ИССЛЕДОВАНИЕ РОСТА МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТРИКИ $L^p_{[0,\,2\pi]}$

И. П. Проскурня

§ 1. Постановка задачи и основные результаты

Пусть $f(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция нижнего порядка λ и порядка ρ. ...матриваемые в работе вопросы примыкают к неванлинновской теории распре...ния значений мероморфных функций.

Мы будем пользоваться стандартными обозначениями этой теории: $n(r, a, f)$, $N(r, a, f)$, $m(r, a, f)$, $T(r, f)$ и т. д. (см. [1, 2]).

Заметим, что в неванлинновской теории величина

$$m(r, a, f) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|}\, d\theta, \quad a \neq \infty,$$

$$m(r, \infty, f) = m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta$$

...рактеризует приближение мероморфной функции $f(z)$ к a в метрике $L^1_{[0,\,2\pi]}$, а ...этому величины

$$\delta(a, f) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)} = 1 - \varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r, a, f)}{T(r, f)},$$

$$\Delta(a, f) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)} = 1 - \varliminf_{r\to\infty} \frac{N(r, a, f)}{T(r, f)}$$

характеризуют асимптотический рост мероморфных функций в этой метрике.

Величина $\delta(a, f)$ называется величиной дефекта $f(z)$ в точке a в смысле Р. Неванлинны [1, стр. 271], а величина $\Delta(a, f)$ называется величиной дефекта $f(z)$ в точке a в смысле Ж. Валирона [3], [5].

Пусть [5, стр. 147]

$$E_N(f) = \{a : \delta(a, f) > 0\}$$

и

$$E_V(f) = \{a : \Delta(a, f) > 0\},$$

$E_N(f)$ называется множеством дефектных значений $f(z)$ в смысле Р. Неванлинны, $E_V(f)$ — множеством ее дефектных значений в смысле Ж. Валирона.

Величины дефектов Р. Неванлинны и величины дефектов Ж. Валирона исследуются во многих работах о распределении значений мероморфных функций.

Приведем такое утверждение, характеризующее множество $E_N(f)$ и величины $\delta(a, f)$ — см. [1, 5, 8, 9].

Теорема А. *Если $f(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция, тогда*

1) *множество $E_N(f)$ не более чем счетно и величины дефектов удовлетворяют соотношению*

$$\sum_{(a)} \delta(a, f) \leqslant 2;$$

2) *если $f(z)$ конечного нижнего порядка λ, то*

а) *при любом α $(1/3 < \alpha \leqslant 1)$*, выполняется условие*

---

* Буквой K с индексами будем обозначать положительные абсолютные постоянные, буквой C с индексами — постоянные, зависящие лишь от рассматриваемой функции.

$$\sum_{(a)} \delta^{\alpha}(a, f) \leqslant \begin{cases} K_1 \cdot \dfrac{\lambda^{2\alpha}}{(3\alpha-1)^{1/3}}, & \text{если } \lambda \leqslant 0{,}5 \text{ и число дефектных значений у } f(z) \text{ не меньше двух,} \quad (1.1) \\ K_2 \cdot \dfrac{\lambda^{1-\alpha}}{(3\alpha-1)^{1/3}}, & \text{если } \lambda > 0{,}5; \quad (1.2) \end{cases}$$

б) если $\psi(t)$ $(\psi(0)=0)$ *— неубывающая функция на сегменте* $[0, 2]$ *и*

$$\int_0^2 \frac{\psi(t)}{t}\, dt < \infty, \ \psi(2) \leqslant 2,$$

то сходится ряд

$$\sum_{(a)} \left\{ \frac{\delta(a, f)}{\ln \dfrac{e}{\delta(a, f)}} \right\}^{1/3} \cdot \psi\left(\frac{1}{\ln \dfrac{e}{\delta(a, f)}} \right);$$

в) при $\alpha < 1/3$ *ряд* $\sum\limits_{(a)} \delta^{\alpha}(a, f)$ *может расходиться.* Очевидно, величина $m(r, a, f)$ есть норма

$$\left\| \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} \right\|$$

в метрике $L^1_{[0, 2\pi]}$.

В работах В. П. Петренко [10, 11] исследовались асимптотические свойства мероморфных функций с использованием метрики $C_{[0, 2\pi]}$.

Положим для мероморфной при $z \neq \infty$ функции $f(z)$ [10, 11]

$$\ln^+ M(r, a, f) = \max_{0 \leqslant \theta < 2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|}, \text{ если } a \neq \infty;$$

$$\ln^+ M(r, \infty, f) = \ln^+ M(r, f) = \max_{0 \leqslant \theta < 2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})|;$$

$$\beta(a, f) = \varliminf_{r \to \infty} \frac{\ln^+ M(r, a, f)}{T(r, f)}.$$

Величина $\beta(a, f)$ называется величиной отклонения мероморфной функции от числа a, множество

$$\Omega(f) = \{a : \beta(a, f) > 0\}$$

— множеством положительных отклонений мероморфной функции $f(z)$ [10, 11].

Приведем одно из утверждений о свойствах множества $\Omega(f)$ и величин $\beta(a, f)$, которое является аналогом теоремы А [10, 11].

Теорема. Б. *Пусть* $f(z)$ *мероморфная при* $z \neq \infty$ *функция. Справедливы утверждения*

1) *если* $f(z)$ *конечного нижнего порядка* λ, *то*

а) множество $\Omega(f)$ *не более чем счетно;*

б) справедливы включения

$$E_N(f) \subseteq \Omega(f) \subseteq E_V(f);$$

в) при любом α $(1/2 < \alpha \leqslant 1)$

$$\sum_{(a)} \beta^{\alpha}(a, f) \leqslant \begin{cases} K_3 \cdot \dfrac{\lambda^{2\alpha}}{(2\alpha-1)^{1/2}}, & \text{если } \lambda \leqslant 0{,}5 \text{ и число точек } a, \text{ для которых } \beta(a, f) > 0 \text{ не меньше двух;} \quad (1.3) \\ K_4 \cdot \dfrac{\lambda}{(2\alpha-1)^{1/2}}, & \text{если } \lambda > 0{,}5; \quad (1.4) \end{cases}$$

г) если $\psi(t)$ ($\psi(0)=0$) неубывающая функция на сегменте $[0, 2]$ *и*

$$\int_0^2 \frac{\psi(t)}{t}\,dt < \infty, \ \psi(2) \leqslant 2,$$

то сходится ряд

$$\sum_{(a)} \left\{\frac{\beta(a, f)}{\ln \dfrac{\pi(\lambda+e)}{\beta(a, f)}}\right\}^{1/2} \cdot \psi\left(\frac{1}{\ln \dfrac{\pi(\lambda+e)}{\beta(a, f)}}\right);$$

д) при $\alpha < 1/2$ *ряд* $\sum\limits_{(a)} \beta^\alpha(a, f)$ *может расходиться.*

2) *если нижний порядок у* $f(z)$ *бесконечный, то* $\Omega(f)$ *может иметь мощность континуума.*

Эта работа посвящена исследованию асимптотических свойств мероморфных при $z \neq \infty$ функций с использованием метрики $L^p_{[0,\ 2\pi]}$ $(1 < p < \infty)$.

Положим при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и любом комплексном числе a

$$m_p(r, a, f) = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|}\right)^p d\theta\right\}^{1/p}, \text{ если } a \neq \infty$$

$$m_p(r, \infty, f) = m_p(r, f) = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\ln^+ |f(re^{i\theta})|)^p\, d\theta\right\}^{1/p},$$

$$\delta_p(a, f) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{m_p(r, a, f)}{T(r, f)},$$

$$D_p(f) = \{a : \delta_p(a, f) > 0\}.$$

Заметим, что $\delta_1(a, f) = \delta(a, f)$, $\delta_\infty(a, f) = \beta(a, f)$; $\delta_p(a, f)$ не убывает с ростом p.

Очевидно, при любом $p \geqslant 1$ $D_p(f) \subseteq \Omega(f)$.

Приведем теперь основные результаты работы.

Теорема 1. *Если $f(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция конечного нижнего порядка λ, тогда при любом $p \geqslant 1$ множество $D_p(f)$ не более чем счетно и при* $1 \Big/ \left(2 + \frac{1}{p}\right) < \alpha \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\sum_{(a)} \delta_p^\alpha(a, f) \leqslant \begin{cases} K_5 \cdot \dfrac{\lambda^{2\alpha}}{\left[\left(2+\dfrac{1}{p}\right)\alpha - 1\right]^{1/\left(2+\frac{1}{p}\right)}}, & \text{если } \lambda \leqslant 0{,}5 \text{ и множество } D_p(f) \text{ содержит не менее двух точек;} \quad (1.5) \\ K_6 \cdot \dfrac{\lambda^{1-\frac{\alpha}{p}}}{\left[\left(2+\dfrac{1}{p}\right)\alpha - 1\right]^{1/\left(2+\frac{1}{p}\right)}}, & \text{если } \lambda > 0{,}5. \quad (1.6) \end{cases}$$

Заметим, что оценки (1.5) и (1.6) при $p = 1$ и $p = \infty$ представляют известные результаты. Действительно, из оценок (1.5) и (1.6) при $p = 1$ получаются оценки (1.1), (1.2), а при $p = \infty$ — оценки (1.3), (1.4).

Теорема 2. *Пусть* $\psi(t)$ $(\psi(0)=0)$ — *неубывающая функция на сегменте* $[0, 2]$ и

$$\int_0^2 \frac{\psi(t)}{t}\,dt < \infty, \ \psi(2) \leqslant 2. \tag{1.7}$$

*В условиях теоремы 1 справедливо соотношение**

$$\sum_{(a)} \left\{ \frac{\delta_p(a, f)}{\ln \dfrac{\pi(\lambda+e)}{\delta_p(a, f)}} \right\}^{1/\left(2+\frac{1}{p}\right)} \cdot \psi\left(\frac{1}{\ln \dfrac{\pi(\lambda+e)}{\delta_p(a, f)}} \right) \leqslant$$

$$\leqslant K_7 \cdot \lambda^{2/\left(2+\frac{1}{p}\right)} \cdot \left(1 + \int_0^2 \frac{\psi(t)}{t}\,dt \right). \tag{1.8}$$

Теорема 3. *Существуют мероморфные функции конечного нижнего порядка для которых*

$$\sum_{(a)} \delta_p^{\alpha}(a, f) = \infty$$

для любых $p \geqslant 1$ *и* $\alpha < 1 \Big/ \left(2 + \dfrac{1}{p}\right)$.

Результаты теорем 1, 2 и 3 о свойствах величин $\delta_p(a, f)$ и множества $D_p(f)$ для мероморфных при $z \neq \infty$ функций конечного нижнего порядка можно рассматривать как аналоги соответствующих утверждений для величин неванлинновских дефектов $\delta(a, f)$ и множества дефектных значений $E_N(f)$ (см. теорему А) и величин отклонений $\beta(a, f)$ и множества положительных отклонений $\Omega(f)$ (см. теорему Б).

Заметим, что для функции бесконечного нижнего порядка

$$f(z) = e^{e^z}$$

получаем (см. [7], стр. 42—43)

$$\delta_p(\infty, f) = \infty \ (p > 1).$$

Следует отметить, что оценка (1.6) является точной в смысле роста при $\lambda \to \infty$, а оценка (1.5) — точной в смысле убывания при $\lambda \to 0$. Действительно, для функции

$$h_\lambda(z) = \int_0^z e^{-\zeta^\lambda}\,d\zeta \ (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

имеем [1, стр. 171] при любом $p \geqslant 1$ и $\alpha < 1$

$$\sum_{a \in D_p(h_\lambda)} \delta_p^{\alpha}(a, h_\lambda) \geqslant K_8 \cdot \lambda^{1-\frac{\alpha}{p}},$$

а для функции

$$\varphi_\lambda(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/\lambda} + z}{n^{1/\lambda} - z} \ (0 < \lambda < 1),$$

---

* Предполагается, что при $\lambda < 0{,}5$ множество $D_p(f)$ содержит не менее двух точек.

...пользуя известные асимптотики, стр. 94, легко находим

$$\sum_{a \in D_p(\varphi_\lambda)} \delta_p^\alpha (a, \varphi_\lambda) \geqslant K_9 \cdot \lambda^{2\alpha}.$$

Пусть далее для мероморфной при $z \neq \infty$ функции $f(z)$ [8], [9]

$$E(r, a, f) = \left\{\theta : \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} > 1\right\} \text{ при } a \neq \infty$$

$$E(r, \infty, f) = \{\theta : |f(re^{i\theta})| > 1\},$$

и пусть $I_j(r, a, f)$ — составляющие интервалы множества $E(r, a, f)$,

$$|I_j(r, a, f)| = \operatorname{mes} I_j(r, a, f),$$

$$\nu(r, a, f) = \max_{(j)} |I_j(r, a, f)|.$$

Оценка величины $\nu(r, \infty, g)$ для случая, когда $g(z)$ — целая функция, вначале была получена К. Арима [15]. В случае мероморфной функции оценка величины $\nu(r, a, f)$ снизу через дефект Р. Неванлинны $\delta(a, f)$ приведена в работе [9]. В настоящей работе мы получили оценку снизу для $\nu(r, a, f)$ через $\delta_p(a, f)$ $(\delta_p(a, f) \geqslant \delta(a, f))$. Справедливо такое утверждение.

Теорема 4. *Пусть $f(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция конечного нижнего порядка λ. При $p \geqslant 1$ для любого a из расширенной комплексной плоскости справедливы оценки:*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \nu(r, a, f) \geqslant \begin{cases} K_{10} \cdot \left\{\dfrac{\delta_p(a, f)}{\lambda^2} \cdot \dfrac{1}{\ln \dfrac{K_{11} \cdot \lambda^2}{\delta_p(a, f)}}\right\}^{1/\left(1+\frac{1}{p}\right)}, & \text{если } \lambda \leqslant 0{,}5 \text{ и множество } D_p(f) \text{ содержит не менее двух точек,} \quad (1.9)\\[2ex] \dfrac{K_{12}}{\lambda} \cdot \left\{\dfrac{\delta_p(a, f)}{\lambda^{1-\frac{1}{p}}} \cdot \dfrac{1}{\ln \dfrac{K_{11} \cdot \lambda^{1-\frac{1}{p}}}{\delta_p(a, f)}}\right\}^{1/\left(1+\frac{1}{p}\right)}, & \text{если } \lambda > 0{,}5. \quad (1.10)\end{cases}$$

То, что постоянную $\alpha = 1 \Big/ \left(1 + \dfrac{1}{p}\right)$ в оценках (1.9) и (1.10) улучшить нельзя, показывает следующий пример мероморфной функции. Пусть при $\lambda > 1$, $0 < \varepsilon_0 < \dfrac{\pi}{2\lambda}$ и $a \neq \infty$

$$F_\lambda(z) = F_\lambda(z, \varepsilon_0, a) = \left[E_\lambda\left(ze^{i\left(\frac{\pi}{\lambda} - \varepsilon_0\right)}\right)\right]^{-1} + [E_\lambda(z)]^{-1} + a,$$

где

$$E_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma\left(1 + \dfrac{n}{\lambda}\right)}.$$

Для этой функции $F_\lambda(z)$ мы имеем [9, стр. 1187—1188]

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \nu(r, a, F_\lambda) \leqslant \frac{K_{13}}{\lambda^{2\alpha}} \cdot \varepsilon_0^{\left[1 - \left(1 + \frac{1}{p}\right)\alpha\right]} \cdot \delta_p(a, F_\lambda),$$

поэтому при $\alpha < 1 \Big/ \left(1 + \frac{1}{p}\right)$ величину $\varepsilon_0^{\left[1-\left(1+\frac{1}{p}\right)\alpha\right]}$ ($\varepsilon_0 > 0$ — любое) можно сделать произвольно малой.

Теоремы 1, 2 и 3 доказаны в § 2.3, § 4 посвящен доказательству теоремы 4

§ 2. Вспомогательные соотношения

В этом параграфе мы установим несколько вспомогательных соотношений необходимых для доказательства теорем 1 и 2.

Положим для мероморфной при $z \neq \infty$ функции $f(z)$ [8, 9]

$$m_j(r, a, f) = \max_{\theta \in I_j(r, a, f)} \ln \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|},$$

$$S(r, a, \eta, f) = \sum_{(j)} \frac{m_j(r, a, f)}{|I_j(r, a, f)|^{\eta-1}},$$

где $\eta \geqslant 1$.

Лемма 2.1. Для мероморфной функции $f(z)$ конечного нижнего порядка и для произвольного конечного набора конечных комплексных чисел $\{a_k\}_{k=1}^N$ при $0 < \alpha < 1$ и $1 < p < \infty$ ($p = n + \varepsilon_1$, $n = 1, 2, \ldots, 0 < \varepsilon_1 \leqslant 1$) справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{N} \delta_p^\alpha(a_k, f) \leqslant \varliminf_{r\to\infty} \frac{(4\pi)^{1-\alpha}}{T^\alpha(r, f)} \left\{S\left(r, 0, \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p}, g\right) + N^{1/\alpha} \cdot A(r, f)\right\}^\alpha, \tag{2.1}$$

где

$$g(z) = z \cdot f'(z);$$

$$A(r, f) = \left(\frac{Q(r, f)}{\ln^+ M(r, 0, g)}\right)^{\varepsilon_1/p} \cdot \ln^+ M(r, 0, g) +$$

$$+ 2\sum_{l=1}^{n}\left[1 + \left(\frac{Q(r, f)}{\ln^+ M(r, 0, g)}\right)^{\varepsilon_1/p}\right] \cdot \left(\frac{Q(r, f)}{\ln^+ M(r, 0, g)}\right)^{l/p} \cdot \ln^+ M(r, 0, g); \tag{2.2}$$

$$Q(r, f) = \ln^+ r + \sum_{k=1}^{N} \ln^+ M\left(r, \frac{f'}{f - a_k}\right). \tag{2.3}$$

Доказательство. Рассуждая аналогично [7, стр. 147] и не ограничивая общности, можно считать, что выбранное конечное множество $\{a_k\}_{k=1}^N$ удовлетворяет условию

$$|a_k - a_m| \geqslant 2(\pi + 1) \quad (1 \leqslant k < m \leqslant N).$$

Кроме того — см. [7, стр. 148] — при $k \neq m$ множества $E(r, a_k, f)$ и $E(r, a_m, f)$ разделяются точками $\theta_{k,m}$, в которых (r — фиксировано, $r > r_0$)

$$r \cdot |f'(re^{i\theta_{k,m}})| = |g(re^{i\theta_{k,m}})| \geqslant 1. \tag{2.4}$$

Покроем те точки из $E(r, a_k, f)$, где $|g(re^{i\theta})| < 1$, максимальными интервалами $I_j^{(k)}(r, 0, g)$ ($j = 1, 2, \ldots \omega_k$), в которых выполняется неравенство $|g(re^{i\theta})| < 1$. Такие интервалы существуют [7, стр. 148]. Из (2.4) следует, что интервалы

$I_l^{(k)}(r, 0, g)$ и $I_j^{(m)}(r, 0, g)$, соответствующие множествам $E(r, a_k, f)$ и $E(r, a_m, f)$, при $k \neq m$ не имеют общих точек. Обозначим

$$\bigcup_{j=1}^{\omega_k} I_j^{(k)}(r, 0, g) = I^{(k)}(r, 0, g).$$

Пусть $p = n + \varepsilon_1$ $(1 < p < \infty)$ — любое число, где $n = 1, 2, \ldots, 0 < \varepsilon_1 \leqslant 1$. Имеем

$$(m_p(r, a_k, f))^p = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{E(r, a_k, f)} \left(\ln \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a_k|}\right)^p d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{E(r, a_k, f)} \left[\ln^+ \left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta}) - a_k}\right| + \ln^+ r + \ln^+ \frac{1}{|g(re^{i\theta})|}\right]^p d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{E(r, a_k, f)} \left[\ln^+ \frac{1}{|g(re^{i\theta})|} + \ln^+ r + \sum_{k=1}^{N} \ln^+ M\left(r, \frac{f'}{f - a_k}\right)\right]^p d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{I^{(k)}(r, 0, g)} \left[\ln^+ \frac{1}{|g(re^{i\theta})|} + Q(r, f)\right]^p d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{I^{(k)}(r, 0, g)} \left[\ln^+ \frac{1}{|g(re^{i\theta})|} + Q(r, f)\right]^n \cdot \left[\ln^+ \frac{1}{|g(re^{i\theta})|} + Q(r, f)\right]^{\varepsilon_1} d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{I^{(k)}(r, 0, g)} \left[\left(\ln^+ \frac{1}{|g(re^{i\theta})|}\right)^n + \sum_{l=1}^{n} C_n^l Q^l(r, f) \cdot \left(\ln^+ \frac{1}{|g(re^{i\theta})|}\right)^{n-l}\right] \times$$

$$\times \left[\left(\ln^+ \frac{1}{|g(re^{i\theta})|}\right)^{\varepsilon_1} + Q^{\varepsilon_1}(r, f)\right] d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{I^{(k)}(r, 0, g)} \left[\left(\ln^+ \frac{1}{|g(re^{i\theta})|}\right)^p + \left(\ln^+ \frac{1}{|g(re^{i\theta})|}\right)^n \cdot Q^{\varepsilon_1}(r, f) +\right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{n} C_n^l Q^l(r, f) \cdot \left(\ln^+ \frac{1}{|g(re^{i\theta})|}\right)^{n-l} \cdot \left(\left(\ln^+ \frac{1}{|g(re^{i\theta})|}\right)^{\varepsilon_1} + Q^{\varepsilon_1}(r, f)\right)\right] d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{I^{(k)}(r, 0, g)} \left(\ln^+ \frac{1}{|g(re^{i\theta})|}\right)^p d\theta + Q^{\varepsilon_1}(r, f) \cdot (\ln^+ M(r, 0, g))^n +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} C_n^l Q^l(r, f) \cdot (\ln^+ M(r, 0, g))^{n-l} \cdot ((\ln^+ M(r, 0, g))^{\varepsilon_1} + Q^{\varepsilon_1}(r, f)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{I^{(k)}(r, 0, g)} \left(\ln^+ \frac{1}{|g(re^{i\theta})|}\right)^p d\theta + \left(\frac{Q(r, f)}{\ln^+ M(r, 0, g)}\right)^{\varepsilon_1} \cdot (\ln^+ M(r, 0, g))^p +$$

$$+\sum_{l=1}^{n} C_n^l \cdot \left[1 + \left(\frac{Q(r, f)}{\ln^+ M(r, 0, q)}\right)^{\varepsilon_1}\right] \cdot \left(\frac{Q(r, f)}{\ln^+ M(r, 0, g)}\right)^{l} (\ln^+ M(r, 0, g))^p$$

$$\left(C_n^l = \frac{n!}{l!\,(n-l)!}\right).$$

Поэтому

$$m_p(r, a_k, f) \leqslant \left\{ \int\limits_{I^{(k)}(r, 0, g)} \left(\ln^+ \frac{1}{|g(re^{i\theta})|}\right)^p d\theta \right\}^{1/p} +$$

$$+ \left(\frac{Q(r, f)}{\ln^+ M(r, 0, g)}\right)^{\varepsilon_1/p} \cdot \ln^+ M(r, 0, g) +$$

$$+ 2\sum_{l=1}^{n} \left[1 + \left(\frac{Q(r, f)}{\ln^+ M(r, 0, g)}\right)^{\varepsilon_1/p}\right] \cdot \left(\frac{Q(r, f)}{\ln^+ M(r, 0, g)}\right)^{l/p} \cdot \ln^+ M(r, 0, g) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{\omega_k} \left\{ \int\limits_{I_j^{(k)}(r, 0, g)} \left(\ln^+ \frac{1}{|g(re^{i\theta})|}\right)^p d\theta \right\}^{1/p} + A(r, f),$$

где $A(r, f)$ определено формулой (2.2).

Используя это неравенство, получаем при $0 < \alpha < 1$

$$\sum_{k=1}^{N} \delta_p^\alpha(a_k, f) \leqslant \varliminf_{r\to\infty} \frac{1}{T^\alpha(r, f)} \sum_{k=1}^{N} \left\{ \sum_{j=1}^{\omega_k} \left[\int\limits_{I_j^{(k)}(r, 0, g)} \left(\ln^+ \frac{1}{|g(re^{i\theta})|}\right)^p d\theta \right]^{1/p} + \right.$$

$$\left. + A(r, f) \right\}^\alpha \leqslant \varliminf_{r\to\infty} \frac{1}{T^\alpha(r, f)} \left\{ \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{\omega_k} \left[\int\limits_{I_j^{(k)}(r, 0, g)} \left(\ln^+ \frac{1}{|g(re^{i\theta})|}\right)^p d\theta \right]^{\alpha/p} + N \cdot A^\alpha(r, f) \right\} =$$

$$= \varliminf_{r\to\infty} \frac{1}{T^\alpha(r, f)} \left\{ \sum_{(j)} \left[\int\limits_{I_j(r, 0, g)} \left(\ln^+ \frac{1}{|g(re^{i\theta})|}\right)^p d\theta \right]^{\alpha/p} + N \cdot A^\alpha(r, f) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf_{r\to\infty} \frac{1}{T^\alpha(r, f)} \left\{ \sum_{(j)} (m_j(r, 0, g) \cdot |I_j(r, 0, g)|^{1/p})^\alpha + N \cdot A^\alpha(r, f) \right\}. \qquad (2.5)$$

С помощью неравенства Гельдера имеем

$$\sum_{(j)} (m_j(r, 0, g) \cdot |I_j(r, 0, g)|^{1/p})^\alpha \leqslant (2\pi)^{1-\alpha} \cdot \left(\sum_{(j)} \frac{m_j(r, 0, g)}{|I_j(r, 0, g)|^{\frac{1-\alpha}{\alpha} - \frac{1}{p}}} \right)^\alpha. \qquad (2.6)$$

Учитывая (2.6), соотношение (2.5) приводим к виду

$$\sum_{k=1}^{N} \delta_p^\alpha(a_k, f) \leqslant \varliminf_{r\to\infty} \frac{(2\pi)^{1-\alpha}}{T^\alpha(r, f)} \left\{ \left(\sum_{(j)} \frac{m_j(r, 0, g)}{|I_j(r, 0, g)|^{\frac{1-\alpha}{\alpha} - \frac{1}{p}}} \right)^\alpha + NA^\alpha(r, f) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf_{r\to\infty} \frac{(4\pi)^{1-\alpha}}{T^{\alpha}(r, f)} \left\{ \sum_{(j)} \frac{m_j(r, 0, g)}{|I_j(r, 0, g)|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}-\frac{1}{p}}} + N^{1/\alpha} A(r, f) \right\}^{\alpha}.$$

Оценка (2.1) доказана.

Пусть $T(r, f)$ — неванлинновская характеристика $f(z)$, положим [10, стр. 415]

$$T_1(r, f) = \int_0^r \frac{T(s, f)}{s} ds$$

и обозначим через $l(r)$ уточненный порядок — см. [4, стр. 47, 6], функции* $T(r, f) + T_1(r, f)$.

Положим далее

$$\mu(r) = \begin{cases} \lambda + \varepsilon < \rho \ (\varepsilon > 0), \text{ если у } f(z)\ \lambda < \rho \\ l(r), \text{ если у } f(z)\ \lambda = \rho, \end{cases} \tag{2.7}$$

где λ — нижний порядок $f(z)$ и ρ — ее порядок.

Лемма 2.2 *Пусть* $f(z)$ $(f(0) = 1)$ — *мероморфная при* $z \neq \infty$ *функция конечного нижнего порядка* λ, *тогда для любого комплексного числа* a *выполняется соотношение* $(0 < r_0 \leqslant r \leqslant 0{,}5R)$

$$\int_{r_0}^{0,5R} r^{-\mu(r)-1} \cdot \ln^+ M(r, a, f)\, dr \leqslant \varphi(\lambda) \int_{r_0}^{0,5R} r^{-\mu(r)-1} \cdot T(r, f)\, dr +$$

$$+ C_1 \cdot \frac{T(4R, f) + T_1(4R, f)}{R^{\mu(R)}} + C_2, \tag{2.8}$$

где

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}, \ \text{если } \lambda < 0{,}5 \\ \pi\lambda, \ \text{если } \lambda \geqslant 0{,}5, \end{cases} \tag{2.9}$$

а $\mu(r)$ *определено формулой* (2.7).

Действительно, оценка (2.9) при $\lambda \geqslant 0{,}5$ приведена в работе [10, стр. 428, 431]; при $\lambda < 0{,}5$ оценка получается аналогично.

Пусть

$$D_{\alpha, R} = \{z : 0 < |z| < R, \ |\arg z| < \alpha\},$$

где $0 < \alpha < \pi$, $R > 1$ и $\theta(r)$ $(0 \leqslant \theta(r) \leqslant 2\pi)$ определено условием

$$|f(re^{i\theta(r)})| = M(r, \infty, f).$$

Лемма 2.3. *В условиях предыдущей леммы для любого* α, $\pi/4y \leqslant \alpha \leqslant \pi/2y$ $(y > 2\lambda)$ *такого, что граница области* $D_{\alpha, R}$ *не содержит нулей и полюсов функции*
$f(e^{i\theta(r)} \cdot z)$ $(z = se^{i\theta})$, *справедлива оценка*

$$\int_{r_0}^{0,5R} r^{-\mu(r)-1} \cdot \ln^+ M(r, \infty, f)\, dr \leqslant 3\pi y \int_{r_0}^{0,5R} \frac{m(r, f)}{r^{\mu(r)+1}} dr +$$

$$+ \pi\varkappa \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi\varkappa}{4y} \int_{r_0}^{0,5R} \frac{N(r, f)}{r^{\mu(r)+1}} dr + C_3 \frac{T(4R, f) + T_1(4R, f)}{R^{\mu(R)}} + C_4, \tag{2.10}$$

---

* Заметим, что порядок ρ и нижний порядок λ у $T(r, f)$, $T_1(r, f)$ и $T(r, f) + T_1(r, f)$ совпадают.

$$\varkappa = \begin{cases} \gamma\ (\gamma = \lambda + \varepsilon < \rho), \text{ если у } f(z)\ \lambda < \rho \\ \rho, \text{ если у } f(z)\ \lambda = \rho, \end{cases}$$

а $\mu(r)$ *определено формулой* (2.7).

Оценка (2.10) для функций нерегулярного роста (т. е. с $\lambda < \rho$) сообщается в работе [10, стр. 437]; для функций регулярного роста (т. е. с $\lambda = \rho$) оценка (2.10) получается аналогично.

Лемма 2.4. *Пусть* $f(z)$ $(f(0) = 1)$ — *мероморфная при* $z \neq \infty$ *функция конечного нижнего порядка* λ. *Тогда для любого* ε $(0 < \varepsilon < 1)$ и q $(0 < q_0 < q \leqslant 1)$ *справедлива оценка*

$$\int\limits_{r_0}^{0,5R} \left\{\frac{Q(r, f)}{\ln^+ M(r, 0, g)}\right\}^q \cdot \frac{\ln^+ M(r, 0, g)}{r^{\mu(r)+1}}\, dr \leqslant \varepsilon^{q_0-1} \cdot C_6 \cdot N +$$

$$+ \varepsilon^{q_0} \cdot K_{14} \cdot (\lambda + 1) \cdot \int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, f)}{r^{\mu(r)+1}}\, dr + \varepsilon^{q_0-1} \cdot C_5 \cdot N \cdot \frac{T(4R, f) + T_1(4R, f)}{R^{\mu(R)}}, \tag{2.11}$$

где $Q(r, f)$ *определено формулой* (2.3).

Доказательство. Докажем сначала, что при $0 < q_0 < q \leqslant 1$ и любом ε $(0 < \varepsilon < 1)$ выполняется оценка $(r \geqslant r_0)$

$$\left\{\frac{Q(r, f)}{\ln^+ M(r, 0, g)}\right\}^q \leqslant \varepsilon^{q_0} + \varepsilon^{q_0-1} \cdot \frac{Q(r, f)}{\ln^+ M(r, 0, g)}. \tag{2.12}$$

Действительно, выберем произвольное $r \geqslant r_0$. Если окажется, что

$$Q(r, f) \leqslant \varepsilon \cdot \ln^+ M(r, 0, g),$$

тогда

$$\left\{\frac{Q(r, f)}{\ln^+ M(r, 0, g)}\right\}^q \leqslant \varepsilon^q \leqslant \varepsilon^{q_0}$$

и (2.12) доказана.

Если для выбранного $r \geqslant r_0$

$$Q(r, f) > \varepsilon \cdot \ln^+ M(r, 0, g),$$

то

$$1 < \left\{\frac{Q(r, f)}{\varepsilon \cdot \ln^+ M(r, 0, g)}\right\}^q \leqslant \frac{Q(r, f)}{\varepsilon \cdot \ln^+ M(r, 0, g)},$$

а значит,

$$\left\{\frac{Q(r, f)}{\ln^+ M(r, 0, g)}\right\}^q \leqslant \varepsilon^{q-1} \cdot \frac{Q(r, f)}{\ln^+ M(r, 0, g)} \leqslant \varepsilon^{q_0-1} \cdot \frac{Q(r, f)}{\ln^+ M(r, 0, g)}.$$

Оценка (2.12) доказана и в этом случае.

Так как оценка (2.12) верна для любого $r \geqslant r_0$, то мы получаем

$$\int\limits_{r_0}^{0,5R} \left\{\frac{Q(r, f)}{\ln^+ M(r, 0, g)}\right\}^q \cdot \frac{\ln^+ M(r, 0, g)}{r^{\mu(r)+1}}\, dr \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^{q_0} \int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{\ln^+ M(r, 0, g)}{r^{\mu(r)+1}}\, dr + \varepsilon^{q_0-1} \cdot \int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{Q(r, f)}{r^{\mu(r)+1}}\, dr. \tag{2.13}$$

…кажем теперь, что величина $\int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{Q(r, f)}{r^{\mu(r)+1}}\, dr$ играет роль остаточного члена, …алогично логарифмической производной мероморфной функции.

Применим неравенство (2.10) к логарифмической производной функции $f(z) - a_k$

$$\int\limits_{r_0}^{0,5R} r^{-\mu(r)-1} \cdot \ln^+ M\left(r, \frac{f'}{f - a_k}\right) dr \leqslant 3\pi y \int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{m\left(r, \frac{f'}{f - a_k}\right)}{r^{\mu(r)+1}}\, dr +$$

$$+ \pi\varkappa \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi\varkappa}{4y} \int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{N\left(r, \frac{f'}{f - a_k}\right)}{r^{\mu(r)+1}}\, dr +$$

$$+ C_3 \cdot \frac{T\left(4R, \frac{f'}{f - a_k}\right) + T_1\left(4R, \frac{f'}{f - a_k}\right)}{R^{\mu(R)}} + C_4. \tag{2.14}$$

…к как при $0 < r_0 \leqslant r \leqslant 0,5R$ [2, стр. 61]

$$m\left(r, \frac{f'}{f - a_k}\right) \leqslant K_{15} \cdot \ln^+ T(2r, f) + C_7\, (a_k \neq \infty),$$

$$T(r, f') \leqslant 2 \cdot T(r, f) + \ln^+ r + K_{16}, \tag{2.15}$$

…о легко получаем

$$\int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{m\left(r, \frac{f'}{f - a_k}\right)}{r^{\mu(r)+1}}\, dr \leqslant K_{17} \cdot 2^{2\varkappa} \cdot \int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{\ln^+ T(r, f)}{r^{\mu(r)+1}}\, dr + C_8 \frac{\ln^+ T(R, f)}{R^{\mu(R)}} + C_7, \tag{2.16}$$

$$N\left(r, \frac{f'}{f - a_k}\right) \leqslant T(r, f') + T\left(r, \frac{1}{f - a_k}\right) \leqslant 3T(r, f) + \ln^+ r + K_{18}. \tag{2.17}$$

Оценки (2.14), (2.16) и (2.17) дают

$$\int\limits_{r_0}^{0,5R} r^{-\mu(r)-1} \cdot \ln^+ M\left(r, \frac{f'}{f - a_k}\right) dr \leqslant K_{17} \cdot 3\pi y \cdot 2^{2\varkappa} \cdot \int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{\ln^+ T(r, f)}{r^{\mu(r)+1}}\, dr +$$

$$+ 3\pi\varkappa \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi\varkappa}{4y} \cdot \int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r, f)}{r^{\mu(r)+1}}\, dr + C_9 \cdot \frac{T(4R, f) + T_1(4R, f)}{R^{\mu(R)}} + C_{10}.$$

Выберем в качестве $y = \frac{N\varkappa}{\varepsilon}$ и возьмем $r_0(\varepsilon, N)$ таким, чтобы при $r > r_0$ (N — фиксировано)

$$K_{17} \cdot 3\pi \cdot 2^{2\varkappa} \ln^+ T(r, f) \leqslant \frac{\varepsilon^2}{N^2 \cdot \varkappa} \cdot T(r, f),$$

тогда

$$\int\limits_{r_0}^{0,5R} r^{-\mu(r)-1}\cdot \ln^+ M\left(r, \frac{f'}{f-a_k}\right) dr \leqslant \frac{\varepsilon}{N}(5\varkappa + 1)\cdot \int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r,f)}{r^{\mu(r)+1}}\,dr + $$

$$+ C_9\cdot \frac{T(4R,f)+T_1(4R,f)}{R^{\mu(R)}} + C_{10}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{Q(r,f)}{r^{\mu(r)+1}}\,dr \leqslant \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{r_0}^{0,5R} r^{-\mu(r)-1}\cdot \ln^+ M\left(r, \frac{f'}{f-a_k}\right) dr + C_{11} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon(5\varkappa+1)\cdot \int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r,f)}{r^{\mu(r)+1}}\,dr + C_9\cdot N\,\frac{T(4R,f)+T_1(4R,f)}{R^{\mu(R)}} + C_{12}\cdot N. \quad (2.18)$$

Из (2.8) с учетом (2.15) получаем

$$\int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{\ln^+ M(r,0,g)}{r^{\mu(r)+1}}\,dr \leqslant 2\varphi(\lambda)\cdot \int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r,f)}{r^{\mu(r)+1}}\,dr +$$

$$+ C_{13}\cdot \frac{T(4R,f)+T_1(4R,f)}{R^{\mu(R)}} + C_{14}. \quad (2.19)$$

Учитывая (2.13), (2.18) и (2.19), получаем *

$$\int\limits_{r_0}^{0,5R} \left\{\frac{Q(r,f)}{\ln^+ M(r,0,g)}\right\}^q \cdot \frac{\ln^+ M(r,0,g)}{r^{\mu(r)+1}}\,dr \leqslant \varepsilon^{q_0-1}\cdot C_{15}\cdot N +$$

$$+ \varepsilon^{q_0}\cdot K_{19}\cdot(\lambda+1)\cdot \int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r,f)}{r^{\mu(r)+1}}\,dr + \varepsilon^{q_0-1}\cdot N\cdot C_{14}\cdot \frac{T(4R,f)+T_1(4R,f)}{R^{\mu(R)}}.$$

Лемма 2.4 доказана.

Следствие. *В условиях леммы (2.4) справедлива оценка*

$$\int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{A(r,f)}{r^{\mu(r)+1}}\,dr \leqslant \varepsilon^{q_0} K_{20}\, p\,(\lambda+1) \int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r,f)}{r^{\mu(r)+1}}\,dr +$$

$$+ \varepsilon^{q_0-1}\cdot C_{16}\cdot pN\cdot \frac{T(4R,f)+T_1(4R,f)}{R^{\mu(R)}} + \varepsilon^{q_0-1}\cdot C_{17}\cdot Np, \quad (2.20)$$

где $A(r, f)$ определено формулой (2.2).

Далее мы используем утверждение, установленное в работах [8, 9]:

Лемма 2.5. *Если $f(z)$ — мероморфная функция конечного нижнего порядка λ, то при любом $1 \leqslant \eta < 2$ имеют место следующие соотношения*

а) при $\lambda \leqslant 0,5$

$$\int\limits_{r_0}^{0,5R} r^{-\mu(r)-1}\cdot S(r,a,\eta,f)\,dr \leqslant \frac{K_{21}}{2-\eta}\cdot\lambda^2\cdot \int\limits_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r,f)}{r^{\mu(r)+1}}\,dr +$$

* Пользуемся оценкой $\varphi(\lambda) \leqslant \pi(\lambda+1)$, где $\varphi(\lambda)$ определено формулой (2.9).

$$+\frac{C_{18}}{2-\eta}\cdot\frac{T(2R, f)}{R^{\mu(R)}}+\frac{C_{19}}{2-\eta}; \tag{2.21}$$

б) при $\lambda > 0{,}5$

$$\int_{r_0}^{0,5R} r^{-\mu(r)-1}\cdot S(r, a, \eta, f)\,dr \leqslant \frac{K_{21}}{2-\eta}\cdot\lambda^{\eta}\cdot\int_{r_0}^{0,5R}\frac{T(r, f)}{r^{\mu(r)+1}}\,dr +$$

$$+\frac{C_{18}}{2-\eta}\cdot\frac{T(2R, f)}{R^{\mu(R)}}+\frac{C_{19}}{2-\eta}, \tag{2.22}$$

где $\mu(r)$ *определено формулой* (2.7) *и* a — *произвольное комплексное число.*

Действительно, в случае $\lambda < \rho$ (т. е. $\mu(r) = \lambda + \varepsilon$) оценки (2.21) и (2.22) установлены в работах [8, стр. 1330], [9, стр. 1176]; при $\lambda = \rho$ (т. е. $\mu(r) = l(r)$) оценки (2.21) и (2.22) получаются аналогично.

Лемма 2.6. *Пусть* $f(z)$ — *мероморфная функция конечного нижнего порядка* λ, $g(z) = z\cdot f'(z)$. *Тогда для любого* η, $1 \leqslant \eta < 2$, $p > 1$ ($p = n + \varepsilon_1$, $n = 1, 2, \ldots$, $0 < \varepsilon_1 \leqslant 1$) *и* $0 < \alpha < 1$ *справедлива оценка*

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{S(r, 0, \eta, g)\,N^{1/\alpha}\cdot A(r, f)}{T(r, f)} \leqslant \begin{cases}\dfrac{K_{22}}{2-\eta}\cdot\lambda^2, & 0<\lambda\leqslant 0{,}5\\[2mm] \dfrac{K_{22}}{2-\eta}\cdot\lambda^{\eta}, & \lambda > 0{,}5,\end{cases} \tag{2.23}$$

где $A(r, f)$ *определено формулой* (2.2).

Доказательство. Пусть $\lambda \leqslant 0{,}5$ и p — любое число ($p = n + \varepsilon_1$, $n = 1, 2, \ldots$, $0 < \varepsilon_1 \leqslant 1$). Тогда оценки (2.20) и (2.21) при любом ε, $0 < \varepsilon < 1$ и $q_0 > 0$ дают

$$\int_{r_0}^{0,5R} r^{-\mu(r)-1}\cdot\{S(r, 0, \eta, g) + N^{1/\alpha}\cdot A(r, f)\}\,dr \leqslant$$

$$\leqslant\frac{K_{21}}{2-\eta}\cdot\lambda^2\cdot\int_{r_0}^{0,5R}\frac{T(r, g)}{r^{\mu(r)+1}}\,dr+\frac{C_{18}}{2-\eta}\cdot\frac{T(2R, f)}{R^{\mu(R)}}+$$

$$+\frac{C_{19}}{2-\eta}+\varepsilon^{q_0}K_{20}\cdot p(\lambda+1)\cdot N^{1/\alpha}\cdot\int_{r_0}^{0,5R}\frac{T(r, f)}{r^{\mu(r)+1}}\,dr+ \tag{2.24}$$

$$+\varepsilon^{q_0-1}\cdot C_{16}\cdot p\cdot N^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\cdot\frac{T(4R, f)+T_1(4R, f)}{R^{\mu(R)}}+\varepsilon^{q_0-1}\cdot C_{17}\cdot p\cdot N^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}.$$

Используя оценку (2.15), мы из (2.24) находим

$$\int_{r_0}^{0,5R} r^{-\mu(r)-1}\cdot\{S(r, 0, \eta, g) + N^{1/\alpha}\cdot A(r, f)\}\,dr \leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{2K_{21}}{2-\eta}\cdot\lambda^2+\varepsilon^{q_0}\cdot K_{20}\cdot p(\lambda+1)\cdot N^{1/\alpha}\right)\cdot\int_{r_0}^{0,5R} r^{-\mu(r)-1}\cdot T(r, f)\,dr+$$

$$+\frac{2C_{18}}{2-\eta}\cdot\frac{T(2R, f)}{R^{\mu(R)}}+\frac{C_{19}}{2-\eta}+$$

$$+\varepsilon^{q_0-1}\cdot p\cdot N^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}\cdot\left(C_{16}\cdot\frac{T(4R, f)+T_1(4R, f)}{R^{\mu(R)}}+C_{17}\right).$$

Из последнего соотношения получаем

$$\varlimsup_{R\to\infty}\frac{\int\limits_{r_0}^{0,5R} r^{-\mu(r)-1}\cdot\{S(r,0,\eta,g)+N^{1/\alpha}\cdot A(r,f)\}\,dr}{\int\limits_{r_0}^{0,5R} r^{-\mu(r)-1}\cdot T(r,f)\,dr}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2K_{21}}{2-\eta}\cdot\lambda^2+\varepsilon^{q_0}\cdot K_{20}\cdot p(\lambda+1)N^{1/\alpha},$$

поэтому (см. [8], стр. 1330, [10], стр. 441)

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{S(r,0,\eta,g)+N^{1/\alpha}A(r,f)}{T(r,f)}\leqslant\frac{2K_{21}}{2-\eta}\cdot\lambda^2.$$

При $\lambda>0{,}5$ используем вместо оценки (2.21) оценку (2.22) и аналогично получим

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{S(r,0,\eta,g)+N^{1/\alpha}\cdot A(r,f)}{T(r,f)}\leqslant\frac{2K_{21}}{2-\eta}\cdot\lambda^{\eta}.$$

Лемма доказана.

§ 3. Доказательство основных результатов

Докажем* теорему I. Для этого в соотношении (2.23) положим

$$\eta=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p}\quad(1\leqslant\eta<2),$$

где

$$1\Big/\left(2+\frac{1}{p}\right)<\alpha\leqslant 1\Big/\left(1+\frac{1}{p}\right). \tag{3.1}$$

Из оценок (2.1) и (2.23) для произвольного конечного множества комплексных чисел $\{a_k\}_{k=1}^N$ $(a_k\neq\infty)$ и любого α, удовлетворяющего соотношению (3.1), получаем

$$\sum_{k=1}^{N}\delta_p^{\alpha}(a_k,f)\leqslant\begin{cases}K_{23}\cdot\dfrac{\lambda^{2\alpha}}{\left[\left(2+\frac{1}{p}\right)\alpha-1\right]^{1/\left(2+\frac{1}{p}\right)}}, & 0<\lambda\leqslant 0{,}5\\[2ex] K_{24}\cdot\dfrac{\lambda^{1-\frac{\alpha}{p}}}{\left[\left(2+\frac{1}{p}\right)\alpha-1\right]^{1/\left(2+\frac{1}{p}\right)}}, & \lambda>0{,}5\end{cases} \tag{3.2}$$

Так как (3.2) имеет место при любом конечном N, то [1, стр. 271] множество $D_p(f)$ не более чем счетно и

$$\sum_{(a)}\delta_p^{\alpha}(a,f)\leqslant K_{23}\cdot\frac{\lambda^{2\alpha}}{\left[\left(2+\frac{1}{p}\right)\alpha-1\right]^{1/\left(2+\frac{1}{p}\right)}}\ \text{при}\ \lambda\leqslant 0{,}5$$

* Теорему 1 доказываем для $1<p<\infty$. При $p=1$ и $p=\infty$ доказательство изложено в работах [8], [9], [10].

$$\sum_{(a)} \delta_p^{\alpha}(a, f) \leqslant K_{24} \cdot \frac{\lambda^{1-\frac{\alpha}{p}}}{\left[\left(2+\frac{1}{p}\right)\alpha - 1\right]^{1/\left(2+\frac{1}{p}\right)}} \text{ при } \lambda > 0{,}5.$$

Таким образом, мы доказали оценки (1.5) и (1.6) для

$$1\Big/\left(2+\frac{1}{p}\right) < \alpha \leqslant 1\Big/\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

Однако эти оценки остаются справедливыми и при

$$1\Big/\left(2+\frac{1}{p}\right) < \alpha \leqslant 1.$$

Действительно, докажем, например, оценку (1.5). Так как при $x > 1$ и $0 < \alpha < 1$

$$\Big\{\sum_{(a)} \delta_p^{x\alpha}(a, f)\Big\}^{1/x} \leqslant \sum_{(a)} \delta_p^{\alpha}(a, f),$$

то, положив в этом неравенстве $\alpha = \alpha_0$, из промежутка (3.1) и $1 \leqslant x \leqslant 1/\alpha_0$ получим в силу (1.5)

$$\sum_{(a)} \delta_p^{x\alpha_0}(a, f) \leqslant K_{25} \cdot \frac{\lambda^{2x\alpha_0}}{\left[\left(2+\frac{1}{p}\right)\alpha_0 - 1\right]^{x\alpha_0}} \leqslant$$

$$\leqslant K_{26} \cdot \frac{\lambda^{2x\alpha_0}}{\left[\left(2+\frac{1}{p}\right)\alpha_0 x - 1\right]^{x\alpha_0}}.$$

Аналогично доказывается и оценка (1.6) для $1\Big/\left(2+\frac{1}{p}\right) < \alpha \leqslant 1$. Теорема 1 доказана.

Проведем доказательство теоремы 2, уточняющей величины $\delta_p(a, f)$ мероморфных при $z \neq \infty$ функций конечного нижнего порядка λ. Этот результат является аналогом соответствующих данных В. П. Петренко о величинах дефектов $\delta(a, f)$ и величинах отклонений $\beta(a, f)$ мероморфных функций [8, 9, 10].

Выберем произвольное конечное множество $\{a_k\}_{k=1}^{N}$ различных комплексных чисел таких, что

$$\delta_p(a_k, f) \leqslant e^{-3}.$$

Пусть $\lambda \leqslant 0{,}5$, тогда* из (1.5)

$$\sum_{k=1}^{N} \delta_p^{\alpha}(a_k, f) \leqslant K_5 \cdot \frac{\lambda^{2\alpha}}{\left[\left(2+\frac{1}{p}\right)\alpha - 1\right]^{1/\left(2+\frac{1}{p}\right)}}. \qquad (3.3)$$

Оценка (3.3) дает

$$\sum_{k=1}^{N} \int\limits_{1/\left(2+\frac{1}{p}\right)}^{1} \frac{\delta_p^{\alpha}(a_k, f)}{\left[\left(2+\frac{1}{p}\right)\alpha - 1\right]^{\left(1+\frac{1}{p}\right)/\left(2+\frac{1}{p}\right)}} \cdot \psi\left(\left(2+\frac{1}{p}\right)\alpha - 1\right) d\alpha \leqslant$$

* Предполагается, что множество $D_p(f)$ содержит не менее двух точек.

$$\leqslant K_5 \cdot \int\limits_{1/\left(2+\frac{1}{p}\right)}^{1} \frac{\lambda^{2\alpha}}{\left[\left(2+\frac{1}{p}\right)\alpha-1\right]} \cdot \psi\left(\left(2+\frac{1}{p}\right)\alpha-1\right) d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K_5}{2+\frac{1}{p}} \cdot \lambda^{2/\left(2+\frac{1}{p}\right)} \cdot \int\limits_{0}^{1} \frac{\lambda^{2s/\left(2+\frac{1}{p}\right)} \cdot \psi(s)}{s} ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K_5}{2+\frac{1}{p}} \cdot \lambda^{2/\left(2+\frac{1}{p}\right)} \cdot \int\limits_{0}^{2} \frac{\psi(s)}{s} ds, \tag{3.4}$$

где $\psi(t)$ определено соотношением (1.7).

С другой стороны, для величины

$$I_k = \int\limits_{1/\left(2+\frac{1}{p}\right)}^{1} \frac{\delta_p^{\alpha}(a_k, f)}{\left[\left(2+\frac{1}{p}\right)\alpha-1\right]^{\left(1+\frac{1}{p}\right)/\left(2+\frac{1}{p}\right)}} \cdot \psi\left(\left(2+\frac{1}{p}\right)\alpha-1\right) d\alpha$$

проводя элементарные вычисления, получаем такую оценку

$$I_k \geqslant \frac{\sqrt{e}-1}{45e^{3/2}} \left\{\frac{\delta_p(a_k, f)}{\ln \frac{1}{\delta_p(a_k, f)}}\right\}^{1/\left(2+\frac{1}{p}\right)} \cdot \psi\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{\delta_p(a_k, f)}}\right) -$$

$$-\frac{3}{2}\delta_p(a_k, f) \cdot \psi_1\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{\delta_p(a_k, f)}}\right), \tag{3.5}$$

где $\psi_1(t) = \int\limits_0^t \frac{\psi(s)}{s} ds$.

Оценки (3.3), (3.4) и (3.5) дают

$$\sum_{k=1}^{N} \left\{\frac{\delta_p(a_k, f)}{\ln \frac{1}{\delta_p(a_k, f)}}\right\}^{1/\left(2+\frac{1}{p}\right)} \cdot \psi\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{\delta_p(a_k, f)}}\right) \leqslant K_{27} \cdot \lambda^{2/\left(2+\frac{1}{p}\right)} \int\limits_0^2 \frac{\psi(s)}{s} ds +$$

$$+\frac{3}{2K_5} \sum_{k=1}^{N} \delta_p(a_k, f) \cdot \psi_1\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{\delta_p(a_k, f)}}\right). \tag{3.6}$$

В наших предположениях $\psi_1(t) \leqslant \psi_1\left(\frac{1}{3}\right) \leqslant \int\limits_0^2 \frac{\psi(s)}{s} ds$ и в силу (3.3) получаем

$$\sum_{k=1}^{N}\delta_p(a_k, f)\cdot\psi_1\left(\frac{1}{\ln\frac{1}{\delta_p(a_k, f)}}\right)\leqslant K_{28}\cdot\lambda^2\int_0^2\frac{\psi(s)}{s}\,ds\leqslant$$

$$\leqslant K_{28}\cdot\lambda^{2/\left(2+\frac{1}{p}\right)}\cdot\int_0^2\frac{\psi(s)}{s}\,ds. \tag{3.7}$$

Далее находим

$$\sum_{e^{-s}\leqslant\delta_p(a, f)}\left\{\frac{\delta_p(a, f)}{\ln\frac{\pi(\lambda+e)}{\delta_p(a, f)}}\right\}^{1/\left(2+\frac{1}{p}\right)}\cdot\psi\left(\frac{1}{\ln\frac{\pi(\lambda+e)}{\delta_p(a, f)}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\psi(2)\cdot\sum_{e^{-s}\leqslant\delta_p(a, f)}\delta_p^{1/\left(2+\frac{1}{p}\right)}(a, f)\leqslant K_{29}\cdot\lambda^{2/\left(2+\frac{1}{p}\right)}. \tag{3.8}$$

Из оценок (3.6), (3.7) и (3.8) получаем при $\lambda\leqslant 0{,}5$ оценку (1.8) в теореме 2.

При $\lambda>0{,}5$ используем соответствующую оценку (1.6) и проводим аналогичные рассуждения.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3 следует из рассмотрения примеров типа примеров А. А. Гольдберга [5, 7, 12, 13, 14].

Выберем последовательность положительных чисел $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ и последовательность различных комплексных чисел $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(a_k\neq\infty)$, таких, что [7, стр. 150—151]

$$\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k=1,\quad S_1=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\,|\,a_k\,|<\infty,\quad S_2=\sum_{k=1}^{\infty}c_k<\infty.$$

Положим $\eta_0=\eta_1$,

$$\theta_0=0,\quad \theta_n=\pi\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\eta_k\quad (n=1, 2, \ldots)$$

и

$$h(z)=\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n a_n\cdot\exp\left(ze^{-i\theta_n}\right)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\exp\left(ze^{-i\theta_n}\right)}.$$

Очевидно, $h(z)$ — мероморфная функция порядка 1. Хейман [7, стр. 153] установил следующие асимптотические свойства функции $h(z)$.

При $r\to\infty$ равномерно относительно θ $|\,\theta_n-\theta\,|<\frac{1}{3}\pi\eta_n$,

$$\ln^+\frac{1}{|\,h(re^{i\theta})-a_n\,|}\geqslant\frac{2}{3}r\eta_n^2+0(1), \tag{3.9}$$

При всех r

$$T(r, h)\leqslant 2r+0(1). \tag{3.10}$$

Теорема 3 вытекает из следующих рассуждений. Пусть $p > 1$. Учитывая (3.9), получаем

$$m_p(r, a_n, h) = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\ln^+ \frac{1}{|h(re^{i\theta}) - a_n|}\right)^p d\theta\right\}^{1/p} \geqslant$$

$$\geqslant \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\frac{1}{3}\pi\eta_n}^{\theta+\frac{1}{3}\pi\eta_n}\left(\ln^+ \frac{1}{|h(re^{i\theta}) - a_n|}\right)^p d\theta\right\}^{1/p} \geqslant$$

$$\geqslant \left\{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{3} r\eta_n^2 + 0(1)\right]^p \cdot \frac{2}{3}\pi\eta_n\right\}^{1/p} \geqslant \frac{2}{3^{1+\frac{1}{p}}} r\eta_n^{2+\frac{1}{p}} + 0(1). \quad (3.11)$$

Положим

$$\eta_k = \frac{K_{30}}{k \ln^2 (2 + k)},$$

тогда (3.10) и (3.11) показывают, что для мероморфной функции $h(z)$

$$\delta_p(a_n, h) \geqslant \frac{K_{31}}{n^{2+\frac{1}{p}} \cdot \ln^{2\left(2+\frac{1}{p}\right)}(2+n)} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

поэтому при $\alpha < 1 \Big/ \left(2 + \frac{1}{p}\right)$

$$\sum \delta_p^\alpha(a, h) = \infty.$$

§ 4. Оценка величины $\nu(r, a, f)$

Докажем теперь теорему 4. Из оценки (2.23) имеем* $(1 \leqslant \eta < 2)$

$$\varliminf_{r\to\infty} S(r, a, \eta, f)/T(r, f) \leqslant \begin{cases} \dfrac{K_{22}}{2-\eta}\cdot\lambda^2 \text{ при } 0 < \lambda \leqslant 0{,}5 & (4.1)\\[2mm] \dfrac{K_{22}}{2-\eta}\cdot\lambda^\eta \text{ при } \lambda > 0{,}5. & (4.2)\end{cases}$$

Так как

$$\left\{\int_{I_j(r,a,f)}\left(\ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|}\right)^p d\theta\right\}^{1/p} \leqslant m_j(r, a, f)\cdot|I_j(r, a, f)|^{1/p},$$

то при любых $p > 1$, ζ, $\frac{1}{p} \leqslant \zeta < 1 + \frac{1}{p}$ и данном a

$$\sum_{(j)} |I_j(r, a, f)|^{-\zeta}\cdot\left\{\int_{I_j(r,a,f)}\left(\ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|}\right)^p d\theta\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{(j)} m_j(r, a, f)\cdot|I_j(r, a, f)|^{\frac{1}{p}-\zeta} = S\left(r, a, \zeta + 1 - \frac{1}{p}, f\right). \quad (4.3)$$

* Предполагается, что при $\lambda \leqslant 0{,}5$ множество $D_p(f)$ содержит не менее двух точек.

силу (4.1) при $\lambda \leqslant 0{,}5$ получаем $\left(\frac{1}{p} \leqslant \zeta < 1 + \frac{1}{p}\right)$

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{m_p(r, a, f)}{\nu^{\zeta}(r, a, f) \cdot T(r, f)} \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} \frac{S\left(r, a, \zeta + 1 - \frac{1}{p}, f\right)}{T(r, f)} \leqslant \frac{K_{22}}{1 + \frac{1}{p} - \zeta} \cdot \lambda^2. \quad (4.4)$$

Так как для любого $\varepsilon > 0$ и $r > r_0(\varepsilon)$

$$m_p(r, a, f) \geqslant \delta_p(a, f) \cdot (1 - \varepsilon) \cdot T(r, f),$$

то оценка (4.4) дает

$$(1 - \varepsilon)\, \delta_p(a, f) \cdot \varlimsup_{r\to\infty} \frac{1}{\nu^{\zeta}(r, a, f)} \leqslant \frac{K_{22}}{1 + \frac{1}{p} - \zeta} \cdot \lambda^2.$$

Откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем

$$\varliminf_{r\to\infty} \nu(r, a, f) \geqslant \left\{\frac{\left(1 + \frac{1}{p} - \zeta\right)\delta_p(a, f)}{K_{22} \cdot \lambda^2}\right\}^{1/\zeta}. \quad (4.5)$$

Замечая, что при $1 \leqslant \zeta < 1 + \frac{1}{p}$

$$\left(1 + \frac{1}{p} - \zeta\right)^{1/\zeta} = \left(1 + \frac{1}{p} - \zeta\right)^{1/\left(1+\frac{1}{p}\right)} \cdot \left(1 + \frac{1}{p} - \zeta\right)^{\left(1+\frac{1}{p}-\zeta\right)/2\zeta} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}\left(1 + \frac{1}{p} - \zeta\right)^{1/\left(1+\frac{1}{p}\right)},$$

из (4.5) при $\zeta = \frac{1}{\alpha}$, $1\Big/\left(1 + \frac{1}{p}\right) < \alpha \leqslant p$ получаем

$$\varliminf_{r\to\infty} \nu(r, a, f) \geqslant K_{32}\left[\left(1 + \frac{1}{p}\right)\alpha - 1\right]^{1/\left(1+\frac{1}{p}\right)} \cdot \left(\frac{\delta_p(a, f)}{K_{22} \cdot \lambda^2}\right)^{\alpha}. \quad (4.6)$$

Оценка (1.9) получается из оценки (4.6), если в (4.6) положить

$$\alpha = \alpha_0 = \frac{p}{p + 1}\left(1 - \frac{1}{\ln \frac{\delta_p(a, f)}{K_{22} \cdot \lambda^2}}\right)$$

$$\left(1\Big/\left(1 + \frac{1}{p}\right) < \alpha_0 \leqslant p\right).$$

Оценка (1.10) получается с помощью аналогичных рассуждений с использованием вместо оценки (4.1) оценки (4.2). Теорема 4 доказана.

В заключение автор выражает глубокую признательность В. П. Петренко за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции, М.— Л., 1941.

2. R. Nevanlinna. Le théorème de Picard — Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Paris, 1929.

3. G. Valiron. Sur la distribution des valeurs des fonctions méromorphes, Acta Math. 47 (1926), 117—142.

4. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, 1956.
5. А. А. Гольдберг. И. В. Островский. Распределение значений мероморфных функций. Изд-во «Наука», 1970.
6. М. А. Евграфов. Асимптотические оценки и целые функции, М., Физматгиз, 1962.
7. У. К. Хейман. Мероморфные функции. Изд-во «Мир», 1966.
8. В. П. Петренко. Некоторые оценки для величин дефектов мероморфных функций. «Сиб. матем. ж.», 7, № 6 (1966), 1319—1336.
9. В. П. Петренко. О росте мероморфных функций конечного нижнего порядка и величинах их дефектов. «Сиб. матем. ж.», 8, № 5 (1967), 1156—1189.
10. В. П. Петренко. Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка. «Изв. АН СССР, сер. матем.», 33, № 2 (1969), 414—454.
11. В. П. Петренко. Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка. ДАН СССР, 184, № 5 (1969), 1031—1033.
12. В. П. Петренко. Асимптотические свойства одного класса мероморфных функций. Вестник Харьковск. ун-та, сер. мех.-матем., вып. 34 (1969), 82—98.
13. А. А. Гольдберг. О дефектах мероморфных функций, ДАН СССР, 98 (1954), 893—895.
14. А. А. Гольдберг. О множестве дефектных значений мероморфных функций конечного порядка. «Укр. матем. ж.», 11, № 4 (1959), 438—443.
15. K. Arima. On maximum modulus of integral functions J. Math. Soc. Jap., 4, № 1 (1952), 62—66.

Поступила 22 февраля 1971 г.