УДК 517.86

М. Г. ЛЮБАРСКИЙ

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ЛЕВИТАНОВСКИХ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ Г. БОРА

1. Обозначим через $B(G, T)$ множество почти-периодических (п-п) функций Г. Бора, отображающих топологическую группу (G, T) в комплексную плоскость C, и рассмотрим множество $A(G, T)$ функций, представимых в виде

$$\varphi = \frac{f}{g},$$

где $f, g \in B(G, T)$, g не обращается в нуль ни в одной точке группы G. Множество $A(G, T)$ так же, как и его замыкание в равномерной метрике — $\overline{A}(G, T)$, состоит из левитановских почти-периодических (Л. п-п.) функций.

А. Баскаков [1] показал, что в случае, если группа (G, T) является конечномерным евклидовым пространством, множество $\overline{A}(G, T)$ содержит все ограниченные Л. п-п. функции. В настоящей заметке выясняется, что по крайней мере для σ-компактных групп множество $\overline{A}(G, T)$ совпадает с множеством $L(G, T)$ всех Л. п-п. функций, заданных на группе (G, T).

Это свойство может служить простым определением класса Л. п-п. функций на σ-компактных группах.

2. Будем исходить из следующих определений п-п. и Л. п-п. функций (см. [2] и [3]).

Сопоставим функции $\varphi\colon G \to C$ семейство $\{U_{\varepsilon, N}\}$ подмножеств группы G:

$$U_{\varepsilon, N} = \{x \in G\colon \max_{p, q \in N} |\varphi(pxq) - \varphi(pq)| \leqslant \varepsilon\}$$

при всех $\varepsilon > 0$ и конечных подмножествах $N \subset G$.

Семейство $\{U_{\varepsilon, N}\}$ образует базис фильтра и согласно Бурбаки [4] задает в группе G топологию T_φ, согласующуюся с групповой операцией и имеющей $\{U_{\varepsilon, N}\}$ базисом фильтра окрестностей единицы в том и только в том случае, если:

1) каждому множеству $U \in \{U_{\varepsilon, N}\}$ соответствует $V \in \{V_{\varepsilon, N}\}$ так, что $VV^{-1} \subset U$;

2) каждое множество из $\{U_{\varepsilon, N}\}$ содержит единицу;

3) каждым $U \in \{U_{\varepsilon, N}\}$ и $a \in G$ соответствует $V \in \{U_{\varepsilon, N}\}$ так, что $V \subset aUa^{-1}$.

Определение 1. *Непрерывная функция* $\varphi\colon (G, T) \to C$ *называется Л. п-п. функцией на группе* (G, T), *если семейство* $\{U_{\varepsilon, N}\}$ *удовлетворяет условиям* 1, 2, 3, *и топологическая группа* (G, T_φ) *предкомпактна.*

Определение 2. *Л. п-п. на группе* (G, T) *функция* f *называется п-п. функцией на этой группе, если* f *равномерно непрерывна* в топологии* T_f.

Если φ — Л. п-п. функция, то топология T_φ является наименьшей из согласованных с групповым действием топологий, в которых φ непрерывна. В частности, T_φ содержится в T.

Если φ, более того, п-п функция, то топология T_φ может быть охарактеризована также как наименьшая из согласованных с групповым действием топологий, в которых φ равномерно непрерывна.

Для произвольной функции $f\colon G \to C$ топология с этим свойством

---

* В случае некоммутативной топологической группы необходимо различать функции, равномерно непрерывные относительно левой и правой равномерностей на группе. В рассматриваемом случае эти равномерности совпадают, так как группа (G, T_f) по определению предкомпактна (см., например, [4, гл. III, § 3, упр. 14]).

может быть задана базисом фильтра, состоящим из счетного числа множеств

$$U_\varepsilon = \{x \in G : \sup_{p,\, q \in G} | f(pxq) - f(pq) | \leqslant \varepsilon\},$$

где ε пробегает множество всех положительных рациональных чисел.

Легко проверить, что семейство множеств $\{U_\varepsilon\}$ удовлетворяет условиям 1, 2 и 3. Предкомпактность порождаемой этим семейством топологической группы (G, T'_f) является характеристическим свойством п-п. функций.

Определение 2'. *Непрерывная функция $f : (G, T) \to C$ является п-п. функцией на группе (G, T) в том и только в том случае, если топологическая группа (G, T'_f) предкомпактна.*

Для топологических групп, левая и правая равномерности которых совпадают, в частности, для предкомпактных групп, необходимым и достаточным условием псевдометризуемости является наличие счетного базиса фильтра окрестностей единицы (см., например, [5]). Таким образом, для всех п-п. функций топология T_f' или, что то же самое, T_f псевдометризуема.

Целью настоящей заметки является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Л. п-п. на группе (G, T) функция φ принадлежит множеству $\overline{A}(G, T)$ тогда и только тогда, когда топологическая группа (G, T_φ) псевдометризуема. В качестве числителей и знаменателей аппроксимирующих дробей можно выбрать равномерно непрерывные в топологии T_φ функции.*

3. ***Лемма 1.*** *Пусть (G, T_1) — псевдометризуемая предкомпактная топологическая группа. Тогда любая топологическая группа (G, T_2) псевдометризуема, если $T_1 \supset T_2$.*

Доказательство. Если группа (G, T_2) неотделима, то рассмотрим множество H — замыкание единицы в топологии T_2. Множество H является замкнутым нормальным делителем, так что фактор-группа $(G, T_2)/H$, а вместе с ней и фактор-группа $(G, T_1)/H$ отделимы.

Ясно, что группа $(G, T_1)/H$ предкомпактна и метризуема, а группа $(G, T_2)/H$ метризуема тогда и только тогда, когда исходная группа (G, T_2) псевдометризуема. Поэтому при доказательстве леммы можно считать, что рассматриваемые группы отделимы.

Пусть $\overline{(G, T_1)}$ и $\overline{(G, T_2)}$ — пополнения топологических групп (G, T_1) и (G, T_2) соответственно. Существование и единственность пополнений следует из отделимости этих групп и совпадения у каждой из них правой и левой равномерностей (см., например, [4]).

Тождественное отображение $J : (G, T_1) \to (G, T_2)$ по условию непрерывно, а значит, и равномерно непрерывно. Доопределим его по непрерывности на группу $\overline{(G, T_1)}$. Из бикомпактности этой группы и единственности пополнения группы $\overline{(G, T_2)}$ следует, что образ $\overline{(G, T_1)}$ при отображении J совпадает с $\overline{(G, T_2)}$.

Пусть H — прообраз единицы. Множество H является замкнутым нормальным делителем, и может быть определена фактор-группа $\overline{(G, T_1)}/H$. Функция J принимает постоянные значения на каждом классе смежности. Поэтому между фактор-группой и группой $\overline{(G, T_2)}$ возникает взаимно-однозначное отображение J_H, сопоставляющее каждому классу смежности его образ при отображении J.

Из определения фактор-топологии следует, что отображение J_H непрерывно, коль скоро непрерывно отображение J (см., например, [4]). Кроме того, группа $\overline{(G, T_1)}/H$ бикомпактна, а группа $\overline{(G, T_2)}$ отделима. В этом случае отображение J_H является гомеоморфизмом. Так как фактор-группа $\overline{(G, T_1)}/H$ метризуема, то метризуема и группа $\overline{(G, T_2)}$, а значит, и группа (G, T).

Приведенная выше лемма позволяет доказать необходимость теоремы 1.

Пусть $\left\{\begin{matrix} f_k \\ g_k \end{matrix}\right\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность функций из множества $A(G, T)$, аппроксимирующих Л.п-п. функцию φ. Каждая п-п. функция f_k или g_k ($k = 1, 2, \ldots$) задает в группе G предкомпактную, псевдометризуемую топологию T_{f_k} или, соответственнс, T_{g_k}, определенную в п. 2. Рассмотрим наименьшую топологию T_1, содержащую все топологии T_{f_k} и T_{g_k} при $k = 1, 2, \ldots$. Нетрудно проверить, что топология T_1 согласуется с групповым действием, и топологическая группа (G, T_1) предкомпактна и псевдометризуема.

Функция φ как равномерный предел непрерывных в топологии T_1 функций также непрерывна в этой топологии. Отсюда следует, что T_1 содержит топологию $T_2 = T_\varphi$. С помощью леммы 1 заключаем, что группа (G, T_φ) псевдометризуема.

4. Предположим, что выполнены условия теоремы 1. Предкомпактную топологическую группу (G, T_φ) можно рассматривать в этом случае как всюду плотное подпространство бикомпактного псевдометрического пространства (M, ρ), являющегося его пополнением.

Лемма 2. *Пусть $f : (M, \rho) \to C$ — непрерывная функция. Тогда сужение f на G равномерно непрерывно в топологии T_φ и является п-п. функцией на группе (G, T).*

Доказательство. В силу бикомпактности пространства (M, ρ) функция f равномерно непрерывна. Ее сужение на G, которое будем обозначать тем же символом f, равномерно непрерывно в топологии T_φ. Кроме того, функция f непрерывна в топологии T, так как T содержит T_φ. В силу определения 2′ функция f является п-п. на группе (G, T).

Лемма 2 показывает, что теорема 1 в части достаточности является следствием более общего утверждения.

Теорема 2. *Пусть (M, ρ) — псевдометрическое пространство и G — всюду плотное в нем подмножество. Тогда любую функцию φ: $G \to C$, непрерывную на G как на подпространстве, можно* *равномерно аппроксимировать частными от деления непрерывных в пространстве* (M, ρ) *функций.*

5. Доказательству теоремы 2 предпошлем две леммы.

Лемма 3. *Если ограниченная функция* $\psi\colon M \to C$ *непрерывна в каждой точке некоторого открытого множества* E, *то она совпадает на* E *с частным от деления двух непрерывных в пространстве* (M, ρ) *функций, причем делитель не обращается в нуль на множестве* E.

Доказательство. Функция $g(x) = \rho(x, CE)$ $(x \in M)$, где CE означает дополнение к множеству E, непрерывна во всем пространстве M и не обращается в нуль на множестве E. Для доказательства леммы достаточно проверить, что функция $f(x) = \psi(x) g(x)$ $(x \in M)$ также непрерывна во всем пространстве M.

В каждой точке множества E функция f непрерывна как произведение двух непрерывных функций. Остается проверить непрерывность этой функции на дополнении CE, где она обращается в нуль.

По предположению функция ψ ограничена. Поэтому для каждого $x_0 \in CE$

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \lim_{x \to x_0} |\psi(x)\ g(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x \in M} |\psi(x)| \lim_{x \to x_0} g(x) = 0,$$

и функция f непрерывна в точке x_0.

Лемма 4. *Утверждение леммы 3 остается в силе и для неограниченных функций, удовлетворяющих остальным условиям.*

Доказательство. Представим функцию ψ в виде отношения двух ограниченных функций:

$$\psi = \frac{\left[\dfrac{\psi}{(|\psi| + 1)}\right]}{\left[\dfrac{1}{(|\psi| + 1)}\right]}.$$

Числитель и знаменатель этой дроби удовлетворяют условиям леммы 3. Следовательно, функцию ψ можно представить в виде

$$\psi = \frac{\left(\dfrac{f_1}{g_1}\right)}{\left(\dfrac{f_2}{g_2}\right)} = \frac{f_1 g_2}{f_2 g_1},$$

где f_1, f_2 и g_1, g_2 — непрерывные в пространстве (M, ρ) функции. Функция f_2 не обращается в нуль на множестве E, так как не обращается в нуль функция $\dfrac{1}{(|\psi| + 1)}$.

Доказательство теоремы 2. Не ограничивая общности, можно считать функцию φ вещественной и положительной.

Обозначим через $B(x, \delta)$ шар радиуса δ с центром в точке x, а через $\operatorname{osc}_x \varphi$ — колебание функции φ в точке x, определяемое соотношением

$$\operatorname{osc}_x \varphi = \inf_{\delta \to 0} \sup_{x_1,\ x_2 \in G \cap B(x,\ \delta)} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|.$$

Хотя функция φ определена только на множестве G, ее колебание определено в каждой точке пространства M, так как G всюду плотно в M.

Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$ и введем в рассмотрение функцию

$$\delta(x) = \frac{1}{2} \sup \{\delta : \sup_{x_1,\ x_2 \in G \cap B(x,\ \delta)} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon\}.$$

заданную на множестве $E = \{x \in M : \operatorname{osc}_x \varphi < \varepsilon\}$ и непрерывную на этом множестве. Учитывая непрерывность функции δ, нетрудно проверить, что семейство функций

$$h_\zeta(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\rho(x,\ \zeta)}{\delta(x)}; & \rho(x,\ \zeta) < \delta(x) \\ 0 \qquad ; & \rho(x,\ \zeta) \geqslant \delta(x) \end{cases} \quad (x \in E,\ \zeta \in M)$$

равностепенно непрерывно на множестве E.

Наконец, рассмотрим функцию

$$\psi(x) = \sup_{\zeta \in G} \varphi(\zeta)\, h_\zeta(x) \quad (x \in E)$$

и покажем, что она непрерывна в каждой точке $x_0 \in E$:

$$|\psi(x_0) - \psi(x)| = |\sup_{\zeta \in G} \varphi(\zeta)\, h_\zeta(x_0) - \sup_{\zeta \in G} \varphi(\zeta)\, h_\zeta(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\zeta \in G} \varphi(\zeta)\, |h_\zeta(x_0) - h_\zeta(x)|.$$

Так как носитель функции $h_\zeta(x_0) - h_\zeta(x)$ содержится при $\rho(x_0, x) < \delta(x_0)$ в шаре $B(x_0,\ 2\delta(x_0))$, то предполагая выполненным это неравенство, получим

$$|\psi(x_0) - \psi(x)| \leqslant \sup_{\zeta \in G \cap B(x_0,\ \delta(x_0))} \varphi(\zeta) \sup_{\zeta \in G} |h_\zeta(x_0) - h_\zeta(x)|.$$

Левый супремум не превосходит величины $\psi(x_0) + \varepsilon$, что следует из определения функции δ; правый стремится к нулю при $x \to x_0$ в силу равностепенной непрерывности семейства функций $\{h_\zeta(x)\}_{\zeta \in M}$.

Множество E содержит множество G и открыто как множество меньших значений непрерывной сверху функции $\operatorname{osc}_x \varphi$. Из леммы 4 в этом случае следует, что функция ψ совпадает на множестве G с отношением двух непрерывных в пространстве (M, ρ) функций, причем делитель не обращается в нуль на G.

Остается показать, что функция ψ аппроксимирует функцию φ. Так как $\psi(x) \geqslant \varphi(x)$ для всех $x \in G$, то достаточно рассмотреть разность

$$\psi(x) - \varphi(x) = \sup_{\zeta \in G} \varphi(\zeta) h_\zeta(x) - \varphi(x) \leqslant \sup_{\zeta \in G \cap B(x,\ \delta(x))} \varphi(\zeta) - \varphi(x).$$

По определению функции δ последняя разность не превосходит ε.

Теорема 2, а вместе с ней и теорема 1 полностью доказаны.

6. ***Лемма 5.*** *Если φ — Л. п-п. функция, заданная на σ-компактной группе (G, T), то группа (G, T_φ) псевдометризуема.*

Доказательство. В силу метризационной теоремы, приведенной в п. 2, достаточно показать, что топология T_φ обладает счетным базисом фильтра окрестностей единицы.

Пусть $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность бикомпактных в топологии T множеств, исчерпывающих группу G. Рассмотрим следующие подмножества группы G:

$$U_{\varepsilon,\ K_i} = \{x \in G: \sup_{p,\ q \in K_i} |\varphi(pxg) - \varphi(pg)| \leqslant \varepsilon\}$$

для всех рациональных $\varepsilon > 0$ и $i = 1, 2, \ldots$. Каждое множество $U_{\varepsilon,\ K_i}$ является пересечением, вообще говоря, бесконечным, множеств из базиса фильтра $\{U_{\varepsilon,\ N}\}$, определенного в п. 2. Поэтому если все множества $\{U_{\varepsilon,\ K_i}\}$ являются окрестностями единицы в топологии T_φ, то они образуют счетный базис фильтра окрестностей единицы этой топологии.

Предположим, что множество $U_{\varepsilon,\ K_i}$ не является окрестностью единицы, т. е. не содержит открытого подмножества, включающего в себя единицу. Тогда существует направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, сходящаяся к единице и принадлежащая дополнению к $U_{\varepsilon,\ K_i}$. Последнее означает, что для каждого $\alpha \in A$ можно указать p_α и $q_\alpha \in K_i$, удовлетворяющие неравенству

$$|\varphi(p_\alpha x_\alpha q_\alpha) - \varphi(p_\alpha q_\alpha)| > \varepsilon.$$

Заметим, что множество K_i является бикомпактным в топологии T_φ, что следует из включения $T_\varphi \subset T$. Поэтому направленности $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и $\{q_\alpha\}_{\alpha \in A}$ содержат сходящиеся в топологии T_φ поднаправленности. Для сокращения письма будем считать, что сами эти направленности сходятся соответственно к p и $q \in G$.

Из согласованности топологии T_φ с групповым действием следует, что направленности $\{p_\alpha x_\alpha q_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и $\{p_\alpha q_\alpha\}_{\alpha \in A}$ сходятся к pq, и так как φ — непрерывная функция, то

$$\lim_{\alpha \in A} \varphi(p_\alpha x_\alpha q_\alpha) = \lim_{\alpha \in A} \varphi(p_\alpha q_\alpha),$$

что противоречит установленному ранее неравенству. Лемма доказана.

Объединяя лемму 5 с теоремой 1, получим следующее утверждение.

Теорема 3. *Если топологическая группа (G, T) σ-компактна, то множество функций $\overline{A}(G, T)$ совпадает с множеством всех Л. п-п. функций на этой группе.*

Автор благодарен Б. Я. Левину за постановку задачи и обсуждение полученных результатов, а также Г. Я. Любарскому за помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков А. О почти-периодических функциях Левитана. — «Сб. студ. науч. работ Воронежск. ун-та», 1970, № 4, с. 91—94.
2. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. М., ГИТТЛ, 1953. 396 с.
3. Reich A. Die vorkompacten Gruppen und das Fastperiodizität. — «Math. Zs»., 1970, т. 116, с. 218—234.
4. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М., ГИФМЛ, 1958. 325 с.
5. Келли Дж. Л. Общая топология. М., «Наука», 1968. 383 с.

Поступила 19 июня 1974 г.