ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 10 1970

ДОПОЛНЯЕМЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА И БЕЗУСЛОВНЫЕ БАЗИСЫ В $l_p \oplus l_2$

И. С. Эдельштейн

В работе [3] А. Пелчинский показал, что каждое дополняемое подпространство в $l_p\,(1 \leqslant p < \infty)$ и $c_0\,(= l_\infty)$ изоморфно самому пространству. В § 1 этой статьи аналогичное утверждение будет получено для прямой суммы $E = l_p \oplus l_2\,(1 \leqslant p < \infty)$.

Теорема. *Каждое дополняемое подпространство в $l_p \oplus l_2$ изоморфно, либо l_p, либо l_2, либо $l_p \oplus l_2$, либо конечномерно.*

Результаты § 1 существенно используются в § 2. И. Линденштраус и А. Пелчинский [4] показали, что в пространствах l_1 и c_0 все нормированные безусловные базисы эквивалентны. Для l_2 аналогичное утверждение — это известная теорема Бари—Гельфанда. Линденштраус и Ципин установили, что других банаховых пространств с таким свойством нет. Естественно теперь вместо эквивалентности рассматривать квазиэквивалентность базисов. Два безусловных нормированных базиса в фиксированном B-пространстве называются квазиэквивалентными, если они становятся эквивалентными после соответствующей перестановки их членов. В $l_p\,(1 < p \neq 2 < \infty)$ существуют не квазиэквивалентные базисы [3]. В § 2 установлено, что в $l_1 \oplus l_2$ все безусловные базисы квазиэквивалентны.

Примеры, построенные в замечаниях, показывают, что ряд утверждений, доказанных в работе, не переносится на произвольные B-пространства.

Приведем теперь некоторые факты и обозначения, используемые в статье.

Мы рассматриваем вещественные B-пространства. Норму в прямой сумме $l_p \oplus l_2$ будем считать равной сумме норм. Если $\{x_k\}$ — базис в B-пространстве и

$$y_i = \sum_{m_i}^{n_i} a_k x_k, \quad (m_1 < n_1 < m_2 < n_2 < \ldots),$$

то будем называть последовательность $\{y_i\}$ дизъюнктной относительно базиса $\{x_k\}$.

Если $\{x_k\}$ — множество элементов B-пространства, то символ $<\{x_k\}>$ обозначает замкнутую линейную оболочку этих элементов.

Предложение 1 (см. [1]). *Пусть $B_1 \subset l_{p_1}$, $B_2 \subset l_{p_2}\,(1 \leqslant p_1 < p_2 < \infty)$. Если подпространства B_i бесконечномерны, то они не изоморфны.*

Предложение 2. (см. [5]). *Пусть $\{x_k\}$ — конечное множество из $l_p\,(1 \leqslant p \leqslant 2)$. Тогда*

$$\max_{\varepsilon_k = \pm 1} \left\| \sum \varepsilon_k x_k \right\| \geqslant \gamma \sqrt{\sum \| x_k \|^2}.$$

Предложение 3 (см. [6]). *Если $\{x_k\}$ — конечное множество из l_2, то*

$$\min_{\varepsilon_k = \pm 1} \left\| \sum_{\varepsilon_k = \pm 1} \varepsilon_k x_k \right\| \leqslant \sqrt{\sum \| x_k \|^2}.$$

§ 1. ДОПОЛНЯЕМЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА В $l_p \oplus l_2$

Теорема 1. *Бесконечномерное дополняемое подпространство в* $l_p \oplus \oplus l_2$ $(1 \leqslant p \neq 2 < \infty)$ *изоморфно* l_p, *или* l_2, *или* $l_p \oplus l_2$.

В связи с тем, что $l_p^* = l_{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, достаточно рассмотреть случай $1 \leqslant p < 2$. Всюду в дальнейшем будем предполагать это, не оговаривая особо.

Пусть $E = l_p \oplus l_2 = X \oplus Y$, P_1 — проектор E на l_p параллельно l_2, P_2 — проектор E на l_2 параллельно l_p.

Определим отношения

$$\theta_1(z) = \frac{\| P_2 z \|}{\| P_1 z \|}, \quad \theta_2(z) = \frac{\| P_1 z \|}{\| P_2 z \|}, \quad z \in E, \ z \neq 0.$$

Пусть $\theta_i(B) = \sup\limits_{z \in B} \| \theta_i(z) \|$ $(i = 1, 2)$; $\theta_i(B) < \infty$ влечет P_i/B-изоморфизм, где B — подпространство в E. Пусть, например, $\theta_1(B) < \infty$. Тогда

$$\| P_1 x \| \leqslant \| x \| = \| P_1 x \| + \| P_2 x \| \leqslant (1 + \theta_1(B)) \| P_1 x \|,$$

что и доказывает утверждение. Рассмотрим теперь возможные значения $\theta_i(X)$, где X дополняемо в E. Ввиду предложения 1 и доказанного изоморфизма случай $\theta_i(X) < \infty$ $(i = 1, 2)$ исключается для бесконечномерного X:

а) $\theta_2(X) < \infty$. Тогда $P_{2/X}$ есть изоморфизм между X и подпространством в l_2. Следовательно, $X \sim l_2$.

б) $\theta_1(X) < \infty$. Докажем, что $X \sim l_p$. Имеем $E = l_p \oplus l_2 = X \oplus Y$, пусть T — проектор E на X параллельно Y, S — проектор E на Y параллельно X.

Докажем вначале, что сужение S на $l_2 : S_{|l_2}$ есть изоморфизм. Если $u \in l_2$, то

1) $\| Su \| \leqslant \| S \| \cdot \| u \|$;

2) $\| Su \| = \| u - Tu \| \geqslant P(u, X) = \inf\limits_{x \in X} \| u - x \| = \inf\limits_{x \in X} \| u - P_1 x - P_2 x \| =$

$$= \inf_{x \in X} (\| u - P_2 x \| + \| P_1 x \|) \geqslant \inf (\| u - P_2 x \| + \frac{1}{\theta} \| P_2 x \|) \geqslant C_1 \| u \|,$$

где

$$C_1 = \min\left(\frac{1}{\theta_1}, \ 1\right) > 0.$$

В силу предложения 1 $l_p \cap S l_2$ конечномерно и, используя [7], можно считать, что

$$l_p + S l_2 = l_p \oplus S l_2.$$

Покажем теперь, что дефект $l_p \oplus S l_2$ в E конечен. Допустим противное. Пусть тогда $M = (l_p \oplus S l_2) \cap l_2$, $l_2 = M \oplus N$, где N — бесконечномерное ортогональное дополнение к M в l_2. Если $g \in N$, то

$$\| T \| \cdot \| g \| \geqslant \| Tg \| = \| g - Sg \| = \| g - P_2 Sg \| +$$
$$+ \| P_1 Sg \| \geqslant \| g \| \quad (g \perp P_2 Sg).$$

Используя ограничение $P_{2, X}$, мы в силу условия $\theta_1(X) < \infty$ получаем изоморфизм $N \sim l_2$ и подпространства в l_p, что невозможно. Поэтому будем считать, что $E = l_p \oplus Sl_2$. Покажем, что для $\tilde{\theta}_1$, соответствующего этому разложению, $\tilde{\theta}_1(X) < \infty$.

Лемма 1. *Если $\{x_i\}_1^\infty \in l_p$, $\|x_i\| = 1$, то существует последовательность скаляров $\{\lambda_i\}_1^\infty$ такая, что $\sum \lambda_i^2 < \infty$, но ряд $\sum \lambda_i x_i$ расходится.*

Доказательство очевидно.

Лемма 2. *Если $\theta_1(X) < \infty$, то и $\tilde{\theta}_1(X) < \infty$.*

Так как $X \cap Sl_2 \subset X \cap Y = \{0\}$, то $\tilde{\theta}_1(x) < \infty$ влечет $\tilde{\theta}_1(X') = \infty$, где X'—любое подпространство X с конечным дефектом. Используя это, заключаем, что $\tilde{\theta}_1(X) = \infty$ влечет существование таких $x_n \in X$, что

$$\|P_1 x_n\| < \frac{1}{n}, \quad \|x_n\| = 1,$$

причем последовательность $\{x_n\}$ можно считать дизъюнктной относительно канонического базиса в E. Но в силу леммы 1 это противоречит тому, что P_1 —изоморфизм на X, так как дизъюнктность дает сходимость рядов $\sum \lambda_k^2 < \infty$ для $\sum \lambda_k x_k$.

Изменяя обозначения, мы можем считать, что

$$E = l_p \oplus l_2 = X \oplus Y,$$

P_1 есть изоморфизм на X и $l_2 \subseteq Y$. Обозначим далее $P_1 X = A$, $l_p \cap Y = B$ и покажем, что $A + B \sim \tilde{A} \oplus B \sim l_p$. Если $A \cap Y$ бесконечномерно, то (см. [3]) оно содержит подпространство, изоморфное l_p; пусть $\{g_i\}$ — базис в этом подпространстве, эквивалентный каноническому, $x_i = P_1^{-1} g_i \in X$. По лемме 1 для $\varepsilon > 0$ существует последовательность $\{\lambda_i\}$ такая, что

$$\|P_1(\sum \lambda_i x_i)\| = \|\sum \lambda_i g_i\| = 1, \quad \|P_2(\sum \lambda_i x_i)\| < \varepsilon.$$

Это дает $\|\sum \lambda_i g_i - \sum \lambda_i x_i\| < \varepsilon$, что невозможно ввиду

$$\|\sum \lambda_i g_i\| = 1, \quad \sum \lambda_i g_i \in Y,$$
$$\sum \lambda_i x_i \in X, \ E = X \oplus Y.$$

Поэтому $A \cap Y$ конечномерно, и, не уменьшая общности, можно считать $A \cap Y = \{0\}$, значит, $A \cap B = \{0\}$. Из $E = X \oplus Y$ при помощи аналогичных рассуждений получаем $A + B = A \oplus B$. Осталось доказать, что $A \oplus B = l_p$. Пусть $z \in l_p$, $z = Tz + Sz = x + y = P_1 x + P_2 x + P_1 y + P_2 y = P_1 x + P_1 y$, $P_1 x \in A$. Так как $l_2 \subset Y$, то $P_2 y \in Y$, а потому $P_1 y \in Y$; следовательно, $P_1 y \in Y \cap l_p = B$. По теореме Пелчинского [3] $A \sim l_p$ и $X \sim A \sim l_p$. Утверждение пункта б) доказано;

в) $\theta_1(X) = \theta_2(X) = \infty$. Если при этом, например, $X \cap l_p$ конечномерно, то $X = (X \cap l_p) \oplus X_1$, и если при этом $\theta_2(X_1) < \infty$, то в силу предыдущего $X \sim l_2$, таким образом, можно считать, что $x \cap l_p$ и $x \cap l_2$ либо бесконечномерны, либо содержат лишь нулевой элемент. Покажем теперь, что X содержит $l_p \oplus l_2$ с дополнением. Если $X \cap l_2$ и $X \cap l_p$ бесконечномерны, то в силу теоремы Пелчинского [3] $X \cap l_p$ содержит подпространство U, изоморфное l_p и дополняемое в нем. Теперь $U \oplus (X \cap l_2)$ дополняемо в X и изоморфно $l_p \oplus l_2$. Аналогичное построение с некоторыми техническими усложнениями может быть проведено и в случае $X \cap l_p = X \cap l_2 = \{0\}$. Поэтому в случае в) достаточно доказать следующее утверждение: если X дополняемо в $E = l_p \oplus l_2$, $E = X \oplus X_1$ и $X = Y \oplus Y_1$, где $Y_1 \sim l_p + l_2$, то $X \sim l_p \oplus l_2$.

Применим технику нормированных произведений, использованную Пелчинским при рассмотрении дополняемых подпространств в l_p [3]. Пусть E_i — счетный набор экземпляров пространства E. Символом $\hat{E} \equiv \underset{E}{\oplus} E_i$ обозначается B-пространство последовательностей $\{u_k\}$, $u_k \in E_k$, для которых

а) $\sum \| P_1 u_k \|^p < \infty, \quad \sum \| P_2 u_k \|^2 < \infty$

с нормой

$$\| \{u_k\} \| = \left(\sum_k \| P_1 u_k \|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_k \| P_2 u_k \|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Докажем, что $\hat{E} \sim E$. Пусть $\{(e_i, 0), (0, f_i)\}_{i \in I}$ — канонический базис в $E = l_p \oplus l_2$. Разобьем I на счетное множество непересекающихся бесконечных частей I_k.

Пусть F_k — замкнутая линейная оболочка элементов k-й компоненты и $t_k : F_k \leftrightarrow E_k$ — естественный изоморфизм, порожденный взаимнооднозначным соответствием $\tau_k : I_k \leftrightarrow I$. Тогда в силу условий а) и б) $t = t_1 + t_2 + \dots$ есть изоморфизм между E и $\hat{E} = \underset{E}{\oplus} E_i$. Если X_k — подпространство E_k, то символом $\underset{E}{\oplus} X_k$ обозначается B-пространство последовательностей $\{x_k\}$, удовлетворяющих условиям а) и б). Воспользовавшись тем, что $E_k \equiv E$, перенесем разложение $E = X \oplus X_1$ в $E_k : E_k = X^{(k)} \oplus X_1^{(k)}$ и обозначим $D = \left(\underset{E}{\oplus} X^{(k)} \right) \oplus \left(\underset{E}{\oplus} X_1^{(k)} \right)$; $D \subset E$, причем включение в общем случае строгое.

Пример. Пусть $E = l_1 \oplus l_2$, $\{(e_i, 0), 0, f_i)\}$ — канонический базис в E, $X = \langle (e_i, 0) \rangle$, $Y = \langle \left(\frac{e_i}{i}, f_i \right) \rangle$. Легко видеть, что $E = X \oplus Y$. Пусть T — проектор на X параллельно Y и S — проектор на Y параллельно X. Элемент $\left\{ \frac{f_1}{i} \right\} \in \hat{E}$, поскольку

а) $\sum \left\| P_1 \frac{f_1}{i} \right\| = 0, \quad$ б) $\sum \left\| P_2 \frac{f_1}{i} \right\|^2 < \infty$, но элемент $\left\{ \frac{Sf_1}{i} \right\} \bar{\in} E$, так как $Sf_1 = (e_1, f_1)$ и

$$\sum \left\| P_1 \frac{Sf_1}{i} \right\| = \sum \frac{1}{i} = \infty.$$

Докажем, однако, что $\tilde{E} \sim D$. Выделим в E элементы $(0, f_1), (0, f_2), \dots$ ($(0, f_i)$ — канонический базис в l_2) и обозначим $L_i = \langle (0, f_j) \rangle$ ($j = 1, 2, \dots, n$),

$$E_i = l_p \oplus \langle (0, f_{n_i+1}), (0, f_{n_i+2}), \dots \rangle.$$

Легко видеть, что $P_1 T u \underset{n_i \to \infty}{\to} 0$, где

$$u = \sum_{n_i+1}^{\infty} a_k f_k, \quad \|u\| = 1,$$

так как в противном случае нашлась бы последовательность $u_k = \sum_{m_k}^{n_k} a_i f_i$, $m_1 < n_1 < m_2 < \dots$ такая, что $\| P_1 T u_k \| \geqslant \delta > 0$, $\| u_k \| \leqslant 1$, а это противоречит лемме 1.

Выберем L_i так, чтобы $\|P_1Tu\| \leqslant \frac{1}{i}$ ($\forall u \in l_2 \cap E_i$, $\|u\| = 1$), и перенесем разложение $E = \tilde{E}_i \oplus L_i$ в $E_i \equiv E$. Имеем

$$E = \bigoplus_E E_i = \Big(\bigoplus_E E_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_E L_i\Big).$$

Последнее равенство очевидно, так как $L_i \subset l_2^{(i)}$. Далее

$$\tilde{E} \equiv \Big(\bigoplus_E \tilde{E}_i\Big) \sim l_p \oplus l_2, \quad L \equiv \Big(\bigoplus_E L_i\Big) \sim l_2.$$

Докажем, что $D \supseteq E$. Достаточно показать, что $\{z_i\} \in \tilde{E}$ влечет $\{T^{(i)}z_i\} \in (\bigoplus X^{(i)})$, где T — проектор E на X.

1) $z_i \in l_p^{(i)}$. Тогда $\sum \|z_i\|^p < \infty$, и поэтому $\sum \|Tz_i\|^p < \infty$, что дает

а) $\sum \|P_1Tz_i\|^p < \infty$; б) $\sum \|P_2Tz_i\|^2 < (\sum \|P_2Tz_i\|^p)^{\frac{2}{p}} < \infty$.
Следовательно, $\{T^{(i)}z_i\} \in \bigoplus_E X^{(i)}$.

2) $z_i \in \tilde{E}_i \cap l_2^{(i)}$. Из этого последовательно имеем

а) $\sum \|P_1Tz_i\|^p \leqslant \Big(\sum \|z_i\| \cdot \|P_1T \frac{z_i}{\|z_i\|}\|\Big)^p \leqslant \Big[(\sum \|z_i\|^2)\Big(\sum \frac{1}{i^2}\Big)\Big]^{\frac{p}{2}} < \infty$;

б) $\sum \|z_i\|^2 < \infty$, $\sum \|P_2Tz_i\|^2 < \infty$.

Комбинируя 1) и 2), получаем требуемое включение.

Переходим к доказательству изоморфизма D и $\hat{E}$. Если $u \in D$, то $u = u_1 + u_2$, где $u_1 \in \hat{E}$, $u_2 \in L$. Так как $D \supset \hat{E}$, то $u_2 = u - u_1 \in D$. Другими словами, если Q — проектор на L параллельно $\hat{E}$, то $QD \subset D$ и, следовательно, QD замкнуто в $L \sim l_2$. Поэтому

$$D = \tilde{E} \oplus QD \sim \tilde{E} \oplus l_2 \sim l_p \oplus l_2 \sim E \sim \hat{E}.$$

Окончательно имеем (сравните [3])

$$E \sim (X \oplus X_1) \sim (Y \oplus Y_1) \oplus X_1 \sim Y \oplus (X_1 \oplus Y_1) \sim E \oplus (X_1 \oplus Y_1) \sim$$
$$\sim \Big(\bigoplus_E E_i\Big) \oplus X_1 \oplus Y_1 \sim \bigoplus_E (X^{(i)} \oplus X_1^{(i)}) \oplus X_1 \oplus Y_1 \sim \Big(\bigoplus_E X^{(i)}\Big) \oplus$$
$$\oplus \Big(\bigoplus_E X_1^i\Big) \oplus X_1 \oplus Y_1 \sim \Big(\bigoplus_E X_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_E X_1^{(i)}\Big) \oplus Y_1 \sim E \oplus Y_1 \sim Y \oplus Y_1 \sim X.$$

§ 2. БЕЗУСЛОВНЫЕ БАЗИСЫ В ПРОСТРАНСТВАХ $l_p \oplus l_2$

Используя результаты § 1, докажем следующую теорему о разбиении:

Теорема 2. *Если $\{z_i\}$ ($i \in I$) — безусловный нормированный базис в $l_p \oplus l_2$, то его можно разбить на две части, одна из которых натягивает l_p, а вторая — l_2:*

$$I = I_1 \cup I_2, \quad I_1 \cap I_2 = \varnothing, \quad <\{z_i\}>_{i \in I_1} \sim l_p, \quad <\{z_i\}>_{i \in I_2} \sim l_2.$$

По-прежнему достаточно ограничиться случаем $1 \leqslant p < 2$.

Лемма 3. *Пусть $\{z_k\}$ — безусловный нормированный базис в $l_p \oplus l_2$ и $z = \Sigma a_k z_k$.*

Тогда существует $\gamma_1 > 0$, не зависящее от z, такое, что $\|z\| \geqslant \gamma_1 \times (\sum a_k^2)^{\frac{1}{2}}$.

Известно, что в l_p при $1 \leqslant p < 2$

$$\sup_{\varepsilon=\pm 1} \| \Sigma \varepsilon_k x_k \| \geqslant \gamma (\Sigma \| x_k \|^2)^{\frac{1}{2}} \text{ (предложение 2).}$$

Так как $\| z_k \| = 1$, то либо $\| P_1 z_k \|$, либо $\| P_2 z_k \|$ не меньше $\frac{1}{2}$. Поэтому

$$\| \sum a_k z_k \| \geqslant m' \sup_{\varepsilon=\pm 1} \| \sum \varepsilon_k a_k z_k \| \geqslant m' \sup_{\varepsilon=\pm 1} \| \sum^1 + \sum^2 \| \geqslant m' (\sup_{\varepsilon=\pm 1} \| \sum \varepsilon_k a_k P_1 z_k \| +$$

$$+ \sup_{\varepsilon=\pm 1} \| \sum \varepsilon_k a_k P_2 z_k \|) \geqslant \frac{1}{2} m \gamma \left[(\sum^{(1)} a_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum^{(2)} a_k^2)^{\frac{1}{2}} \right] \geqslant \frac{1}{2} m \gamma (\sum a_k^2)^{\frac{1}{2}},$$

где $\sum^{(i)} (i = 1, 2)$ распространено на те индексы k, для которых $\| P_i z_k \| \geqslant \frac{1}{2}$, а постоянная $m > 0$ зависит лишь от базиса $\{z_k\}$. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $\{z_k\}$ — *безусловный нормированный базис в* $l_p \oplus l_2$, $v_k = \sum_{m_k}^{n_k} \lambda_i z_i$, $\| v_k \| = 1$, $(m_1 < n_1 < m_2 < n_2 < \ldots)$. *Если* $P_1 v_k \to 0$, *то и* $P_1 v_k (\varepsilon_k) \to 0$, *где* $v_k (\varepsilon_k) = \sum_{m_k}^{n_k} \varepsilon_i^{(k)} \lambda_i z_i$ $(\varepsilon = \pm 1)$.

Если лемма не верна, то можно выделить подпоследовательность v_{k_j} такую, что $\| P_1 v_{k_j} (\varepsilon^{(j)}) \| \geqslant \delta > 0$. Переходя еще раз к подпоследовательности, мы можем считать $\| P_1 v_{k_j} \| \leqslant \frac{1}{j}$, и так как $\{v_{k_j}\}$ — безусловный базис в натягиваемом подпространстве, то по предложению 3 ряд $\sum \lambda_j v_{k_j}$ сходится для всех квадратично суммируемых $\{\lambda_j\}$. В силу безусловности базиса $\{z_k\}$ ряды $\sum \mu_j v_{k_j}$ и $\sum \mu_j v_{k_j} (\varepsilon^{(j)})$ сходятся одновременно. Отсюда вытекает, что $\sum \lambda_j P_1 v_{k_j} (\varepsilon^{(j)})$ сходятся для всех квадратично суммируемых последовательностей $\{\lambda_j\}$, а это противоречит лемме 1.

Основную роль в доказательстве играет следующая

Лемма 5. Если $\{z_k\}$ — *безусловный нормированный базис в* $l_p \oplus l_2$ *и* $P_1 z_{k_i} \to 0$, *то* $< \{z_{k_i}\} > \sim l_2$.

Так как условие $P_1 z_{k_j} \to 0$ показывает, что $< \{z_{ki}\} >$ содержит l_2, то применяя результат § 1 и используя безусловность базиса $\{z_k\}$, мы получаем, что, если лемма неверна, $< \{z_{k_i}\} > \sim l_p \oplus l_2$. Пусть P_1 — проектор $< \{z_{k_i}\} >$ на l_p параллельно l_2, соответствующий этому разложению. Как и в лемме 2, $P_1 z_{k_i} \to 0$. Поэтому достаточно доказать следующее утверждение.

Лемма 5'. Если $\{z_k\}$ — *безусловный нормированный базис в* $l_p \oplus l_2$, *то* $P_1 z_k \to 0$.

Предположим противное. Определим линейное отображение

$$R : l_p \oplus l_2 \to l_p \oplus l_2, \quad R z_k = x_k + f_k = u_k,$$

где $z_k = P_1 z_k + P_2 z_k = x_k + y_k$, а $\{f_k\}$ — ортонормированный базис в l_2. Покажем, что R есть изоморфизм $l_p \oplus l_2$ на замкнутое линейное многообразие в $l_p \oplus l_2$, обозначаемое далее через G. Пусть

$$z = \sum_1^n a_k z_k, \quad \| z \| = \| \sum a_k x_k \| + \| \sum a_k y_k \|.$$

По лемме 3

$$\| z \| \geqslant \gamma_1 \cdot \left(\sum_1^n a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому

$$\| Rz \| = \| \sum a_k x_k \| + (\sum a_k^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant \| z \| + (\sum a_k^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant (1 + \gamma_1) \cdot \| z \|.$$

Обратно, пусть $\| z \| = 1$. Если $\| Rz \|$ не ограничены снизу, то ввиду взаимной однозначности R $\| Rz \|$ не ограничены снизу для $z \in \langle \{z_j\} \rangle$ $(j = n+1, n+2, \ldots)$ для любого $n > 0$. Поэтому можно найти дизъюнктную относительно базиса $\{z_k\}$ последовательность $\{z^{(j)}\}$,

$$z^{(j)} = \sum_{m_j}^{n_j} a_k z_k, \quad m_1 < n_1 < m_2 < \ldots,$$

такую, что $\| z^{(j)} \| = 1$, но $Rz^{(j)} \to 0$.

Рассмотрим элементы $z_j(\varepsilon) \equiv \sum_k \varepsilon_k a_k z_k$. В силу безусловности базиса $\{z_k\}$

$$0 < \delta \leqslant \| z^{(j)}(\varepsilon) \| = \| P_1 z^{(j)}(\varepsilon) \| + \| P_2 z^{(j)}(\varepsilon) \| \leqslant \Delta < \infty. \qquad (1)$$

Возьмем $(\varepsilon) = (\varepsilon)(j)$ таким, чтобы

$$\| P_2 u^{(j)}(\varepsilon) \| \leqslant \left(\sum_{m_j}^{n_j} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из (1) вытекает, что либо

$$\| P_2 z^{(j)}(\varepsilon) \| \geqslant \frac{\delta}{2} > 0,$$

но тогда

$$\| Rz^{(j)} \| \geqslant \left(\sum_{m_j}^{n_j} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \| P_2 z^{(j)}(\varepsilon) \| \geqslant \frac{\delta}{2} > 0,$$

что противоречит построению $z^{(j)}$, либо $\| P_1 z^{(j)}(\varepsilon) \| \geqslant \frac{\delta}{2}$, что противоречит лемме 4. Следовательно, R есть изоморфизм.

Мы имеем $G \subset l_p \oplus l_2$; проекторы на эти l_p и l_2 обозначим, как и раньше, P_1 и P_2. Как доказано выше, $G \sim l_p \oplus l_2$, $G = Rl_p \oplus Rl_2$, проекторы G на Rl_p и Rl_2, соответствующие этому разложению, обозначим P_1 и P_2.

Обозначим далее $\theta(u) = \frac{\| P_1 u \|}{\| P_2 u \|}$, $u \in G$, $u \neq 0$, $\theta(C) = \sup_{u \in C} \theta(u)$, $C \subset G$. Так как $u_i = Rz_i$, то по предположению $\theta(u_i) \to 0$. Определим последовательность $\theta_k^{(i)}$:

$$\theta_1^{(i)} = \theta(u_i), \quad \theta_2^{(i)} = \theta < \{u_i, u_{i+1}\} >, \quad \theta_3^{(i)} = \theta < u_i, u_{i+1}, u_{i+2} >.$$

Покажем, что при всех k можно выбрать столь большое i, что разность $\theta_{k+1}^{(i)} - \theta_k^{(i)}$ станет меньше наперед данного ε. Действительно,

$$\theta_{k+1}^{(i)} = \theta(x + \alpha u_{i+k+1}) = \frac{\| P_1 x + \alpha x_{i+k+1} \|}{(\| P_2 x \|^2 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}} \leqslant \frac{\| P_1 x \| + | \alpha | \cdot \| x_{i+k+1} \|}{(\| P_2 x \|^2 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{\frac{\| P_1 x \|}{\| P_2 x \|} \cdot \| P_2 x \| + | \alpha | \cdot \| x_{i+k+1} \|}{(\| P_2 x \|^2 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}} \leqslant \left(\frac{\| P_1 x \|^2}{\| P_2 x \|^2} + \| x_{i+k+1} \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \left[\theta_k^{(i)} \right]^2 + \| x_{i+k+1} \|^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

причем по нашему предположению $\|x_n\| \to 0$ $(n \to \infty)$. С другой стороны, $\theta_k^{(i)} \to \infty$, так как $<\{u_j\}> \supset l_p$ $(j > n)$ для всех $n > 0$.

Так как $Rl_p \cap l_2$ конечномерно, то можно считать, что $Rl_p \cap l_2 = \{0\}$. При этом условии $\theta(v) \geqslant \omega > 0$ для $v \in Rl_p$.

Действительно, если $\inf \theta(v) = 0$, то, рассуждая как в лемме 2, мы можем выделить дизъюнктную относительно естественного базиса в Rl_p последовательность $\{v_i\}$, для которой $\Sigma \|P_1 v_i\| < \infty$ и $\|P_2 v_i\| \geqslant \beta > 0$ и которая, следовательно, натягивает l_2, что невозможно.

Зафиксируем числа ω_2, ω_1 так, чтобы было

$$0 < \omega_2 < \omega_1 < \omega.$$

В силу предыдущих замечаний можно определить следующие подпространства $B_k \subset G$:

$$B_k = < \{u_{i_k}, \ldots, u_{j_k}\} >, \; i_1 < j_1 < i_2 < \ldots < j_k, \bar{\omega}_2 < \theta(B_k) < \omega_1$$

и элементы $u^{(k)}$ со свойствами:

$$u^{(k)} = \sum_{i_k}^{j_k} \gamma_s u_s, \quad \|u_k\| = 1, \; \bar{\omega}_2 < \theta(u_k) < \omega_1. \tag{2}$$

Обозначим

$$u^{(k)}(\varepsilon) = \sum_{i_k}^{j_k} \varepsilon_s \gamma_s u_s \quad (\varepsilon_s = \pm 1).$$

В силу леммы 4 существует $\omega_2(\bar{\omega}_2)$ $(\omega_2 \geqslant \bar{\omega}_2 > 0)$ такое, что $\theta(u^{(k)}(\varepsilon)) > > \omega_2 > 0$. Поэтому мы можем заменить $u^{(k)}$ на $u^{(k)}(\varepsilon)$, сохранив условия (2).

Покажем, что, переходя к подпоследовательности, можно считать $\bar{P}_2(u^{(k)}(\varepsilon^{(k)}))$ дизъюнктным относительно базиса $\{u_k\}$; $\|P_2 u^{(k)}(\varepsilon)\| \geqslant \beta > 0$, так как $\bar{P}_2 u^{k_i}(\varepsilon) \to 0$ влечет $P_1 u^{(k_i)}(\varepsilon) \to u^{(k_i)}(\varepsilon)$ и в силу условия $\|u^{(k_i)}(\varepsilon)\| \geqslant \geqslant \delta > 0$

$$\theta(P_1 u^{k_i}(\varepsilon) \to \theta(u^{k_i}(\varepsilon)),$$

что противоречит построению $u^{k_i}(\varepsilon)$.

Выберем далее безусловный нормированный базис в Rl_2, и пусть $\bar{P}_2^{(n)}$ есть проектор Rl_2 на линейную оболочку первых n элементов этого базиса, обращающийся в нуль на остальных. В силу условия $P_1 u_k \to 0$ последовательность $u_k \xrightarrow{\text{сл.}} 0$ в $l_p \oplus l_2$, и поэтому $\bar{P}_2^{(n)} u_k \to 0$. Пусть E_{m_i} — линейная оболочка первых m_i элементов выбранного в Pl_2 базиса, содержащая $\bar{P}_2(u_k(\varepsilon))$ с точностью 2^{-k} $(k = 1, 2, \ldots, i)$.

Ввиду оценки

$$\min_{\varepsilon=\pm 1} \|P_2^{(m_i)} u^{(p)}(\varepsilon)\| = \min_{\varepsilon=\pm 1} \|\sum \varepsilon_s \gamma_s \bar{P}_2^{m_i} u_s\| \leqslant$$

$$\leqslant \|R\| \cdot \left(\sum_{i_p}^{j_p} \gamma_s^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \max_{i_p < s < j_s} \|R^{-1} P_2^{m_i} u_s\| \leqslant \gamma_1 \quad \|R\| \quad \|R^{-1}\| \max_s \|\bar{P}_2^{m_i} u_s\|$$

элемент $u^{(i+1)} = u^{(i+1)}(\varepsilon)$ можно выбрать так, что $\|\bar{P}_2^{m_i} u^{(i+1)}\|$ сколь угодно мало. Из этого вытекает, что мы можем выбрать последовательность $u^{(k)}$, удовлетворяющей условиям (2), такой, что ряд $\sum \lambda_k \bar{P}_2 u_k^{(k)}$ сходится для всех квадратично суммируемых последовательностей, и, наконец, $P_2 u^{(k)}$ дизъюнктны относительно базиса $\{u_k\}$ (чего можно добиться, переходя к подпоследовательности, ввиду $P_2 u_k \to 0$).

Спроектируем полученные $u^{(k)}$ на Rl_p и разложим полученные проекции $\overline{P}_1 u^{(k)} = w^{(k)} + v^{(k)}$, где $u^{(k)} \in B_k$, а $v^{(k)}$ принадлежит замыканию линейной оболочки остальных $\{u_j\}$.

Из условия $\theta(u^{(k)}) \geqslant \omega_2 > 0$ и леммы 1 вытекает, что $\|\overline{P}_1 u^{(k)}\| \geqslant \geqslant \nu(\omega_2) > 0$. По определению B_k

$$\theta(w^{(k)}) < \omega_1 < \omega.$$

Покажем, что $\|v^{(k)}\| \geqslant u_1 > 0$. В противном случае пусть $v^{(k_i)} \to 0$. Тогда отграничены от нуля $\|P_2 w^{(k_i)}\|$, так как $P_2 w^{(k_i)} \to 0$ влечет в силу $\theta(w^{(k_i)}) < \omega_1 w^{(k_i)} \to 0$ и, следовательно, $w^{(k_i)} + v^{(k_i)} = \overline{P}_1 u^{(k_i)} \to 0$, что противоречит доказанному выше. Используя это, имеем

$$\theta(w^{(k_i)} + v^{(k_i)}) = \frac{\|P_1 w^{(k_i)} + P_1 v^{(k_i)}\|}{\|P_2 w^{(k_i)} + P_2 v^{(k_i)}\|} \leqslant \frac{\|P_1 w^{(k_i)}\|}{\|P_2 w^{(k_i)}\|} + $$
$$+ \frac{\|P_1 v^{(k_i)}\|}{\|P_2 w^{(k_i)}\|} = \theta(w^{(k_i)}) + o(1) < \varepsilon,$$

что противоречит определению ω.

Докажем теперь, что $\theta(v_k) \geqslant \mu_2 > 0$. Из предыдущего следует, что противное влечет $P_1 v^{(k_j)} \to 0$. Пусть вначале $w^{(k_j)} \to 0$. Тогда

$$\theta(w^{(k_j)} + v^{(k_j)}) \leqslant \frac{\|P_1 w^{(k_i)} + P_1 v^{(k_i)}\|}{\|P_2 v^{(k_i)}\|} \to 0,$$

что невозможно. Не ограничивая общности, можно считать, что в противном случае $\|w^{(k_j)}\|$ отграничены от нуля. Тогда, как и выше, $\|P_2 w^{(k_j)}\|$ ограничены от нуля, что дает

$$\theta(w^{(k_j)} + v^{(k_j)}) = \frac{\|P_1 w^{(k_j)} + P_1 v^{(k_j)}\|}{\|P_2 w^{(k_j)} + P_2 v^{(k_j)}\|} \leqslant \frac{\|P_1 w^{(k_j)}\|}{\|P_2 w^{(k_j)}\|} + \frac{\|P_1 v^{(k_j)}\|}{\|P_2 v^{(k_j)}\|} < \omega_1 + 0(1),$$

это противоречит условию $w^{(k)} + v^{(k)} \in Rl_p$. Итак, мы получили $\|v^{(k)}\| \geqslant \geqslant \mu_1 > 0$, $\theta(v^{(k)}) \geqslant \mu_2 > 0$.

Заметив, что $P_2 u^{(k)} = -v^{(k)} + v_1^{(k)}$, где $v_1^{(k)} \in B_k$, мы в силу дизъюнктности $P_2 u^{(k)}$ относительно $\{u_k\}$ и в силу безусловности базиса $\{u_k\}$ получим, что сходимость ряда $\sum \lambda_k \overline{P}_2 u^{(k)}$ влечет сходимость ряда $\sum \lambda_k \overline{P}_2 u_k$, а это противоречит лемме 1. Лемма 5 доказана.

Следующая лемма дает требуемое разбиение базиса на части.

Лемма 6. *Пусть $\{z_k\}$ — безусловный нормированный базис в $l_p \oplus l_2$, $z_k = P_1 z_k + P_2 z_k = x_k + y_k$.*

Тогда:

а) *нуль является предельной точкой множества $\{\|x_k\|\}_1^\infty$;*

б) *нуль является изолированной предельной точкой множества $\{\|x_k\|\}_1^\infty$.*

а) Пусть, напротив, $\|x_k\| \geqslant \mu > 0$. Обозначим через $\{f_k\}$ ортонормированную систему, натягивающую l_2. Так как $f_k \xrightarrow{\text{сл.}} 0$, то, переходя к подпоследовательности, можно считать $\{f_k\}$ дизъюнктными относительно $\{z_k\}$,

$$f_k = \sum_{m_k}^{n_k} \zeta_i z_i, \quad m_1 < n_1 < m_2 < \ldots$$

Пусть $f_k(\varepsilon) = \sum_{m_k}^{n_k} \varepsilon_i \zeta_i z_i$. В силу безусловности базиса $\{z_k\}$ ряды $\Sigma h_k f_k$ и $\Sigma h_k f_k(\varepsilon)$ сходятся одновременно и, следовательно, для всех квадратично суммируемых последовательностей. По лемме 1

$$\lim_{i\to\infty} \max_{\varepsilon} \| P_1 f_i(\varepsilon) \| = 0.$$

Применяя предложения 2 и используя то, что $\|x_k\| \geqslant \mu > 0$, имеем

$$\left(\sum_{m_k}^{n_k} |\zeta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{\mu} \cdot \gamma \cdot \max_{\varepsilon} \| P_1 f_k(\varepsilon) \| \to 0.$$

С другой стороны, из предложения 3

$$\min_{\varepsilon} \left\| \sum_{m_k}^{n_k} \varepsilon_i \zeta_i y_i \right\| \leqslant \left(\sum_{m_k}^{n_k} |\zeta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0,$$

и поэтому найдутся такие $\varepsilon_i^{(k)}$, что

$$f_k(\varepsilon^{(k)}) = \sum \varepsilon_i^{(k)} \zeta_i z_i \to 0,$$

что противоречит безусловности базиса $\{z_i\}$.

б) В противном случае существует последовательность $r_1 > s_1 > r_2 > > s_2 > \ldots$ и бесконечное множество N_i такие, что $s_i \leqslant \|x_k\| < r_i$, $k \in N_i$. Из безусловности базиса $\{z_i\}$ вытекает, что существуют бесконечные множества $M_i \subset N_i$ такие, что $< \{z_k\} > \in l_p (k \in M_i)$, причем в случае $p > 1$ базис $\{z_k\}_{k\in M_i}$ можно считать эквивалентным классическому, так как $z_k \xrightarrow{\text{сл.}} 0$. Поэтому

$$\| \sum_{k_i \in M_i} \lambda_k z_k \| \geqslant m_i \left(\sum |\lambda_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad m_i > 0.$$

Возьмем n_i элементов z_k $(k \in M_i)$ так, чтобы $n_i^{\frac{1}{p}+\frac{1}{2}-1} \cdot m_i \to 0$. Имеем

$$\left\| \frac{1}{n_i} \sum_{1}^{n_i} z_k \right\| > \frac{m_i}{n_i^{1-\frac{1}{p}}} \quad (k \in M_i). \tag{3}$$

Пусть $\overline{N}$ — совокупность индексов выбранных z_k. Так как $P_1 z_k \to 0$ $(k \in \overline{N})$, то $< \{z_k\} > \sim l_2$ по лемме 5.

В силу эквивалентности безусловных базисов в l_2

$$\| \sum \lambda_i z_i \| \leqslant K \left(\sum \lambda_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (k < \infty, \; j \in N)$$

в частности,

$$\left\| \frac{1}{n_i} \sum_{k \in M_i} z_k \right\| < K n_i^{-\frac{1}{2}},$$

и сравнивая с (3), имеем

$$\frac{m_i}{n_i^{1-\frac{1}{p}}} \leqslant K \cdot n_i^{-\frac{1}{2}}, \quad m_i \cdot n_i^{\frac{1}{p}+\frac{1}{2}-1} \leqslant K < \infty,$$

что противоречит выбору n_i. Лемма 6 доказана.

Пусть теперь $\eta > 0$ — наименьшая положительная точка множества $\|P_1 z_k\|$, существование которой доказано в лемме 6. Тогда в силу леммы 5 $< \{z_k\} > \sim l_2$, $\|P_1 z_k\| < \frac{\eta}{2}$, а в силу леммы 6 а) $< \{z_k\} > \sim l_p$, $\|P_1 z_k\| > \eta$.

В силу определения η, как наименьшей положительной предельной точки, доказательство теоремы 2 закончено. Из теоремы 2 и теоремы об эквивалентности безусловных нормированных базисов в l_1, l_2, l_∞ [2, 4] вытекает

Теорема 3. *В $l_1 \oplus l_2$ и $l_2 \oplus l_\infty$ все безусловные нормированные базисы квазиэквивалентны.*

Замечание 1. В теореме 1 доказано, что дополняемое подпространство в прямой сумме $l_p \oplus l_2$ изоморфно прямой сумме дополняемых подпространств в сомножителях. Неизвестно, сохраняется ли это свойство для всех B = пространств, однако если не требовать дополняемости, то можно привести контрпример. А именно, построим в $l_1 \oplus l_2$ подпространство X, которое не изоморфно $X_1 \oplus X_2$, где X_i — подпространство в l_i $(i = 1, 2)$. Пусть, как обычно, $\{e_i\}$ — канонический базис в l_1, $\{f_i\}$ — канонический базис в l_2. Положим $z_i = \alpha_i e_i + f_i$, где $\alpha_i \to 0$, $\alpha_i > 0$, но $\sum \alpha_i^2 = \infty$. Пусть X — подпространство в $l_1 \oplus l_2$, натянутое на $\{z_i\}$. Обозначим $\tilde{z}_i = \frac{z_i}{\|z_i\|}$. Легко видеть, что $\{\tilde{z}_i\}$ — безусловный нормированный базис в X. Пусть Y — подпространство X, изоморфное l_2. Тогда P_2 — проектор на l_2 параллельно l_1 — изоморфно отображает Y на подпространство $\tilde{Y}$ в $l_2 : l_2 = \tilde{Y} \oplus Z$, причем Z — бесконечномерно. Поэтому существует подпоследовательность $\{f_{k_i}\}$, проекции которой на Z параллельно $\tilde{Y}$ отграничены от нуля. Переходя еще раз к подпоследовательности, мы в силу условия $\alpha_i \to 0$ можем считать, что $< \{z_{k_i}\} > \sim l_2$.

По построению $< \{z_{k_i}\} >$ и Y имеют нулевой раствор, а поэтому X не может быть представлено в виде $Y \oplus X_1$, где X_1 — подпространство l_1.

Замечание 2. В лемме 4 доказано, что если $\{z_k\}$ — безусловный нормированный базис в $l_2 \oplus l_1$, то проекции $\{z_k\}$ на l_1 параллельно l_2 не стремятся к нулю. Покажем, что существует B-пространство A, такое что $l_1 \oplus A$ имеет безусловный нормированный базис $\{z_k\}$, и проекции $\{z_k\}$ на l_1 параллельно A стремятся к нулю. В качестве $l_1 \oplus A$ возьмем B-пространство X, построенное в предыдущем пункте. Условие $\sum \alpha_i^2 = \infty$ позволяет построить элементы

$$u_i = \sum_{m_i}^{n_i} \lambda_k z_k \quad (m_1 < n_1 < m_2 < \ldots),$$

которые натягивают l_1. Легко видеть, что это l_1 дополняемо в X (сравните [3]). В то же время, так как $z_k \xrightarrow{\text{сл.}} 0$, проекции на любое $l_1 \subset X$ стремится к нулю.

Замечание 3. В дополнение к основному результату об эквивалентности безусловных нормированных базисов в $l_1 \oplus l_2$ заметим, что это неверно для всех подпространств в $l_1 \oplus l_2$, имеющих безусловный базис. В качестве примера возьмем $X = l_1 \oplus A$, рассмотренное в пунктах 2 и 3. Построим в нем безусловный нормированный базис $\{w_k\}$, не стремящийся слабо к нулю. Тогда, очевидно, $\{w_k\}$ не эквивалентно $\{z_k\}$, где $\{z_k\}$ — базис, использованный при построении X. Для этого заметим, что

$$A = l_1 \oplus A_1,$$

поэтому

$$A_1 \sim l_1 \oplus A_1 \sim (l_1 \oplus l_1 \oplus A_1) \sim l_1 \oplus (l_1 \oplus A_1) \sim X$$

и, следовательно, в A есть безусловный базис. В качестве $\{w_k\}$ возьмем объединение безусловного базиса в A и канонического базиса в l_1.

В заключение автор благодарит проф. М. И. Кадеца за внимание и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Банах. Курс функционального анализа. «Радянська школа», Київ, 1948.
2. И. М. Гельфанд. Замечание к работе Н. К. Бари «Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве». Уч. зап. МГУ, вып. 148, 224—225.
3. A. Pelczynsky. Projection in certain Banach spaces. Studia Math., 19 (1960), 209—228.
4. J. Lindenstrauss and A. Pelczynsky. Absolutely summiny operators in Lp. spaces and their applications.
5. W. Orlicz. Über unbedingte Konvergenz in Funktioneraumen. Studia Math, IV, 1938, 33—38.
6. М. И. Кадец. Об условно сходящихся рядах в пространствах L^p. УМН 9 : 1 (59), (1954), 107—109.
7. В. И. Гурарий. О растворах и наклонах подпространств банахова пространства. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 1. Изд-во ХГУ, Харьков, 1965, 194—204.

Поступила 8 декабря 1968 г.