ОБ ОДНОМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ СВОЙСТВЕ ФУНКЦИЙ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА ВНУТРИ УГЛА

В. С. Азарин

В этой работе доказывается одно характеристическое свойство функций вполне регулярного роста внутри угла. Для того чтобы сформулировать задачу, введем некоторые определения.

Пусть $f(z)$ голоморфная функция конечного порядка ρ внутри угла $\arg z \in (\theta_1, \theta_2)$ и $\rho(r)$ — ее уточненный порядок*.

Введем следующие обозначения:

$$h_f(r, \theta) = r^{-\rho(r)} \ln |f(re^{i\theta})|,$$

$$h_f(\theta) = \overline{\lim_{r \to \infty}} h_f(r, \theta).$$

Напомним, что функция $h_f(\theta)$ называется индикатором $f(z)$ при уточненном порядке $\rho(r)$, и что она ограничена сверху при $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$.

Определение ([1], стр. 182). Функция $f(z)$ называется функцией вполне регулярного роста на луче $\arg z = \theta$, если существует предел

$$h_f(\theta) = \lim_{r \to \infty} h_f(r, \theta),$$

где E_θ — множество нулевой верхней относительной меры**.

Если $f(z)$ является функцией вполне регулярного роста на каждом луче $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$, то она называется функцией вполне регулярного роста внутри угла (θ_1, θ_2).

Функции вполне регулярного роста в (θ_1, θ_2) обладают следующим свойством ([1], стр. 207):

Теорема А (Б. Я. Левин). *Если $f(z)$ и $\psi(z)$ — две функции, голоморфные внутри угла (θ_1, θ_2) и одна из них вполне регулярного роста, то индикатор произведения этих функций равен сумме индикаторов.*

В этой работе будет показано, что свойство, выраженное теоремой А, является характеристическим для функций вполне регулярного роста, а именно, будет доказана

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ функция голоморфная внутри угла (θ_1, θ_2) и $\rho(r)$ ее уточненный порядок. Если для любой функции $\psi(z)$, имеющей нормальный тип при том же уточненном порядке, имеет место равенство*

$$h_{f \cdot \psi}(\theta) = h_f(\theta) + h_\psi(\theta)$$

при всех $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$, то $f(z)$ — функция вполне регулярного роста.

Примечание. Из дальнейших построений видно, что для выполнения утверждения теоремы достаточно, чтобы $\psi(z)$ были целыми функциями.

---

* Т. е. такой уточненный порядок, при котором она имеет нормальный тип.

** Верхней относительной мерой множества $E \subset (0, \infty)$ называется величина, определенная равенством ([1], стр. 127)

$$m^*(E) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{1}{r} \operatorname{mes} \{E \cap (0, r)\}.$$

Доказательство этой теоремы довольно громоздко и распадается на два этапа.

Сначала будет показано, что если $f(z)$ не имеет вполне регулярного роста на луче $\arg z = \theta_0$, то функция $h_f(r, \theta_0)$ «существенно меньше» индикатора $h_f(\theta_0)$ на «достаточно большом» множестве C значений r.

Это свойство функции $f(z)$ позволит нам на втором этапе построить целую функцию $\Psi(z)$, обладающую тем свойством, что выполняется строгое неравенство

$$h_{f.\Psi}(\theta_0) < h_f(\theta_0) + h_\Psi(\theta_0),$$

т. е. доказать теорему 1.

§ 1. На первом этапе мы докажем 3 леммы.

Не оговаривая отдельно, мы будем в этих леммах предполагать, что $f(z)$ голоморфна внутри угла, содержащего положительный луч, порядка $\rho < \infty$ внутри этого угла и что $\rho(r)$ — ее уточненный порядок.

Лемма 0. *Пусть $f(z)$ не является функцией вполне регулярного роста на положительном луче. Тогда величина η_0, определенная равенством:*

$$\eta_0 = \inf m^*(E), \tag{1.1}$$

где inf *берется по тем множествам E, для которых имеет место соотношение*

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\overline{\in} E}} h_f(r, 0) = h_f(0), \tag{1.2}$$

строго положительна.

Доказательство*. Покажем сначала, что inf достигается на некотором множестве E_0.

Пусть $\varepsilon_i \downarrow 0$ и пусть E_i — последовательность множеств, для которых выполняется условие

$$m^*(E_i) - \eta_0 \leqslant \frac{1}{2i} \tag{1.3}$$

и условие (1,1).

Выберем последовательность $R_i \uparrow \infty$ так, чтобы она удовлетворяла следующим условиям:

а) $R_i/R_{i+1} < \frac{1}{i}$;

б) $\sup\limits_{R > R_{i+1}} \dfrac{\operatorname{mes}[E_i \cap (R_i, R)]}{R - R_i} \leqslant m^*(E_i) + \frac{1}{2i}$;

с) $\sup\limits_{\substack{r\geqslant R_i \\ r\overline{\in} E_i}} | h_f(r, 0) - h_f(0) | < \varepsilon_i$.

Покажем, что такой выбор возможен. Число R_1 выбираем так, чтобы выполнялось с) при $i = 1$. Это возможно по (1.2).

Пусть R_i выбрано. Используя соотношение

$$\frac{\operatorname{mes}[E_i \cap (R_i, R)]}{R - R_i} = \left\{\frac{\operatorname{mes}[E_i \cap (0, R)]}{R} - \frac{\operatorname{mes}[E_i \cap (0, R_i)]}{R}\right\} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{R_i}{R}\right)}$$

и определение верхней относительной меры для E_i, можно подобрать R_{i+1} так, чтобы выполнялись соотношения а) и б) и, кроме того, чтобы выполнялось соотношение с) для множества E_{i+1}. Последнее возможно ввиду свойства (1.2).

---

* Это доказательство является некоторой модификацией рассуждений, приведенных в [1], стр. 132—133.

Полагаем

$$E_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} [E_i \cap (R_i, R_{i+1})].$$

Вследствие свойства c) имеем

$$\sup_{\substack{r \in (R_i, R_{i+1}) \\ r \bar{\in} E_0}} |h_f(r, 0) - h_f(0)| \leqslant \sup_{\substack{r > R_i \\ r \bar{\in} E_i}} |h_f(r, 0) - h_f(0)| < \varepsilon_i.$$

Поэтому для E_0 выполняется условие (1.2) и, следовательно, выполняется неравенство

$$m^*(E_0) \geqslant \eta_0.$$

С другой стороны, имеем для $R_i < R < R_{i+1}$ соотношение

$$\operatorname{mes}[E_0 \cap (0, R)] = \sum_{k=1}^{i-1} \operatorname{mes}[E_k \cap (R_k, R_{k+1})] + \operatorname{mes}[E_i \cap (R_i, R)].$$

Используя (1.3) и б), получаем

$$\operatorname{mes}[E_0 \cap (0, R)] \leqslant \eta_0 R + 2 \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{2^k}(R_{k+1} - R_k) + 2 \cdot \frac{1}{2^i}(R - R_i),$$

откуда следует неравенство
$\operatorname{mes}[E_0 \cap (0, R)] \leqslant \eta_0 R + o(1)$ при $R \to \infty$,
т. е. E_0 — множество, на котором достигается inf в соотношении (1.1). Так как $f(z)$ — не является функцией вполне регулярного роста, то

$$m^*(E_0) = \eta_0 > 0,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 1. *Пусть $f(z)$ не является функцией вполне регулярного роста на положительном луче. Тогда существует такое $\delta > 0$ и последовательность дуг $l_k\{r_k e^{i\theta} : |\theta| < \delta\}$, что выполняется неравенство*

$$\overline{\lim_{r_k \to \infty}} \max_{l_k} h_f(r, \theta) = B < h_f(0).$$

Доказательство. При доказательстве этой леммы будет использована следующая

Теорема B (Б. Я. Левин) ([1], стр. 128, теорема 7).

Пусть функция $f(z)$ голоморфная и уточненного порядка $\rho(r)$ внутри угла $\alpha < \arg z < \beta$ и, кроме того, при некотором положительном $l < 1$, некотором положительном N и всех достаточно больших значениях r всякий круг

$$|z - re^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}| < lr \sin\frac{\beta-\alpha}{2} \tag{1.4}$$

содержит точку $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, в которой

$$\ln|f(z_1)| > -N r_1^{-\rho(r_1)}. \tag{1.5}$$

Тогда при любом $\eta > 0$ можно подобрать такое множество E_η положительных чисел с верхней относительной мерой, меньшей η, что при $r \bar{\in} E_\eta$ функция $h_f(r, \theta)$ равномерно непрерывна по θ.

В нашем случае полагаем $\alpha = -\beta$.

Если $f(z)$ не удовлетворяет условиям теоремы B, то выбрав число N так, чтобы было

$$-N < h_f(0)$$

и зафиксировав l, можно найти такую последовательность центров кругов r_k, что во всем круге (1.4) выполняется неравенство, противоположное (1.5). Отсюда следует утверждение леммы 1, если взять $\delta = \arcsin(l \sin\alpha)$.

Пусть теперь $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы В и пусть η_0 — величина, определенная в лемме 0.

Величина η_0 строго положительна, так как $f(z)$ не является функцией вполне регулярного роста на положительном луче.

Положим $\eta = \eta_0/2$ и выберем множество E_η по теореме В. Так как

$$m^*(E_\eta) < \eta_0,$$

то найдется последовательность $r_k \to \infty$ такая, что $r_k \bar{\in} E_\eta$ и

$$\lim_{r_k \to \infty} h_f(r_k, 0) = B_1 < h_f(0).$$

По теореме В можно выбрать δ так, чтобы при $|\theta| < \delta$ и $r \bar{\in} E_\eta$ выполнялось условие

$$|h_f(r, \theta) - h_f(r, 0)| < \frac{h_f(0) - B_1}{2} \overset{\text{def}}{=} \frac{\lambda}{2}.$$

Тогда, так как $r_k \bar{\in} E_\eta$, имеем

$$B = \overline{\lim_{r_k \to \infty}} \max_{l_k} h_f(r, \theta) \leqslant h_f(0) - \lambda/2 < h_f(0).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $f(z)$ не является функцией вполне регулярного роста на положительном луче. Тогда существуют такие $\lambda > 0$, $\xi > 0$ и такая последовательность $r_k \to \infty$, что неравенство*

$$h_f(r, 0) \leqslant h_f(0) - \lambda$$

выполняется при всех достаточно больших k для r, удовлетворяющих условию

$$|r - r_k| < \xi r_k.$$

Доказательство. Выберем последовательность $\{r_k\}$ и δ по лемме 1 и обозначим:

$$\lambda_1 = h_f(0) - B.$$

Обозначим через $H_k(z)$ наилучшую гармоническую мажоранту субгармонической функции

$$h_k(z) = r_k^{-\rho(r_k)} \ln|f(z)|$$

в области, ограниченной дугами:

$$\begin{aligned} L_1(r_k) &= \{z : r = r_k, |\theta| < \delta\}. \\ L_2(r_k) &= \{z : |z - r_k| = r_k \sin 2\delta\}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Для любого z из этой области имеем

$$h_k(z) \leqslant H_k(z) \leqslant \max_{z \in L_2(r_k)} h_k(z) \cdot \omega_{r_k}(L_2(r_k), z) + \max_{z \in L_1(r_k)} h_k(z) \cdot \omega_{r_k}(L_1(r_k), z),$$

где $\omega_{r_k}(L, z)$ гармоническая мера дуги L относительно области, ограниченной дугами (1.6). Если обозначить $\omega_1(L, \eta)$ гармоническую меру дуги относительно области, подобно сжатой с коэффициентом подобия r_k, то будет выполнено соотношение:

$$\omega_{r_k}(L_i(r_k), r_k\eta) = \omega_1(L_i(1), \eta) \quad i = 1, 2.$$

Учитывая, что, вследствие нормальности типа $f(z)$, выполнено неравенство

$$\max_{z \in L_2(r_k)} h_k(z) \leqslant A$$

для некоторого конечного A, не зависящего от r_k, получим

$$h_k(r_k \cdot \eta) \leqslant A\omega_1(L_2(1), \eta) + \max_{|\theta|<\delta} h_f(r_k, \theta) \cdot \omega_1(L_1(1), \eta).$$

Если η близко к $L_1(1)$, то $\omega_1(L_2(1), \eta)$ мало, а $\omega_1(L_1(1), \eta)$ близко к единице.

Поэтому за счет выбора $\xi = \xi(\varepsilon)$ можно достичь выполнения неравенства

$$h_k(z) < (1-\varepsilon) \max_{|\theta|<\delta} h_f(r_k, \theta) < h_f(0) - \frac{\lambda_1}{2} \text{ для } |z - r_k| < \xi r_k$$

при достаточно больших r_k.

Отсюда, заметив, что

$$h_f(r, 0) = \frac{r^{\rho(r)}}{r_k^{\rho(r_k)}} h_k(r),$$

выбирая ξ достаточно малым и используя свойства уточненного порядка (см. [1], стр. 48), получаем утверждение леммы.

§ 2. Для дальнейшего нам понадобятся некоторые определения.

Определение. Последовательность положительных чисел $R_i \uparrow \infty$ называется редкой, если

$$\lim_{i \to \infty} R_i \cdot R_{i+1}^{-1} = 0.$$

Определение. Пусть $f(r)$ определена и ограничена сверху на интервале $(0, \infty)$ и R_i — редкая последовательность. Обозначим

$$\gamma_f(0) = \overline{\lim_{r \to \infty}} f(r) \text{ и } \gamma_f(\xi) = \overline{\lim_{\substack{r \to \infty \\ r \notin C_\xi}}} f(r),$$

где C_ξ — объединение интервалов $I_{\xi k}$:

$$I_{\xi k} = \{r : |r - R_k| < \xi R_k\}.$$

Мы будем говорить, что $f(r)$ обладает Ω-свойством относительно $\{R_k\}$, если для произвольно малого $\xi > 0$ выполняется строгое неравенство

$$\gamma_f(\xi) < \gamma_f(0). \tag{2.1}$$

Теорема 2. *Для любой редкой последовательности $\{R_k\}$ и любого $h > 0$ существует целая функция $\psi(z)$ уточненного порядка $\rho(r)$,* такая, что

а) $h_\psi(0) = h$; (2.2)

б) *функция $h_\psi(r, 0)$ обладает Ω-свойством относительно $\{R_i\}$.*

Доказательство этой теоремы будет приведено в § 3, а сейчас, используя эту теорему, мы докажем основную теорему 1.

Доказательство теоремы 1.

Покажем, что для любой функции $f(z)$, которая не является функцией вполне регулярного роста на каком-нибудь луче $\arg z = \theta_0$, найдется целая функция $\psi(z)$ того же уточненного порядка, что и $f(z)$, и такая, что выполнено строгое неравенство

$$h_{f\psi}(\theta_0) < h_f(\theta_0) + h_\psi(\theta_0).$$

Этим и будет доказана теорема 1.

Без ограничения общности можно считать, что $\theta_0 = 0$.

Для функции $f(z)$ найдем по лемме 2 числа ξ, λ и последовательность $\{r_k\}$. Выделим из этой последовательности редкую подпоследовательность $\{R_i\}$.

Пусть $\psi(z)$ — функция, найденная с помощью теоремы 2 по последовательности $\{R_i\}$, причем $h \leqslant \frac{\lambda}{2}$. Имеем

$$h_{f\psi}(0) = \overline{\lim_{r\to\infty}} h_{f\psi}(r, 0) =$$

$$= \max\{\overline{\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\bar{\in} C_\xi}}} h_{f\psi}(r, 0), \overline{\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\in C_\xi}}} h_{f\psi}(r, 0)\}. \qquad (2.$$

Далее имеем

$$\overline{\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\in C_\xi}}} h_{f\psi}(r, 0) = \overline{\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\in C_\xi}}}\{h_f(r, 0) + h_\psi(r, 0)\} \leqslant h_f(0) - \lambda + h_\psi(0) \leqslant$$

$$\leqslant h_f(0) - \frac{\lambda}{2} < h_{f'}(0). \qquad (2.$$

Используя Ω-свойство функции $h_\psi(r, 0)$, получаем

$$\overline{\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\bar{\in} C_\xi}}} h_{f\psi}(r, 0) \leqslant h_f(0) + \overline{\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\bar{\in} C_\xi}}} h_\psi(r, 0) < h_f(0) + h_\psi(0). \qquad (2.$$

Из (2.3), (2.4) и (2.5) следует

$$h_{f\psi}(0) < h_f(0) + h_\psi(0),$$

что и доказывает теорему.

§ 3. В этом параграфе мы докажем теорему 2.

Для простоты изложения мы будем в дальнейшем считать, что ρ...
Предварительно докажем несколько вспомогательных предложений.

Лемма 3. *Пусть* $f(t)$ — *непрерывно дифференцируемая функция* $(0, \infty)$, *удовлетворяющая условиям:*

а) $f(t) > 0$ *для* $t \in (0, \infty)$;

б) $f(t) \to 0$ *при* $t \to 0, t \to \infty$;

с) $f(t)$ имеет на $(0, \infty)$ один максимум.

Тогда функция

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(t)\,dt$$

обладает теми же свойствами.

Доказательство. Свойства а) и б) очевидны.

Для доказательства с) рассмотрим функцию:

$$\xi(t) = t^2 \bar{f}'(t) = \int_0^t [f(t) - f(\eta)]\,d\eta.$$

При $t < t_{\max}$, где $t_{\max}$ — точка максимума для $f(t)$, имеем $\xi(t) > 0$.

Так как при $t \to 0, \infty, \bar{f}(t) \to 0$, то $\bar{f}(t)$ имеет максимум, и $\xi(t)$ при каком-то t становится отрицательным. Покажем, что $\xi(t)$ не может снова изменить знак. Действительно, в противном случае функция

$$\xi'(t) = tf'(t)$$

должна была бы при увеличении t изменить знак с отрицательного на положительный, что невозможно, так как $f(t)$ не имеет минимума. Лемма доказана.

Введем обозначения:

$$K(r, t, \varphi, p) = \frac{r\cos p\varphi - t\cos(p+1)\varphi}{t^2 - 2rt\cos\varphi + r^2}; \tag{3.1}$$

$$\varphi_p = \frac{\pi}{2p}; \tag{3.2}$$

$$F(\lambda, \rho, p) = \lambda^{p+1-\rho} \cdot K(\lambda, 1, \varphi_p, p); \tag{3.3}$$

$$H(\tau, \rho, p) = \tau^{-\rho} \int\limits_{\tau^{-1}}^{\infty} \eta^{-p-1} K(1, \eta, \varphi_p, p)\, d\eta; \tag{3.4}$$

$$p = [\rho]^*. \tag{3.5}$$

Лемма 4. *Функция* $F(\lambda, \rho, p)$ *обладает следующими свойствами:*

а) $F(\lambda, \rho, p) > 0$ *при* $\lambda \in (0, \infty)$;

в) $F(\lambda, \rho, p) \to 0$ *при* $\lambda \to 0, \infty$;

с) $F(\lambda, \rho, p)$ *имеет единственный максимум на* $(0, \infty)$.

Доказательство.

Из выражения для F:

$$F(\lambda, \rho, p) = \sin\varphi_p \frac{\lambda^{p+1-\rho}}{\lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi_p + 1}$$

и условия (3.5) получаем а) и в). Далее,

$$F'_\lambda(\lambda, \rho, p) = \frac{\lambda^{p-\rho}\sin\varphi_p}{(\lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi_p + 1)^2}[(p - \rho - 1)\lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi_p(p-\rho) + (p + 1 - \rho)].$$

Из условия (3.5) следует, что F'_λ один раз меняет знак на $(0, \infty)$, что и доказывает с).

Лемма 5. *Функция* $H(\tau, \rho, p)\, \tau \in (0, \infty)$ *обладает свойствами а), в) и с), перечисленными в лемме 4.*

Доказательство. Сделаем в интеграле (3.4) замену $\xi = \eta^{-\rho}$. Получим

$$H(\tau, \rho, p) = \frac{1}{\rho}\tau^{-\rho}\int\limits_0^{\tau^\rho} F(\xi^{1/\rho}, \rho, p)\, d\xi,$$

где F определено соотношением (3.3).

По лемме 4 функция $F(\lambda, \rho, p)(\lambda \in (0, \infty))$, а значит и $F(\xi^{1/\rho}, \rho, p)$ $\xi \in (0, \infty)$ обладает свойствами а), в), с), поэтому по лемме 3 и $H(\tau, \rho, p)$ имеет те же свойства.

Прежде чем доказать теорему 2, построим и исследуем один специальный интеграл**.

Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок, $\Delta > 0$ — произвольное число, $\{R_i\}$ — редкая последовательность. Сосредоточим в точках положительного луча $z_i = R_i$ массы

$$dn(t) = [\Delta(R_i^{\rho(R_i)} - R_{i-1}^{\rho(R_{i-1})})] \quad \text{для } t = R_i \quad i = 1, 2 \ldots^{***}$$
$$dn(t) = 0 \quad \text{для } t \neq R_i$$

и обозначим

$$n(t) = \int\limits_0^t dn(t) \quad (n(0) = 0).$$

* Напомним, что для простоты изложения мы считаем $\rho \geqslant 1$, $[a]$ — целая часть a.

** Идея этого построения и методика доказательства леммы 6 заимствованы автором у А. А. Гольдберга ([2], стр. 174).

*** $[a]$ — целая часть a.

Обозначим также

$$I(r,\ \rho,\ p)=\int\limits_0^\infty n(t)\left(\frac{r}{t}\right)^{p+1}K(r,\ t,\ \varphi_p,\ p)\,dt. \tag{3.6}$$

Так как $n(t)\leqslant\Delta t^{\rho(t)}$, то интеграл сходится, как это следует из свойств уточненного порядка (см. [1], стр. 50, соотношение (1,53′) и условия (3.5)).

Обозначим

$$v(r,\ \rho,\ p)=r^{-\rho(r)}I(r,\ \rho,\ p). \tag{3.7}$$

Лемма 6. *Для функции $v(r,\ \rho,\ p)$, определенной соотношением* (3.7), *имеет место равенство:*

$$v(r,\rho,p)=\frac{\Delta R_i^{\rho(R_i)}}{r^{\rho(r)}}\int\limits_{R_i/r}^{R_{i+1}/r}\tau^{-p-1}K(1,\ \tau,\ \varphi_p,\ p)\,d\tau+o(1)\ \text{при}\ r\to\infty,$$

где i выбрано так, что выполняется условие:

$$\sqrt{R_iR_{i-1}}\leqslant r<\sqrt{R_iR_{i+1}}. \tag{3.8}$$

Доказательство. Будем считать, что уточненый порядок $\rho(r)$ в некоторой окрестности нуля тождественно равен ρ. Это предположение не отразится на общности утверждения леммы.

Мы используем в дальнейшем следующее свойство уточненного порядка.

Лемма С*. *Пусть $0<\sigma<1$ фиксированное число. Найдется постоянная A_σ такая, что для всех $0<r<\infty$ будет выполнено неравенство*

$$\frac{(rt)^{\rho(rt)}}{r^{\rho(r)}}\leqslant\begin{cases}A_\sigma t^{\rho+\sigma} & 1\leqslant t<\infty\\ A_\sigma t^{\rho-\sigma} & 0<t\leqslant 1.\end{cases}$$

Представим функцию

$$I(r,\ \rho,\ p)=r^{\rho(r)}v(r,\ \rho,\ p)$$

в виде суммы четырех слагаемых:

$$I(r,\ \rho,\ p)=\left(\int\limits_0^{R_{i-1}}+\int\limits_{R_{i-1}}^{R_i}+\int\limits_{R_i}^{R_{i+1}}+\int\limits_{R_{i+1}}^{\infty}\right)n(t)\left(\frac{r}{t}\right)^{p+1}K(r,\ t,\ \varphi_p,\ p)\,dt=$$
$$=I_1(r)+I_2(r)+I_3(r)+I_4(r).$$

Оценим сначала $I_1(r)$. Имеем

$$I_1(r)\leqslant\int\limits_0^{R_{i-1}}\Delta t^{\rho(t)}\left(\frac{r}{t}\right)^{p+1}\frac{t}{t^2-2rt\cos\varphi_p+r^2}\,dt.$$

Выбирая в лемме С $0<\sigma<p+1-\rho$, получим при больших r:

$$I_1(r)\leqslant A_\sigma r^{\rho(r)}\int\limits_0^{R_{i-1}}\left(\frac{t}{r}\right)^{\rho-\sigma}\left(\frac{r}{t}\right)^{p+1}\frac{t}{t^2-2rt\cos\varphi_p+r^2}\,dt\leqslant$$
$$\leqslant B_1r^{\ (r)}\int\limits_0^{R_{i-1}/r}\tau^{\rho-p-\sigma}d\tau\leqslant B_1r^{\rho(r)}\int\limits_0^{R_{i-1}/r}\tau^{-\sigma}dt, \tag{3.9}$$

где B_1 — постоянная, не зависящая от r.

* В несколько иной формулировке эта лемма содержится в [2], стр. 171.

Аналогично для $I_4(r)$ получаем

$$I_4(r) \leqslant A_\sigma r^{\rho(r)} \int\limits_{R_{i+1}}^{\infty} \left(\frac{t}{r}\right)^{\rho+\sigma} \left(\frac{r}{t}\right)^{p+1} \frac{t}{t^2 - 2rt\cos\varphi_p + r^2}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant B_4 r^{\rho(r)} \int\limits_{R_{i+1}/r}^{\infty} \tau^{\rho-p-2+\sigma} d\tau, \tag{3.10}$$

где B_4 — постоянная и интеграл сходится вследствие условия (3.5) и выбора σ.

Для интеграла $I_2(r)$ имеем

$$I_2(r) \leqslant \Delta R_{i-1}^{\rho(R_{i-1})} \int\limits_{R_{i-1}/r}^{R_i/r} \tau^{-p-1} \frac{\tau\, d\tau}{\tau^2 - 2\tau\cos\varphi_p + 1} \leqslant$$

$$\leqslant B_2 r^{\rho(r)} \left(\frac{R_{i-1}}{r}\right)^{\rho-\sigma} \int\limits_{R_{i-1}/r}^{\infty} \frac{\tau^{-p}\, d\tau}{\tau^2 - 2\tau\cos\varphi_p + 1}, \tag{3.11}$$

где B_2 — постоянная, не зависящая от r.

Ввиду условия (3.8) имеем

$$\frac{R_{i-1}}{r} \leqslant \sqrt{\frac{R_{i-1}}{R_i}} \to 0; \quad \frac{R_{i+1}}{r} > \sqrt{\frac{R_{i+1}}{R_i}} \to \infty.$$

Кроме того, интегралы

$$\int\limits_0 \tau^{-\sigma}\, d\tau, \quad \int^{\infty} \tau^{\rho-p-2+\sigma}\, d\tau$$

сходятся, а величина

$$a(\lambda) = \lambda^{\rho-\sigma} \int\limits_{\lambda}^{\infty} \tau^{-p} \frac{d\tau}{\tau^2 - 2\tau\cos\varphi_p + 1}$$

стремится к нулю при $\lambda \to 0$.

Поэтому из (3.9), (3.10) и (3.11) получаем, что

$$\begin{aligned} I_1(r) &= o(r^{\rho(r)}), \\ I_2(r) &= o(r^{\rho(r)}), \\ I_4(r) &= o(r^{\rho(r)}). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Легко видеть, что

$$n(R_i)/\Delta R_i^{\rho(R_i)} \to 1 \text{ при } i \to \infty.$$

Поэтому

$$I(r, \rho, p) = \Delta R_i^{\rho(R_i)} \int\limits_{R_i/r}^{R_{i+1}/r} \tau^{-p-1} K(1, \tau, \varphi_p, p)\, d\tau + o(r^{\rho(r)}),$$

откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 7. Для $v(r, \rho, p)$ имеют место следующие асимптотические при $r \to \infty$ соотношения:

1) $v(\tau R_i, \rho, p) = \Delta H(\tau, \rho, p) + o(1)$ *равномерно по* $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$, $0 < \tau_0 \leqslant \tau_1 < \infty$;

2) $v(r, \rho, p) \leqslant \Delta \max\limits_{\tau<\tau_0} H(\tau, \rho, p) + o(1)$ *при* $\sqrt{R_i R_{i-1}} < r < \tau_0 R_i$, $\tau_0 < \bar\tau$;

3) $v(r, \rho, p) \leqslant \Delta \max\limits_{\tau>\tau_1} H(\tau, \rho, p) + o(1)$ *при* $\tau_1 R_i < r < \sqrt{R_i R_{i+1}}$, $\tau_1 > \bar\tau$ ($\bar\tau$ — *точка максимума функции* $H(\tau, \rho, p)$).

Доказательство. Имеем по лемме 6

$$v(\tau R_i,\ \rho,\ p) = \frac{\Delta R_i^{\rho\,(R_i)}}{(\tau R_i)^{\rho\,(\tau R_i)}} \int\limits_{1/\tau}^{R_{i+1}/\tau R_i} \tau^{-p-1} K(1,\ \tau,\ \varphi_p p)\, d\tau + o(1). \tag{3.13}$$

Используя свойства уточненного порядка * и редкость последовательности $\{R_i\}$, при $i \to \infty$ получаем утверждение 1) леммы.

Пусть $0 < \sigma < 1$ таково, что величина $\bar{\tau}(\sigma)$ для функции $H(\tau,\ \rho+\sigma,\ p)$ удовлетворяет условию $\bar{\tau}(\sigma) > \tau_0$.

Для $\alpha < \tau_0$ имеем

$$\max_{\sqrt{R_i R_{i-1}} < r < \tau_0 R_i} v(r,\ \rho,\ p) = \max\{ \max_{r \in (\sqrt{R_i R_{i-1}},\ \alpha R_i)} v(r,\ \rho,\ p),$$

$$\max_{r \in (\alpha R_i,\ \tau_0 R_i)} v(r,\ \rho,\ p)\}.$$

Далее, используя лемму 6 и лемму C, имеем

$$v(r,\ \rho,\ p) = A_\sigma \Delta \left(\frac{R_i}{r}\right)^{\rho+\sigma} \int\limits_{R_i/r}^{\infty} \tau^{-p-1} K(1,\ \tau,\ \varphi_p,\ p)\, d\tau \leqslant \Delta A_\sigma H(\alpha,\ \rho+\sigma,\ p) + o(1) \tag{3.14}$$

для $r \in (\sqrt{R_i R_{i-1}},\ \alpha R_i)$.

Выбирая α достаточно малым, можно сделать правую часть неравенства (3.14) меньше величины:

$$M = \Delta \max_{\tau < \tau_0} H(\tau,\ \rho,\ p). \tag{3.15}$$

С другой стороны, используя свойства уточненного порядка * и лемму 6 имеем:

$$v(r,\ \rho,\ p) \leqslant \Delta H\left(\frac{R_i}{r},\ \rho,\ p\right) + o(1),$$

для $r \in (\alpha R_i,\ \tau_0 R_i)$, откуда

$$\max_{r \in (\alpha R_i,\ \tau_0 R_i)} v(r,\ \rho,\ p) \leqslant \Delta \max_{\tau < \tau_0} H(\tau,\ \rho,\ p) + o(1). \tag{3.16}$$

Из (3.13), (3.14), (3.15) и (3.16) следует утверждение 2) леммы 7. Утверждение 3) доказывается аналогично.

Из леммы 7 легко следует

Лемма 8. *Пусть $v(r,\ \rho,\ p)$ функция, построенная по заданной редкой последовательности $\{R_i\}$ и заданным $\rho(r)$ и Δ с помощью соотношений (3.6), (3.7). Пусть $\bar{\tau}$ — точка, где функция $H(\tau,\ \rho,\ p)$ достигает максимума.*

Тогда $v(r,\ \rho,\ p)$ обладает Ω-свойством относительно последовательности $\{\tau R_i\}$ (также редкой).

---

* А именно, тот факт, что величина $L(r) = r^{\rho(r) - \rho}$ является медленно растущей функцией, т. е. ([1], стр. 48)

$$\lim_{r \to \infty} \frac{L(kr)}{L(r)} = 1$$

равномерно на любом отрезке $0 < a \leqslant k \leqslant b < \infty$.

Доказательство. Имеем

$$\overline{\lim_{\substack{r\to\infty\\ r\in C_\zeta}}}\, v(r,\ \rho,\ p)=\Delta H(\bar{\tau},\ \rho,\ p)$$

по утверждению 1) леммы 7. Кроме того, по утверждениям 2), 3) этой леммы имеем

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\ r\in C_\zeta}} v(r,\ \rho,\ p)\leqslant \Delta\max\{\max_{\tau<\frac{\bar{\tau}}{1+\zeta}} H(\tau,\ \rho,\ p),\ \ \max_{\tau>\frac{\bar{\tau}}{1-\zeta}} H(\tau,\ \rho,\ p)\}. \tag{3.17}$$

Так как $H(\tau,\ \rho,\ p)$ по лемме 5 имеет единственный максимум, то правая часть неравенства (3.17) строго меньше $\Delta H(\bar{\tau},\ \rho,\ p)$, что и доказывает лемму.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2.

Доказательство теоремы 2.

Пусть ρ — нецелое число и R_i' — заданная редкая последовательность. Пусть $\bar{\tau}$ — точка максимума $H(\tau,\ \rho,\ p)$. Построим каноническое произведение $g(z)$ с нулями в точках последовательности

$$R_i=R_i'/\bar{\tau},$$

причем так, чтобы кратность нуля в точке R_i была равна

$$dn_i=\left[\frac{h}{H(\bar{\tau},\ \rho,\ p)}(R_i^{\rho(R_i)}-R_{i-1}^{\rho(R_{i-1})})\right].$$

Обозначим

$$G(u,\ p)=\ln|E(u,\ p)|,$$

где

$$E(u,\ p)=(1-u)\,e^{u+\frac{u^2}{2}+\dots+\frac{u^p}{p}}$$

канонический множитель Вейерштрасса.

Имеем

$$\ln|g(z)|=\sum_{k=0}^{\infty} dn_k G\left(\frac{re^{i\varphi}}{R_k},\ p\right)=\int_0^{\infty} G\left(\frac{re^{i\varphi}}{t},\ p\right)dn(t).$$

Интегрируя по частям, получим

$$\ln|g(z)|=n(t)\,G\left(\frac{r}{t}e^{i\varphi},\ p\right)\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty} n(t)\,\frac{d}{dt}G\left(\frac{r}{t}e^{i\varphi},\ p\right)dt=$$

$$=\int_0^{\infty} n(t)\left(\frac{r}{t}\right)^{p+1}K(r,\ t,\ \varphi,\ p)\,dt,$$

где $K(r,\ t,\ \varphi,\ p)$ определено соотношением (3.1).

Легко видеть, что для функции

$$\psi(z)=g(ze^{-i\varphi p})$$

имеет место равенство

$$h_\psi(r,\ 0)=v(r,\rho,\ p)\quad\left(\Delta=\frac{h}{H(\bar{\tau},\ \rho,\ p)}\right).$$

Поэтому из леммы 8 следует, что $\psi(z)$ удовлетворяет утверждениям теоремы 2.

Рассмотрим случай целого ρ.

Построим каноническое произведение $\psi(z)$ с корнями на двух лучах в точках

$$z_i = R_i e^{i\varphi_\rho};\ \bar{z}_i = R_i e^{-i\varphi_\rho},$$

где $R_i = R_i' \cdot \bar{\tau}^{-1}$, причем кратность нуля в точке $R_i e^{\pm i\varphi_\rho}$ равна

$$dn_i = \left[\frac{h}{2H(\bar{\tau},\rho,\rho)}\left(R_i^{\rho\,(R_i)} - R_{i-1}^{\rho\,(R_i-1)}\right)\right].$$

Представим логарифм модуля этого канонического произведения в виде

$$\ln|\psi(z)| = \int_0^\infty G\left(\frac{r}{t}e^{i(\varphi+\varphi_\rho)},\ \rho\right)dn(t) + \int_0^\infty G\left(\frac{r}{t}e^{i(\varphi-\varphi_\rho)},\ \rho\right)dn(t),$$

где $n(t)$ — функция распределения нулей на каждом луче.

Далее, при $\varphi = 0$ имеем

$$\ln|\psi(r)| = r^\rho \sum_{R_i<r}\frac{dn_i}{R_i^\rho}\cdot 2\cos\rho\varphi_\rho + \int_0^r G\left(\frac{re^{-i\varphi_\rho}}{t},\ \rho-1\right)dn(t) +$$

$$+ \int_0^r G\left(\frac{re^{i\varphi_\rho}}{t},\ \rho-1\right)dn(t) + \int_r^\infty G\left(\frac{re^{-i\varphi_\rho}}{t},\ \rho\right)dn(t) + \int_r^\infty G\left(\frac{re^{i\varphi_\rho}}{t},\ \rho\right)dn(t).$$

Интегрируя по частям каждый интеграл и используя соотношение $\cos\rho\varphi_\rho = 0$, получим

$$\ln|\psi(r)| = 2\int_0^\infty n(t)\left(\frac{r}{t}\right)^{\rho+1} K(r,\ t,\ \varphi_\rho,\ \rho)\,dt,$$

т. е. $h_\psi(r,\ 0) = 2v(r,\ \rho,\ \rho)$.

По лемме 8 из этого соотношения следует утверждение теоремы 2 и для целого ρ. Тем самым завершено доказательство этой теоремы.

В заключение автор приносит благодарность И. В. Островскому, проявившему внимание к работе и сделавшему ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. М., ГИТТЛ, 1956.
2. А. А. Гольдберг. Экстремальный индикатор для целой функции с положительными нулями. «Сибирский матем. журнал», том III, № 2, 170—177, 1962.