \leq a \right\}$

$\rho(\vec{r}) = \left(x^2 + y^2 \right)^2 \cdot z$

№ 3.3.

$V = \left\{ z \geq \sqrt{x^2 + y^2},\quad x^2 + y^2 + z^2 \leq az \right\}$

$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$

</td><td>

№ 3.1.

$V = \left\{ x,\ y \geq 0,\ z \leq c,\ z \geq ax + by \right\}\ \ (a,\ b,\ c > 0)$

$\rho = const$

№ 3.2.

$V = \left\{ z \geq x^2 + y^2,\quad z \leq a^2 \right\}$

$\rho(\vec{r}) = \left(x^2 + y^2 \right) \cdot z^3$

№ 3.3.

$V = \left\{ z \geq \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \right\}$

$\rho(\vec{r}) = x^2 + y^2 + z^2$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

№ 3.4. Найти центр инерции поверхности S с поверхностной плотностью $\rho(\vec{r})$

</td></tr>
<tr><td>

$S = \left\{ z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 \right),\quad x^2 + y^2 \leq a^2 \right\}$

$\rho(\vec{r}) = \frac{z}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$

</td><td>

$S = \left\{ z = \sqrt{x^2 + y^2},\quad x^2 + y^2 \leq a^2 \right\}$

$\rho(\vec{r}) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot z^2$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

№ 3.5. Найти центр инерции кривой L с линейной плотностью $\rho(\vec{r})$

</td></tr>
<tr><td>

$L = \left\{ \left[\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = a\sin t\ , \\ z = bt \end{array} \right. \qquad t \in \left[0,\ 2\pi \right] \right\}$

$\rho(\vec{r}) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot z$

</td><td>

$L = \left\{ \left[\begin{array}{l} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t\ , \\ z = e^{-t} \end{array} \right. \quad t \in \left[0, +\infty \right) \right\}$

$\rho(\vec{r}) = \left(x^2 + y^2 \right) \cdot z$

</td></tr>
</table>

4. Тензор инерции

Твердое тело V с плотностью $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$ вращается вокруг начала координат с угловой скоростью $\vec{\boldsymbol{\omega}}$. Найти тензор инерции $\mathbf{J}$, главные оси инерции, главные моменты инерции, эллипсоид инерции

№ 4.1. $V=\left\{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1\right\}$ $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}}}$	**№ 4.1.** $V=\left\{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 2\dfrac{z}{c}\right\}$ $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})=\dfrac{1}{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}}$
№ 4.2. $V=\left\{c\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}\le z\le c\right\}$ $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})=\dfrac{z}{c}\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}$	**№ 4.2.** $V=\left\{c\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)\le z\le c\right\}$ $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})=\dfrac{z}{c\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}}$
№ 4.3. $V=\left\{x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\le 1\right\}$ $\rho=const$	**№ 4.3.** $V=\left\{0\le x\le a,\ \ 0\le y\le b,\ \ 0\le z\le c\right\}$ $\rho=const$

(в последнем примере главные оси найти в “симметричном” случае $a=b=c$)