УДК 517.937

Г. М. СКЛЯР, В. Я. ШИРМАН

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В статье изложены результаты исследования асимптотической устойчивости дифференциального уравнения: $dx/dt = Ax, x \in X$, $A \in [X]$ **(1)**. Здесь X — бесконечномерное банахово пространство, $[X]$ — пространство линейных ограниченных операторов над X.

Уравнение (1) называют асимптотически устойчивым, если $\forall x \in X$: $\|\exp(At)\,x\| \to 0\ (t \to +\infty)$, и равномерно асимптотически устойчивым, если $\|\exp(At)\| \to 0\ (t \to +\infty)$. Критерием равномерной асимптотической устойчивости уравнения (1) является условие для спектра $\sigma(A)$ оператора A [1]: $\mathrm{Re}\,(\sigma(A)) < 0$ **(2)**.

Уравнение (1) называют устойчивым, если $\exists C > 0: \forall t \geqslant 0$ $\|\exp(At)\| < C$. Для устойчивости уравнения (1) необходимо $\mathrm{Re}\,(\sigma(A)) \leqslant 0$ **(3)**.

Представляет интерес случай, когда выполнено условие (3) и $\sigma(A)$ имеет непустое пересечение с мнимой осью. Оператор A называют диссипативным, если $\forall t \geqslant 0: \|\exp(At)\| \leqslant 1$. Ясно, что для диссипативных операторов выполнено условие (3). Известна теорема, дающая достаточные условия асимптотической устойчивости уравнения (1), когда A диссипативный оператор в гильбертовом пространстве, такой, что лебегова мера пересечения $\sigma(A)$ с мнимой осью равна нулю [2, с. 102]. Результат [2] обобщен в статье на случай банахова пространства. Дан критерий асимптотической устойчивости уравнения (1) в классе операторов A, спектр которых включает не более чем счетное число точек на мнимой оси. Рассматриваемый класс операторов включает, в частности, вполне непрерывные и квазинильпотентные операторы. Критерий принимает особенно удобную форму, когда X-рефлексивное банахово пространство. Применение доказанных утверждений иллюстрируется примерами, попутно разъясняющими роль рефлексивности пространства X.

1. Теорема об асимптотической устойчивости в произвольном банаховом пространстве. Теорема 1. *Пусть* $(X, \|\cdot\|)$ — *банахово пространство,* $A \in [X]$, *причем* $\sigma(A) \cap (iR)$ *не более чем счетное множество* ((iR) — *мнимая ось*). *Чтобы уравнение (1) было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно выполнение условий:*

1) Существует норма, эквивалентная исходной, в которой оператор A диссипативен

2) $\forall\lambda \in (\sigma(A) \cap (iR)) : \overline{R(A-\lambda E)} = X$. ($\overline{R(A-\lambda E)}$ — замыкание образа оператора $A - \lambda E$).

Необходимость. Пусть уравнение (1) асимптотически устойчиво в исходной норме. По теореме Банаха—Штейнгауза: $\exists C > 0 : \|\exp(At)\| \leqslant C, (t \geqslant 0)$. Введем новую норму $\|x\|_1 = \sup\limits_{t\geqslant 0} \|\exp(At)x\|$. Очевидно, что $\|x\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant C\|x\|$ и что оператор A диссипативен в новой норме.

Пусть $\exists\lambda \in (iR) : \overline{R(A-\lambda E)} \neq X$. Тогда существует функционал $f \in X^*$, такой что $f \neq 0$, $(A^* - \lambda E) f = 0$. Поэтому $\exp(A^*t) f = \exp(\lambda t) f$. Пусть $\langle f, x\rangle \neq 0$, тогда $\langle f, x\rangle = \langle \exp((A^* - \lambda E)t) f, x\rangle = \langle f, \exp((A-\lambda E)t) x\rangle \neq 0$, что противоречит асимптотической устойчивости.

Достаточность. Пусть оператор A диссипативен в норме $\|\cdot\|_1$, эквивалентной исходной. Тогда для любого $x \in X : \|\exp(At_1) x\|_1 \geqslant \|\exp(At_2) x\|_1 \geqslant 0$, $(t_2 > t_1)$. Пусть L — подпространство: $L = \{x : \lim\limits_{t\to+\infty} \|\exp(At) x\|_1 = 0\}$ (L — замкнуто **в силу диссипативности** оператора A).

Если $L = X$, теорема доказана в силу эквивалентности норм.

Пусть $L \neq X$. В силу инвариантности L относительно A введем фактор-пространство $\widehat{X} = X/L$ с естественно индуцированной нормой $\|\cdot\|_F$ и фактор-оператор $\widehat{A}$ в нем. Как известно, $\widehat{X}^*$ изометрично $L^\perp$. Отождествляем поэтому $\widehat{A}^*$ с $A^*|L^\perp$ (сужением A^* на $L^\perp$). При этом оператор $\widehat{A}$ диссипативен.

Кроме того, $\lim\limits_{t\to+\infty} \|\exp(\widehat{A}t)\widehat{x}\|_F = \lim\limits_{t\to+\infty} \|\exp(At) x\|_1 \neq 0$ $(\widehat{x} \neq 0)$. (4)

Покажем, что для спектра фактор-оператора $\widehat{A}$ справедливо $[(iR) \cap \sigma(\widehat{A})] \subset [(\sigma(A) \cap (iR)]$ **(5).**

Действительно, для $\lambda \in \sigma(\widehat{A}^*)$ и $\overline{\lambda \in \sigma(A^*)}$ из $\widehat{A}^* = A^* | L^\perp$ вытекает, что λ — точка остаточного спектра оператора $\widehat{A}^*$.

Последнее означает соблюдение условий: $R(\widehat{A}^* - \lambda E)$ — замкнутое подпространство $\widehat{X}^*$, $R(\widehat{A}^* - \lambda E) \neq X^*$, $\mathrm{Ker}(\widehat{A}^* - \lambda E) = \{0\}$.

Тогда по теореме о граничной точке спектра [1, с. 44] $\lambda \in \mathrm{Int}\sigma(\widehat{A}^*)$.

Поскольку $\sigma(\widehat{A}^*) = \sigma(\widehat{A})$, то $\lambda \in \mathrm{Int}\sigma(\widehat{A})$ **(6).**

Из диссипативности $\widehat{A}$ между тем следует $\operatorname{Re}\sigma(\widehat{A})\leqslant 0$. Поэтому для $\lambda\in[(iR)\cap\sigma(\widehat{A})]$ выполняется $\lambda\bar{\in}\operatorname{Int}\sigma(\widehat{A})$ **(7)**.

Противоречие между (6) и (7) доказывает (5).

Добьемся изометричности оператора $\exp(\widehat{A}t)$, вводя новую норму $\|x\|_{\lim}=\lim\limits_{t\to+\infty}\|\exp(\widehat{A}t)\widehat{x}\|_F$.

Ее введение корректно в силу (4). Новая норма неэквивалентна $\|\cdot\|$, но $\|\widehat{x}\|_{\lim}\leqslant\|\widehat{x}\|_F$ (8).

Пусть $\widehat{X}_{\lim}$ — пополнение $\widehat{X}$ по этой норме. Заметим, что оператор $\widehat{A}$ ограничен на пространстве $(\widehat{X},\|\cdot\|_{\lim})$, поскольку $\|\widehat{A}\widehat{x}\|_{\lim}=\lim\limits_{t\to+\infty}\|\exp(\widehat{A}t)\widehat{A}\widehat{x}\|_F\leqslant\|\widehat{A}\|_F\|\widehat{x}\|_{\lim}$. Поэтому существует однозначное непрерывное продолжение оператора $\widehat{A}$ на $(\widehat{X}_{\lim},\|\cdot\|_{\lim})$, которое обозначим $\widehat{A}_{\lim}$. Из (8) и непрерывности $\widehat{A}_{\lim}$ вытекает, что оператор $\exp(\widehat{A}_{\lim}t)$ является непрерывным продолжением оператора $\exp(\widehat{A}t)$ на $(\widehat{X}_{\lim},\|\cdot\|_{\lim})$. Поэтому оператор $\exp(\widehat{A}_{\lim}t)$ изометричен в $(\widehat{X}_{\lim},\|\cdot\|_{\lim})$, $(-\infty<t<+\infty)$.

Покажем, что $\sigma(\widehat{A}_{\lim})\subset\sigma(\widehat{A})\cap(iR)$ **(9)**.

Поскольку $\exp(\widehat{A}_{\lim})$ обратимая изометрия, то $\sigma(\widehat{A}_{\lim})\subset(iR)$ и все точки спектра оператора $\widehat{A}_{\lim}$ граничные. По теореме о граничной точке спектра [1, с. 44] имеем $\forall\lambda\in\sigma(\widehat{A}_{\lim})\exists\{y_n\}\subset\widehat{X}$: $:\|y_n\|_{\lim}=1,\|(\widehat{A}_{\lim}-\lambda E)y_n\|\underset{n\to\infty}{\to}0$. **(10)**

Если $\lambda\bar{\in}\sigma(\widehat{A})$, то существует $C>0$ такое, что $\|(\widehat{A}_{\lim}-\lambda E)\times\times y_n\|_{\lim}=\lim\limits_{t\to+\infty}\|\exp(\widehat{A}t)(\widehat{A}-\lambda E)y_n\|_F\geqslant C\lim\limits_{t\to+\infty}\|\exp(\widehat{A}t)y_n\|_F=C$.

Из (10) тогда имеем $\lambda\in\sigma(\widehat{A}_{\lim})$. Соотношение (9) доказано.

Из (5), (9) $\sigma(\widehat{A})_{\lim}\subset\sigma(A)\cap(iR)$, откуда $\sigma(\widehat{A}^*{}_{\lim})\subset\sigma(A^*)\cap(iR)$. Спектр $\sigma(\widehat{A}^*{}_{\lim})$ состоит поэтому не более чем из счетного числа точек, расположенных на мнимой оси. Он содержит изолированную точку $i\lambda_0$ $(\lambda_0\in R)$. Соответствующее $i\lambda_0$ инвариантное пространство обозначим G_0 $(G_0\subset\widehat{X}^*{}_{\lim})$. Введем оператор $(\widehat{A}^*{}_{\lim}-i\lambda_0E)|G_0$ (сужение оператора $(\widehat{A}^*{}_{\lim}-i\lambda_0E)$ на подпространство G_0). Поскольку его спектр сосредоточен в нуле, [illegible] операторы $\exp((\widehat{A}^*{}_{\lim}-i\lambda_0E)t)$, $(-\infty<t<+\infty)$ изометричны. функция $\psi(\xi)=\exp((\widehat{A}^*{}_{\lim}-i\lambda_0E)\xi)|G_0$ является целой, нуле[illegible] экспоненциального типа, ограниченной на вещественной оси. [illegible] теореме С. Н. Бернштейна имеем $\varphi(\xi) = E|G_0$, т. е. существует функционал $f \in (\widehat{X}_{\lim}, \|\cdot\|_{\lim})^*$ такой, что $A^*_{\lim} f = i\lambda_0 f$. Отсюда $\forall \widehat{x} \in \widehat{X}, \langle f, \widehat{A}\widehat{x}\rangle = \langle f, i\lambda_0 \widehat{x}\rangle$.

Согласно (8) для сужения функционала f имеем $f|\widehat{X} \in (\widehat{X}, \|\cdot\|_F)^*$, поэтому $\widehat{A}^*(f|\widehat{X}) = i\lambda_0(f|\widehat{X})$. Отсюда вытекает существование функционала g, такого, что $g \neq 0$, $g \in L^\perp$ и $A^*g = i\lambda_0 g$. Следовательно, $R(A - i\lambda_0 E) \subset \operatorname{Ker} g$, откуда $\overline{R(A - i\lambda_0 E)} \neq X$. Полученное противоречие доказывает теорему.

2. **Теорема об асимптотической устойчивости в рефлексивном банаховом пространстве** **Лемма.** *Пусть T_α $(\alpha \in U)$ — коммутативное семейство сжатий в банаховом пространстве X. Пусть* $\exists x_0 \in X$ $(x_0 \neq 0)$ $\forall \alpha \in U$, $\exists \lambda = \lambda(\alpha)$, такое что а) $|\lambda(\alpha)| = 1$; б) $T_\alpha x_0 = \lambda(\alpha) x_0$.
Тогда $\exists f_0 \in X^* : T_\alpha^* f_0 = \lambda(\alpha) f_0$, $f_0 \neq 0$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{T}_\alpha = \lambda^*(\alpha) T_\alpha$. Тогда $\widetilde{T}_\alpha x_0 = x_0$. Пусть $K = \{f \in X^* : \|f\| = 1,\ f(x_0) = \|x_0\|\}$.
По теореме Хана—Банаха множество K непусто. Множество K выпукло, ограничено и слабо* замкнуто. По теореме Банаха—Алаоглу оно является слабым* компактом. Поскольку операторы $\widetilde{T}^*_\alpha$ — сжатия, а $\langle \widetilde{T}_\alpha^* f, x_0\rangle = \langle f, \widetilde{T}_\alpha x_0\rangle = \langle f, x_0\rangle = \|x_0\|$ для любого $f \in K$, то коммутативное семейство линейных отображений $\widetilde{T}_\alpha^*$ переводит выпуклый слабо* компакт в себя. По теореме Маркова—Какутани $\exists f_0 \in K : \|f_0\| = 1$, $\widetilde{T}_\alpha^* f_0 = f_0$. Отсюда $T_\alpha^* f_0 = \lambda(\alpha) f_0$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Для ограниченного диссипативного оператора в рефлексивном банаховом пространстве X условие 2) теоремы 1 эквивалентно условию:* 2′) $\forall \lambda \in \sigma(A) \cap (iR)$ $\overline{\exists}$ вектор $x \neq 0$, такой что $Ax = \lambda x$.

Доказательство. Из условия 2′) вытекает второе условие теоремы 1. Действительно, если это не так, то $\exists f \in X^*$: $: A^* f = \lambda f$. Отсюда $\exp(A^* t) = \exp(\lambda t) f = \gamma(t) f$. Операторы $\exp(A^* t)$ — коммутирующие сжатия. Поэтому по лемме $\exists x \in X^{**} : \exp(A^{**} t)\, x = \exp(\lambda t)\, x$, $x \neq 0$. Отсюда, в силу рефлексивности X, дифференцированием получаем $Ax = \lambda x$. Это противоречит 2′).

Доказательство обратного утверждения проводится аналогично, но без использования рефлексивности пространства X.

Таким образом, для рефлексивного пространства X второе условие теоремы 1 заменяется более удобным условием 2′). Для нерефлексивных пространств X второе условие теоремы 1 неэквивалентно условию 2′). Ниже это показывается на примерах.

Замечание. Условие теоремы 1 о не более чем счетности множества $\sigma(A) \cap (iR)$ существенно. Пусть $A = iS$, где S — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, не имеющий собственных значений. Условие 2′) выполняется, однако уравнение (1) не будет асимптотически устойчивым.

3. **Примеры использования теорем об асимптотической устойчивости. Пример 1**. Пусть X — бесконечномерное банахово пространство. Оператор $A \in [X]$ — диссипативный и квазинильпотентный без собственных значений. Зададим оператор $\widehat{A}: [X] \to [X]$ формулой $\widehat{A}(Y) = AY$, где $Y \in [X]$. Оператор диссипативен, причем $\sigma(\widehat{A}) = \sigma(A) = \{0\}$. Для него выполнено условие 2'). Для единичного оператора выполняется, однако $E \overline{\in} R(\widehat{A})$. Уравнение $dY/dt = \widehat{A}(Y)$, $Y \in [X]$ не является тогда асимптотически устойчивым по теореме 1.

Замечание. Для любого бесконечномерного пространства X пространство $[X]$ нерефлексивно, что доказывается от противного.

Пусть $[X]$ рефлексивно. Тогда и подпространство V вполне непрерывных операторов $V \subset [X]$ также рефлексивно. Введем последовательность нормированных линейно независимых векторов $\{c_i\}$, $i = \overline{1, \infty}$ в X и последовательность вложенных ограниченных замкнутых выпуклых множеств в $V K_n = \{W \in V : \|W\| \leqslant 1,\ Wc_i = c_i,\ i = \overline{1, n}\}$. По теореме Хана—Банаха $K_n \neq \varnothing$ $n = \overline{1, \infty}$, откуда $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n \neq \varnothing$, что приводит к противоречию. Пространство $[X]$, следовательно, нерефлексивно.

Пример 2. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — естественный базис в X, где а) $X = l_p$, $1 < p < \infty$, или б) $X = l_1$ или в) $X = c_0$. Рассмотрим оператор $A = S - E$, где S — оператор правого сдвига; $Se_i = e_{i+1}$, $i = \overline{1, \infty}$. Поскольку оператор S — необратимая изометрия, то спектр $\sigma(S) = \{z \in C,\ |z| \leqslant 1\}$, откуда $\sigma(A) = \{z \in C,\ |z+1| \leqslant 1\}$. По признаку Лозинского оператор диссипативен, поскольку предел

$$\lim_{h\to+0} (\|x + hAx\| - \|x\|)/h \leqslant \lim_{h\to+0} (\|(1-h)x\| + \|hSx\| - \|x\|)/h = 0,$$

$x \in X$) неположителен [1, с. 93].

Перейдем к рассмотрению трех указанных случаев.

а) $X = l_p$, $1 < p < \infty$. Пространство X рефлексивно и выполнено условие 2). Уравнение (1) асимптотически устойчиво по теоремам 1 и 2.

б) $X = l_1$. Второе условие теоремы 1 не выполняется, поскольку для $f \in X^*$, $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ имеем $R(A) \subset \operatorname{Ker} f$. Уравнение (1) не является поэтому асимптотически устойчивым, хотя условие 2) и выполнено.

в) $X = c_0$. Уравнение (1) по теореме 1 асимптотически устойчиво. Действительно, вектора $e_i = \lim\limits_{k\to\infty} A x_k^i$, где $x_k^i = (0, 0, \ldots, 0, -1, -\exp(-\frac{1}{k}), -\exp(-\frac{2}{k}), \ldots)$ (-1 стоит на i-м **месте**), $i = \overline{1, \infty}$, образуют базис в c_0, так что $\overline{R(A)} = X$.

Пример 3. Пусть $X = L_2[0, 1]$, $Ax(\cdot) = -\int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau$, $x(\cdot) \in L_2[0, 1]$, $t \in [0, 1]$. Оператор A — диссипативный и квазинильпотентный без собственных значений. Уравнение (1) при этом асимптотически устойчиво по теоремам 1 и 2. Например, если $\tilde{x}(\tau) \equiv 1$, $\tau \in [0, 1]$, то $\exp(At)\,\tilde{x}(\tau) = J_0(2\sqrt{t\tau})$. Как известно, $J_0(z) = \sqrt{2/\pi z}\,\cos(z - \pi/4)$ $(z \to \infty)$, откуда $\|\exp(At)\,\tilde{x}(\tau)\|_{L_2[0, 1]} \to 0$ $(t \to +\infty)$.

Список литературы: 1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М.: Наука, 1970.—534 с. 2. *Секефальви—Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве.— М.: Мир, 1970.— 431 с.

Поступила в редколлегию 07.04.80.