ПРОДОЛЖЕНИЕ ЭРМИТОВО-ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ В ПОЛОСЕ

Б. Я. Левин, И. Е. Овчаренко

Пусть D — выпуклая центрально-симметрическая область n-мерного пространства E_n, $\frac{D}{2}$ — область, получающаяся из D подобным преобразованием с центром в нуле и коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$.

Функция $F(\boldsymbol{r})$, заданная в D, называется эрмитово-положительной (э. п.) в этой области, если при любых $\boldsymbol{r}_j \in \frac{D}{2}$ и любых комплексных ξ_j выполняется неравенство

$$\sum_{j,\, k=1}^{p} F(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k)\, \xi_j \bar{\xi}_k \geqslant 0 \qquad (p = 1,\ 2,\ \ldots).$$

С. Бохнер [1] показал, что непрерывная э. п. функция, заданная *во всем пространстве E_n, допускает следующее интегральное представление:*

$$F(\boldsymbol{r}) = \int_{E_n} e^{i(\lambda,\, r)}\, d\rho(\lambda), \tag{1}$$

где $d\rho(\lambda)$ — некоторая ограниченная мера на E_n.

В 1939 г. М. Г. Крейн поставил вопрос о возможности продолжения э. п. функции, заданной в D, на все пространство с сохранением эрмитовой положительности и задачу об описании всех таких продолжений, если они существуют. Тогда же М. Г. Крейном было доказано, что любая непрерывная э. п. функция, заданная на отрезке $(-2a;\ 2a)$, может быть продолжена на числовую ось с сохранением эрмитовой положительности и было дано описание всех таких продолжений в случае их неединственности [2].

А. П. Артеменко избавился от требования непрерывности и показал, что произвольную э. п. функцию можно продолжить с конечного отрезка на всю числовую ось [3].

В 1962 г. В. Рудин [4], опираясь на построенный Гильбертом пример положительного многочлена двух переменных, не представимого в виде суммы квадратов многочленов двух переменных, установил существование непрерывных э. п. функций, заданных на прямоугольнике $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$, $(a;\ b < \infty)$ плоскости $(x;\ y)$, которые не могут быть продолжены как э. п. функции. В 1952 г. аналогичный факт для э. п. последовательностей установили А. П. Кальдерон и Р. Пепинский [5].

Иначе обстоит дело, если вместо прямоугольника рассматривать бесконечную полосу. В 1944 г. М. С. Лившиц [6] доказал, что любую непрерывную э. п. функцию $F(x;\ y)$, заданную в полосе $-\infty < x < \infty$, $|y| \leqslant 2a$, можно продолжить на всю плоскость с сохранением эрмитовой положительности. Это предложение было получено как следствие общих операторных построений, однако не было опубликовано*. Позднее оно было установлено Р. С. Исмагиловым [7], Г. И. Эскиным [8] и А. Девинатцем [9].

В конце статьи в небольшом дополнении мы доказываем теорему, аналогичную упоминавшейся выше теореме А. П. Артеменко, а именно, доказываем возможность продолжения с полосы на всю плоскость любой э. п. функции без требования непрерывности или измеримости. После того, как возможность продолжения установлена, естественно, возникает вопрос об описании всех эрмитово-положительных продолжений.

В [10] одним из авторов методами теории операторов эта задача решена в том частном случае, когда $F(x;\ 0)$ — почти периодическая функция.

В настоящей статье дается описание всех эрмитово-положительных продолжений любой непрерывной э. п. функции, заданной в полосе $-\infty < x < \infty$, $|y| \leqslant 2a$. Одновременно получается независимое доказательство возможности продолжения непрерывных э. п. функций, заданных в полосе, на всю плоскость с сохранением эрмитовой положительности. Часть результатов этой статьи была опубликована в [11].

Изложим схему наших построений. Они основаны на понятии каналовых функций заданной э. п. функции $F(x;\ y)$, введенном в [10], и соответствующем интегральном представлении функции $F(x;\ y)$. Доказывается, что непрерывная э. п. функция $F(x;\ y)$, заданная в полосе $-\infty < x < \infty$, $|y| \leqslant 2a$, допускает интегральное представление

$$F(x;\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\psi(\lambda;\ y)\, d\sigma(\lambda), \qquad (2)$$
$$-\infty < x < \infty, \quad |y| \leqslant 2a$$

в котором $\sigma(\lambda)$ — ограниченная монотонная функция, а $\psi(\lambda;\ y)$ — каналовые функции э. п. функции $F(x;\ y)$. Эти функции $\psi(\lambda;\ y)$ при каждом λ сами являются э. п. функциями от y на сегменте $[-2a;\ 2a]$ и при каждом $y \in [-2a;\ 2a]$ σ — измеримы по λ. Таким образом, задача продолжения э. п. функции $F(x;\ y)$ с полосы сводится к задаче о согласованном, в некотором смысле, продолжении каналовых функций. Нами приводится описание всех таких продолжений и тем самым получается описание всех эрмитово-положительных продолжений функции $F(x;\ y)$**. Используя это описание, мы даем необходимое и достаточное условие единственности продолжения э. п. функции.

Заметим, что наши построения с очевидными изменениями переносятся на тот случай, когда э. п. функция задана в гиперслое пространства E_n, т. е. в области, выделяемой неравенствами $-\infty < x_j < \infty$, $j = 1, 2, \ldots n-1$; $-2a \leqslant x_n \leqslant 2a$.

§ 1. Начнем с установления следующей теоремы.

---

* Имеется в докторской диссертации М. С. Лившица [6].

** Представление (2) и описание всех продолжений было дано нами в [11]. Другое доказательство этого представления, основанное на теореме Ю. М. Березанского о дифференцировании операторной меры, было несколько позже получено М. Л. Горбачуком [12], но при этом для более общих положительно-определенных ядер. В совместной статье Ю. М. Березанского и М. Л. Горбачука [13] также дано описание всех продолжений, но в других терминах.

Теорема 1. *Если $F(x;\ y)$ — непрерывная э. п. функция, заданная в полосе $-\infty < x < \infty$, $|y| \leqslant 2a$, то функция*

$$\sigma(\lambda;\ y) = v.\ p.\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda x} - 1}{-ix} F(x;\ y)\, dx. \tag{3}$$

непрерывна по y и эрмитово-монотонная по λ, т. е. функция $\sigma(\lambda'';\ y) - \sigma(\lambda';\ y)$ э. п. при $\lambda'' > \lambda'$, $|y| \leqslant 2a$. Кроме того, $|\sigma(\lambda'';\ y) - \sigma(\lambda';\ y)| \leqslant \sigma(\lambda'') - \sigma(\lambda')$, где $\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda;\ 0)$.

Доказательство теоремы основано на следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть $F(x;\ y)$ — э. п. функция $-\infty < x < \infty$, $|y| \leqslant 2a$, а интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x;\ y)|\, dx \tag{4}$$

сходится равномерно при $|y| \leqslant 2a$. Тогда ее преобразование Фурье

$$\tilde{F}(\lambda;\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} F(x;\ y)\, dx$$

при всех вещественных λ — э. п. функция от y, $|y| \leqslant 2a$.

Доказательство. Для любой финитной функции ограниченной вариации $\tau(y)$ имеем

$$\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x' - x'';\ y' - y'')\, e^{-\varepsilon x'^2 - i\lambda x'} e^{-\varepsilon x''^2 + i\lambda x''}\, d\tau(y')\, d\tau(y'')\, dx'\, dx'' \geqslant 0.$$

Полагая $x' - x'' = t$, $x' + x'' = u$, получим

$$\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(t;\ y' - y'')\, e^{-\frac{\varepsilon}{2}t^2} e^{-i\lambda t} e^{-\frac{\varepsilon}{2}u^2}\, d\tau(y')\, d\overline{\tau(y'')}\, dt\, du \geqslant 0,$$

или иначе

$$\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} F(t;\ y' - y'')\, e^{-\frac{\varepsilon}{2}t^2} e^{-i\lambda t}\, dt\, d\tau(y')\, d\overline{\tau(y'')} \geqslant 0.$$

Так как по предположению интеграл (4) сходится равномерно относительно y, то можно сделать предельный переход при $\varepsilon \downarrow 0$. Окончательно получаем неравенство

$$\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} \tilde{F}(\lambda;\ y' - y'')\, d\tau(y')\, d\overline{\tau(y'')} \geqslant 0,$$

которое и доказывает лемму.

Перейдем к доказательству теоремы. При любом фиксированном y из $[-2a,\ 2a]$ матрица-функция $\|F_{ij}(x)\|_{i,j=1}^{2}$, где $F_{11}(x) = F_{22}(x) = F(x;\ 0)$, $F_{12}(x) = F(x;\ y)$, $F_{21}(x) = F(x;\ -y)$ будет эрмитово-положительной. Поэтому она (см., например, [14]) допускает представление через интеграл Фурье—Стильтьеса

$$F_{ij}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\, d\sigma_{ij}(\lambda), \qquad -\infty < x < \infty$$

причем матрица-функция $\| \sigma_{ij}(\lambda) \|$ ограниченной вариации и при любых комплексных ξ_1, ξ_2 форма $\sum_{j,k=1}^{2} \sigma_{jk}(\lambda)\xi_j\bar{\xi}_k$ неубывающая функция от λ. При этом

$$\sigma_{11}(\lambda) = \sigma_{22}(\lambda) = \sigma(\lambda;\ 0),\ \sigma_{12}(\lambda) = \sigma(\lambda;\ y),\ \sigma_{21}(\lambda) = \sigma(\lambda;\ -y).$$

Существование интеграла в правой части (3) и неравенство

$$|\sigma(\lambda'';\ y) - \sigma(\lambda';\ y)| \leqslant \sigma(\lambda'') - \sigma(\lambda'),\ \lambda'' > \lambda',\ \sigma(\lambda) = \sigma(\lambda;\ 0) \tag{5}$$

прямо следуют из указанных выше свойств матрицы-функции $\|\sigma(\lambda;\ y)\|$. Возьмем э. п. функцию $F(x;\ y)\exp(-i\tau x)$, интегрируя ее по параметру τ в пределах от t до $t+h$, $h>0$, получим э. п. функцию

$$e^{-itx}\frac{e^{-i\tau x}-1}{-ix}F(x;\ y),$$

а проводя еще раз эту операцию — э. п. функцию

$$\frac{e^{-ikx}-1}{-ikx}\frac{e^{-ihx}-1}{-ix}F(x;\ y).$$

Согласно лемме 1 функция

$$\sigma^k(\lambda+h;\ y) - \sigma^k(\lambda;\ y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\frac{e^{-ikx}-1}{-ikx}\frac{e^{-ihx}-1}{-ix}F(x;\ y)\,dx$$

э. п. и непрерывна по y. Оценим разность

$$\theta(k;\ y) = [\sigma^k(\lambda+h;\ y) - \sigma^k(\lambda;\ y)] - [\sigma(\lambda+h;\ y) - \sigma(\lambda;\ y)].$$

При этом воспользуемся тем, что значение э. п. функции в нуле не меньше, чем ее модуль при любом значении аргумента y. Пусть вначале λ и $\lambda+h$ — точки непрерывности $\sigma(\lambda)$. В этом случае имеем

$$|\theta(k;\ y)| = \left|\frac{1}{k}\int_0^k \{[\sigma(\lambda+h+t;\ y) - \sigma(\lambda+h;\ y)] - [\sigma(\lambda+t;\ y) - \right.$$

$$\left. - \sigma(\lambda;\ y)]\}\,dt \right| \leqslant \frac{1}{k}\int_0^k \{|\sigma(\lambda+h+t;\ 0) - \sigma(\lambda+h;\ 0)| +$$

$$+ |\sigma(\lambda+t;\ 0) - \sigma(\lambda;\ 0)|\}\,dt \to 0$$

при $k\to 0$. Поэтому функция $\sigma(\lambda+h,\ y) - \sigma(\lambda;\ y)$ — равномерный предел непрерывных э. п. функций, а значит сама э. п. и непрерывна. Если же в точке λ_0 и λ_0+h разрыв функции $\sigma(\lambda)$, то, выбирая λ_n точками непрерывности для функции $\sigma(\lambda)$ и $\sigma(\lambda+h)$ так, что $\lambda_n \uparrow \lambda_0$, получим с помощью оценки (5) непрерывность функции $\sigma(\lambda_0+h-0;\ y) - \sigma(\lambda_0 - 0;\ y)$.

Также доказывается непрерывность и э. п. функции $\sigma(\lambda_0+h+0;\ y) - \sigma(\lambda_0+0;\ y)$, *а значит и непрерывность э. п. функции* $\sigma(\lambda;\ y)$. Теорема доказана.

Прежде чем переходить к дальнейшему, заметим, что из абсолютной непрерывности функции $\sigma(\lambda;\ y)$ по мере $\sigma(\lambda)$ следует существование σ — почти всюду (σ п. в.) функций $\psi(\lambda;\ y) = \frac{\partial\sigma(\lambda;\ y)}{\partial\sigma(\lambda)}$. Функции $\psi(\lambda;\ y)$ и есть каналовые функции, фигурирующие в представлении (2). Однако исключительное множество σ-меры нуль, где $\frac{\partial\sigma(\lambda;\ y)}{\partial\sigma(\lambda)}$ не определена, вообще говоря, зависит от y, а для дальнейшего важно, чтобы каналовые функции $\psi(\lambda;\ y)$ были определены всюду при $-\infty<\lambda<\infty$, $|y|\leqslant 2a$. Мы пользуемся при построении каналовых функций построениями близкими к развиваемым М. Г. Крейном в статье [15].

Рассмотрим линейное множество K_{2a} функций, представимых следующим образом:

$$x(t)=c+\int\limits_{-2a}^{2a} e^{ity}\varphi(y)\,dy;\quad \varphi(y)\in L(-2a,\ 2a).$$

С помощью функции $\sigma(\lambda;\ y)$ определим на K_{2a} линейный функционал, положив

$$F_\lambda[x(t)]=c\sigma(\lambda;\ 0)+\int\limits_{-2a}^{2a}\sigma(\lambda;\ y)\,\varphi(y)\,dy. \tag{6}$$

Убедимся, что $F_{\lambda''}-F_{\lambda'}$ неотрицателен на K_{2a}, если $\lambda''>\lambda'$. В самом деле, пусть $x(t)$ — произвольная неотрицательная на вещественной оси функция из K_{2a}. Тогда функция $x_1(t)=\gamma+x(t)$ удовлетворяет на вещественной оси неравенству $\inf x_1(t)\geqslant\gamma>0$. Как показано в [16], функция $x_1(t)$ может быть представлена следующим образом:

$$x_1(t)=\left|\sqrt{\gamma_1}+\int\limits_{-a}^{a} e^{ity}\psi(y)\,dy\right|^2,\quad \gamma_1>0,\ \ \psi(y)\in L(-a;\ a).$$

Записав $x_1(t)$ в виде двойного интеграла

$$x_1(t)=\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-a}^{a} e^{it(y-z)}\,[\sqrt{\gamma_1}\,\delta(y)+\psi(y)]\,[\sqrt{\gamma_1}\,\delta(z)+\overline{\psi}(z)]\,dy\,dz,$$

получим

$$[F_{\lambda''}-F_{\lambda'}][x_1(t)]=\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-a}^{a}[\sigma(\lambda'';\ y-z)-\sigma(\lambda';\ y-z)]\,d\tau(y)\,d\overline{\tau(z)}\geqslant 0,$$

$\tau(y)$ — функция ограниченной вариации, являющаяся первообразной для функции $\sqrt{\gamma_1}\,\delta(y)+\psi(y)$. В силу произвольности $\gamma>0$ имеем $[F_{\lambda''}-F_{\lambda'}][x(t)]\geqslant 0$, т. е. $\{F_\lambda\}$ — монотонное семейство функционалов.

Обозначим через C^∞ банаховское пространство всех непрерывных функций $x(t)$, имеющих конечный предел при $|t|\to\infty$. Так как K_{2a} содержит единицу, вместе с каждой функцией $x(t)$ содержит $\overline{x(t)}$ и $F_\lambda[1]=\sigma(\lambda;\ 0)$, то функционалы $F_\lambda[x(t)]$ ограничены по норме $C^{\infty *}$ (см. [15 стр. 132]. Обозначим B^*_{2a} подпространство C^∞, состоящее из функций, которые допускают продолжение в комплексную плоскость как целые функции конечной степени не превосходящей $2a$. Функция

$$\frac{\sin^2\varepsilon t}{\varepsilon^2 t^2}f[(1-2\varepsilon)t]\in K_{2a},\quad 0<\varepsilon<\frac{1}{2}$$

и при $\varepsilon\to 0$ равномерно на всей оси приближает функцию $f(t)$. Таким образом B^∞_{2a} совпадает с замыканием в равномерной метрике множества K_{2a}. При этом способе приближения неотрицательные функции из B^∞_{2a} приближаются неотрицательными функциями из K_{2a}.

Семейство функционалов $\{F_\lambda\}$ после продолжения по непрерывности останется монотонным. Для семейства продолженных функционалов мы оставим то же обозначение $\{F_\lambda\}$.

Пусть $\{h_n\}$ — некоторая последовательность положительных чисел, монотонно стремящаяся к нулю. Рассмотрим разностное отношение

$$\begin{cases} \psi_{\lambda h_n}[x] = \dfrac{F_{\lambda+h_n}[x] - F_\lambda[x]}{\sigma(\lambda+h_n)-\sigma(\lambda)} & \sigma(\lambda+h_n)-\sigma(\lambda) \neq 0 \\ \psi_{\lambda h_n}[x] = 0 & \sigma(\lambda+h_n)-\sigma(\lambda) = 0. \end{cases}$$

Так как $\psi_{\lambda h_n}[x]$ — положительный функционал, а пространство B_{2a} содержит функцию тождественно равную единице, то норма $\psi_{\lambda h_n}[x]$ достигается на функции $x(t)\equiv 1$. Из того, что $\psi_{\lambda h_n}[1]$ либо единица, либо ноль, следует, что $\|\psi_{\lambda h_n}\| \leqslant 1$. Пространство B_{2a} сепарабельно, поэтому в сопряженном пространстве B_{2a}^* единичный шар слабо компактен [18]. Из последовательности $\psi_{\lambda h_n}[x]$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность функционалов $\psi_{\lambda h_n'}[x]$. Последовательность h_n' своя для каждого λ. Определим семейство функционалов $\psi_\lambda[y]$ равенством $\psi_\lambda = \lim \psi_{\lambda h_n'}$. Ясно, что каждый функционал ψ_λ положителен и, кроме того, $\|\psi_\lambda\| \leqslant 1$. В силу известной теоремы М. Г. Крейна [19] функционалы ψ_λ могут быть продолжены с сохранением положительности и нормы на пространство C^∞. Согласно теореме Ф. Рисса продолженные функционалы $\tilde{\psi}_\lambda[x]$ представляются следующим образом:

$$\tilde{\psi}_\lambda[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, d\rho_\lambda(t) + \mu_\lambda x(\infty), \tag{7}$$

где $\rho_\lambda(t)$ — неубывающие функции ограниченной вариации, а $\mu_\lambda \geqslant 0$.

Положим в (7) $x(t)\equiv 1$. Тогда

$$\tilde{\psi}_\lambda[1] = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_\lambda(t) + \mu_\lambda.$$

Функция $x(t)\equiv 1$ входит в K_{2a}, поэтому

$$\tilde{\psi}_\lambda[1] = \psi_\lambda[1] = \lim_{h_n \downarrow 0} \frac{F_{\lambda+h_n}[1] - F_\lambda[1]}{\sigma(\lambda+h_n)-\sigma(\lambda)} = 1$$

почти всюду относительно меры $\sigma(\lambda)$. С другой стороны,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\rho_\lambda(t) = \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{h}\int_0^h e^{ist}\, ds\right) d\rho_\lambda(t) = \lim_{h\to 0} \psi_\lambda\left[\frac{1}{h}\int_0^h e^{ist}\, ds\right] = 1.$$

При этом мы пользуемся определением (6) функционала $F_\lambda[x]$. Таким образом, σ п. в. μ_λ в (7) равно нулю и представление (7) принимает вид

$$\tilde{\psi}_\lambda[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, d\rho_\lambda(t).$$

С помощью неубывающих функций $\rho_\lambda(t)$ построим функции $\psi(\lambda;\, y)$, полагая

$$\psi(\lambda;\, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}\, d\rho_\lambda(t).$$

Покажем, что при $|y| \leqslant 2a$ построенные функции не зависят от выбора продолжений положительных функционалов или, что то же, от выбора мер $\rho_\lambda(t)$. Действительно,

$$\psi(\lambda;\ y) = \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{h} \int_{y}^{y+h} e^{its}\, ds \right) d\rho_\lambda(t)$$

и остается заметить, что подынтегральная функция принадлежит множеству K_{2a}. Из дальнейшего будет следовать, что функции $\psi(\lambda;\ y)$ однозначно определяются э. п. функцией $F(x;\ y)$.

Функции $\psi(\lambda;\ y)$ будем называть *каналовыми функциями* э. п. функции $F(x;\ y)$. Так как $\rho_\lambda(t)$ — неубывающая функция ограниченной вариации, то каналовые функции $\psi(\lambda;\ y)$ при каждом фиксированном λ — непрерывные э. п. функции переменной y.

Покажем, как находятся каналовые функции $\psi(\lambda;\ y)$ по э. п. функции $F(x;\ y)$ и обратно, как выражается э. п. функция $F(x;\ y)$ через свои каналовые функции.

Обозначим при $k > 0$

$$\sigma_k(\lambda;\ y) = \frac{1}{k} \int_0^k \sigma(\lambda;\ y+t)\, dt.$$

Неравенство $|\sigma_k(\lambda+h;\ y) - \sigma_k(\lambda;\ y)| \leqslant \sigma(\lambda+h;\ 0) - \sigma(\lambda;\ 0)$, $h > 0$ показывает, что функция $\sigma_k(\lambda;\ y)$ абсолютно непрерывна относительно меры $\sigma(\lambda)$. Поэтому σ. п. в. существует

$$\varphi_k(\lambda;\ y) = \frac{d\sigma_k(\lambda;\ y)}{d\sigma(\lambda)},$$

$$\sigma_k(\lambda;\ y) = \int_0^\lambda \varphi_k(\lambda;\ y)\, d\sigma(\lambda) + \sigma_k(0;\ y).$$

Обозначим

$$\psi_k(\lambda;\ y) = \frac{1}{k} \int_0^k \psi(\lambda;\ y+t)\, dt.$$

Так как

$$\psi(\lambda;\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}\, d\rho_\lambda(t),$$

то

$$\psi_k(\lambda;\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} \frac{e^{-ikt}-1}{ikt}\, d\rho_\lambda(t) = \psi_\lambda\left[e^{ity} \frac{e^{ikt}-1}{ikt} \right].$$

Функция

$$e^{ity} \frac{e^{ikt}-1}{ikt} = \frac{1}{k} \int_y^{y+k} e^{itu}\, du \in K_{2a}.$$

Поэтому, полагая $x(t) = e^{ity} \dfrac{e^{ikt}-1}{ikt}$, находим, что при фиксированном y

$$\psi_k(\lambda;\ y) = \lim_{h'_n \downarrow 0} \frac{F_{\lambda+h'_n}[x] - F_\lambda[x]}{\sigma(\lambda+h'_n) - \sigma(\lambda)} = \lim_{h'_n \downarrow 0} \frac{\sigma_k(\lambda+h'_n;\ y) - \sigma_k(\lambda;\ y)}{\sigma(\lambda+h'_n) - \sigma(\lambda)} = \frac{d\sigma_k(\lambda;\ y)}{d\sigma(\lambda)} =$$
$$= \varphi_k(\lambda;\ y)$$

для почти всех значений λ относительно меры σ. Отсюда вытекает равенство

$$\sigma_k(\lambda;\ y) - \sigma_k(0;\ y) = \int_0^\lambda \psi_k(t;\ y)\, d\sigma(t). \tag{8}$$

Так как функции $\sigma_k(\lambda;\ y) - \sigma_k(0;\ y)$ и $\psi_k(\lambda;\ y)$ непрерывны по y, $|y| \leqslant 2a$, то при $k \to 0$ будем иметь, что $\sigma_k(\lambda;\ y) - \sigma_k(0;\ y)$ стремится к $\sigma(\lambda;\ y) - \sigma(0;\ y)$ и $\psi_k(\lambda;\ y)$ стремится к $\psi(\lambda;\ y)$. Кроме того, $|\psi_k(\lambda;\ y)| \leqslant 1$. Переходя в (8) к пределу под знаком интеграла, получаем

$$\sigma(\lambda;\ y) - \sigma(0;\ y) = \int_0^\lambda \psi(t;\ y)\, d\sigma(t). \tag{9}$$

Последнее равенство показывает, что при каждом фиксированном y, $|y| \leqslant 2a$ σ — почти всюду $\psi(\lambda;\ y) = \frac{\partial\sigma(\lambda;\ y)}{\partial\sigma(\lambda)}$, т. е. каналовые функции $\psi(\lambda;\ y)$ в существенном однозначно определяются э. п. функцией $F(x;\ y)$.

Так как $\psi(\lambda;\ y)$ — непрерывная функция переменной y, то последнее равенство может быть использовано для вычисления каналовых функций. Подставляя (9) в (3) и обращая затем равенство (3), получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $F(x;\ y)$ — непрерывная эрмитово-положительная функция, определенная в полосе $-\infty < x < \infty$, $|y| \leqslant 2a$, а $\sigma(\lambda)$ — мера, задающая представление функции $F(x;\ 0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\, d\sigma(\lambda)$. Пусть $\psi(\lambda;\ y)$ — каналовые функции э. п. функции $F(x;\ y)$.*

Тогда функция $F(x;\ y)$ имеет следующее представление

$$F(x;\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \psi(\lambda;\ y)\, d\sigma(\lambda) \tag{10}$$

$$-\infty < x < \infty, \quad |y| \leqslant 2a.$$

Обратно, если $\sigma(\lambda)$ — ограниченная, неубывающая на всей вещественной оси функция, а $\psi(\lambda;\ y)$ — эрмитово-положительная непрерывная по y, $|y| \leqslant 2a$ при любом фиксированном λ, σ — измеримая при каждом y, $|y| \leqslant 2a$ и σ. п. в. $\psi(\lambda;\ 0) = 1$, то $F(x;\ y)$ в представлении (10) *есть непрерывная эрмитово-положительная функция в полосе $-\infty < x < \infty$, $|y| \leqslant 2a$, а $\psi(\lambda;\ y)$ — ее каналовые функции.*

§ 2. Из представления (10) видно, что продолжение непрерывной э. п. функции $F(x;\ y)$ с полосы $-\infty < x < \infty$, $|y| \leqslant 2a$ на более широкую полосу (в том числе и на всю плоскость) с сохранением эрмитовой положительности эквивалентно одновременному продолжению каналовых функций $\psi(\lambda;\ y)$ так, чтобы продолженные э. п. функции $\tilde{\psi}(\lambda;\ y)$ образовывали при каждом фиксированном y измеримую относительно меры $\sigma(\lambda)$ функцию переменной λ.

Такие продолжения каналовых функций мы будем называть *допустимыми*.

Опишем все допустимые продолжения. Не нарушая общности, можно считать, что, за исключением, быть может, множества σ-меры нуль, все каналовые функции продолжаются неоднозначно. Действительно, так как функция $e^{-\varepsilon|y|}$ продолжается неоднозначно с любого интервала (см., например, [20, стр. 262]), то можно образовать функцию $e^{-\varepsilon|y|}F(x;\ y)$ и перейти к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$.

При построении допустимых продолжений каналовых функций мы используем принадлежащий М. Г. Крейну [2], [14] алгоритм получения всех э. п. продолжений функций заданных на конечном интервале. Согласно [2], [14] по э. п. функции $f(x)$, неоднозначно продолжаемой с интервала $(-2a;\ 2a)$, специальным образом строятся четыре целые функции $P_1(z)$, $P_0(z)$, $Q_1(z)$, $Q_0(z)$ конечной степени, не превосходящей a^*. Множество ограниченных неубывающих функций $\rho(t)$, задающих представление (а тем самым и продолжение) $f(x)$ в виде

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\rho(t), \quad -\infty < x < \infty$$

находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством R-функций $\tau(z)$ **. Это соответствие задается равенством

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(t)}{t-z} = \frac{P_1(z)\,\tau(z) + P_0(z)}{Q_1(z)\,\tau(z) + Q_0(z)}.$$

В нашем случае построенные четыре функции будут зависеть от λ, и каждая из функций $P_1(z;\ \lambda)$, $P_0(z;\ \lambda)$, $Q_1(z;\ \lambda)$, $Q_0(z;\ \lambda)$ — σ-измеримая функция, так как операции, с помощью которых эти функции получаются, не нарушают σ-измеримость.

Построим теперь функцию

$$R(z;\ \lambda) = \frac{P_1(z;\ \lambda)\,\tau(z;\ \lambda) + P_0(z;\ \lambda)}{Q_1(z;\ \lambda)\,\tau(z;\ \lambda) + Q_0(z;\ \lambda)},$$

где $\tau(z;\ \lambda)$ — R-функция по переменной z, измеримая относительно меры $\sigma(\lambda)$. Эта функция $R(z;\ \lambda)$ будет R-функцией по переменной z, измеримой относительно меры $\sigma(\lambda)$. Она может быть представлена интегралом Стильтьеса

$$\frac{P_1(z;\ \lambda)\,\tau(z;\ \lambda) + P_0(z;\ \lambda)}{Q_1(z;\ \lambda)\,\tau(z;\ \lambda) + Q_0(z;\ \lambda)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(t;\ \lambda)}{t-z}.$$

Из формулы обращения вытекает, что $\rho(t;\ \lambda)$ — неубывающая функция ограниченной вариации по переменной t, измеримая относительно меры $\sigma(\lambda)$. Отсюда следует, что функции

$$\tilde{\psi}(\lambda;\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}\, d\rho(t;\ \lambda)$$

допустимые продолжения каналовых функций.

* Эти построения М. Г. Крейна, относящиеся к э. п. функциям, являются весьма частным случаем принадлежащей ему теории целых операторов (см., например, [14]). Развернутое изложение конструкции функций $P_1(z)$, $P_0(z)$, $Q_1(z)$, $Q_0(z)$ по данной э. п. функции изложено в монографии Ю. М. Березанского [21].

** Т. е. функций голоморфных в верхней полуплоскости и отображающих ее в себя.

Непосредственно проверяется, что равенством

$$\tilde{F}(x;\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \tilde{\psi}(\lambda;\ y)\, d\sigma(\lambda)$$

$$-\infty < x, \quad y < \infty$$

определяется эрмитово-положительное продолжение функции $F(x;\ y)$.

Обращая рассуждения, убеждаемся в том, что приведенным выше способом могут быть получены *все* эрмитово-положительные продолжения функции $F(x,\ y)$.

Замечание. Из последнего рассуждения и теоремы 2 следует, что всякая непрерывная э. п. функция $F(x;\ y)$, заданная в полосе $-\infty < x < \infty$, $|y| \leqslant 2a$, может быть продолжена на всю плоскость как э. п. функция двух переменных. Тем самым получено независимое доказательство этого факта.

§ 3. Рассмотрим вопрос о единственности продолжения э. п. функций, заданных в полосе.

Будем называть два допустимых продолжения каналовых функций $\psi_1(\lambda;\ y)$ и $\psi_2(\lambda;\ y)$ существенно различными, если хотя бы при одном значении y_0 функции $\psi_1(\lambda;\ y_0)$ и $\psi_2(\lambda;\ y_0)$ различны на множестве положительной σ-меры.

Очевидно, для того, чтобы э. п. функция $F(x;\ y)$ имела более одного э. п. продолжения, необходимо и достаточно, чтобы ее каналовые функции допускали существенно различные допустимые продолжения.

Проверка выполнения этого условия может оказаться затруднительной.

Теорема 3. *Пусть $F(x;\ y)$ — непрерывная эрмитово-положительная функция, заданная в полосе $-\infty < x < \infty$, $|y| \leqslant 2a$, а $\sigma(\lambda)$ — мера, задающая представление функции $F(x;\ 0)$ в виде*

$$F(x;\ 0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\, d\sigma(\lambda),$$

а $\psi(\lambda;\ y)$, $|y| \leqslant 2a$ — каналовые функции заданной функции $F(x;\ y)$.

Тогда, для того, чтобы $F(x;\ y)$ продолжалась как э. п. функция двух переменных неединственным образом, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое множество E положительной σ-меры, что при $\lambda \in E$ функции $\psi(\lambda;\ y)$ продолжаются неоднозначно как э. п. функции одного переменного.

Необходимость условий теоремы очевидна. Для доказательства достаточности представим $F(x;\ y)$ как сумму двух э. п. функций следующим образом:

$$F(x;\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \psi(\lambda;\ y)\, d\sigma_E(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \psi(\lambda;\ y)\, d\sigma_{cE}(\lambda),$$

где $\sigma_E(\lambda) = \chi(E)\,\sigma(\lambda)$, $\chi(E)$ — характеристическая функция множества E $\sigma_{cE}(\lambda) = \sigma(\lambda) - \sigma_E(\lambda)$. Достаточно убедиться, что функция

$$F_E(x;\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \psi(\lambda;\ y)\, d\sigma_E(\lambda)$$

продолжается неоднозначно. Допустимые продолжения каналовых функций $\psi_E(\lambda;\ y)$ могут быть получены по формуле

$$\tilde{\psi}_E(\lambda;\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}\, d\rho_E(t;\ \lambda). \tag{11}$$

Функция $\rho_E(t;\ \lambda)$, в свою очередь, определяется из равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_E(t;\ \lambda)}{t-z} = \frac{P_1^E(z;\ \lambda)\,\tau(z;\ \lambda) + P_0^E(z;\ \lambda)}{Q_1^E(z;\ \lambda)\,\tau(z;\ \lambda) + Q_0^E(z;\ \lambda)}, \tag{12}$$

в котором $\tau(z;\ \lambda)$ — любая σ-измеримая R-функция переменной z.

Если бы функция $F_E(x;\ y)$ продолжалась единственным образом, то допустимые продолжения каналовых функций в существенном совпадали бы. Из единственности преобразования Фурье — Стильтьеса и равенства (11) следовало бы, что с точностью до множества σ-меры нуль функции $\rho_E(t;\ \lambda)$ определяются. Последнее противоречит тому, что $\tau(z;\ \lambda)$ в равенстве (12) может быть любой σ-измеримой R-функцией переменной z.

Установим достаточный признак единственности продолжения, являющийся некоторым обобщением признака М. С. Лившица.

Теорема 4. *Пусть $F(x;\ y)$ — непрерывная э. п. функция, заданная в полосе $-\infty < x < \infty$, $|y| \leqslant 2a$; $\mu(x)$ — функция ограниченной вариации на всей оси, такая, что функция*

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\, d\mu(x)$$

положительна почти всюду относительно функции $\sigma(\lambda)$, задающей представление

$$F(x;\ 0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\, d\sigma(\lambda).$$

Тогда функция

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t;\ y)\, d\mu(t)$$

является э. п. функцией, и если $F(y)$ продолжается однозначно с отрезка $[-2a;\ 2a]$, то $F(x;\ y)$ продолжается однозначно как эрмитово-положительная функция двух переменных.

Теорема 4 непосредственно вытекает из следующих двух лемм.

Лемма 2. *Пусть $F(x;\ y)$ — непрерывная э. п. функция, заданная в полосе $-\infty < x < \infty$, $|y| \leqslant 2a$, $\mu(x)$ — функция ограниченной вариации на всей оси, а $f(\lambda)$ — функция, связанная с функцией $\mu(x)$ формулой*

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\, d\mu(x).$$

При $|y| \leqslant 2a$ справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t;\ y)\, d\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, \psi(\lambda;\ y)\, d\sigma(\lambda).$$

Доказательство. Воспользуемся представлением функции $F(x;\ y)$ через ее каналовые функции. Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t;\ y)\,d\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\psi(\lambda;\ y)\,d\sigma(\lambda)\,d\mu(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda;\ y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,d\mu(t)\,d\sigma(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda;\ y)\,f(\lambda)\,d\sigma(\lambda).$$

Замечание. Так как в правой части последнего равенства интегрирование ведется по мере $\sigma(\lambda)$, то если функции $\mu_1(x)$ и $\mu_2(x)$ таковы, что функции $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ совпадают почти всюду относительно меры $\sigma(\lambda)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t;\ y)\,d\mu_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t;\ y)\,d\mu_2(t).$$

Лемма 3. *Пусть $\sigma(\lambda)$ — ограниченная неубывающая на всей вещественной оси функция, а $\psi(\lambda;\ y)$ — эрмитово-положительная непрерывная по y, $|y| \leqslant 2a$ при любом λ; σ-измеримая при каждом $y \in [-2a;\ 2a]$ и σ п. в. $\psi(\lambda;\ 0) = 1$. Пусть далее $f(\lambda)$ функция σ-измеримая, σ п. в. положительная и*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,d\sigma(\lambda) < \infty.$$

Тогда

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,\psi(\lambda;\ y)\,d\sigma(\lambda) \qquad |y| \leqslant 2a$$

непрерывная э. п. функция. Если $F(y)$ продолжается с отрезка $[-2a;\ 2a]$ единственным образом, то, за исключением, быть может, множества σ-меры нуль, функции $\psi(\lambda;\ y)$ продолжаются однозначно.

Доказательство. Непрерывность и эрмитова положительность функции $F(y)$ прямо следует из условий леммы. Докажем вторую часть. Предположим, что функции $\psi(\lambda;\ y)$ с некоторого множества E, $\mathrm{mes}_\sigma E > 0$ продолжаются неоднозначно. Представим функцию $F(y)$ в виде суммы двух э. п. функций:

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,\psi(\lambda;\ y)\,d\sigma_E(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,\psi(\lambda;\ y)\,d\sigma_{cE}(\lambda),$$

где $\sigma_E(\lambda) = \chi(E)\,\sigma(\lambda)$, $\chi(E)$ — характеристическая функция множества E, $\sigma_{cE}(\lambda) = \sigma(\lambda) - \sigma_E(\lambda)$.

Функция

$$F_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,\psi(\lambda;\ y)\,d\sigma_E(\lambda)$$

продолжается неоднозначно с отрезка $(-2a;\ 2a)$. Тогда функция $F(y)$ продолжается неоднозначно. Полученное противоречие доказывает лемму.

В том случае, когда $d\mu(x) = \delta(x)\,dx$, $f(\lambda) \equiv 1$, теорема 4 переходит в признак М. С. Лившица.

Рассмотрим один специальный класс э. п. функций.

Пусть $F(x;\ y)$ — функция класса D [10], т. е. $F(x;\ 0)=\sum\rho_k e^{i\lambda_k x}$. В этом случае только счетное множество каналовых функций $\psi(\lambda_k;\ y)$ будет отлично от нуля. Поэтому продолжение функции класса D сводится к независимому продолжению каждой из каналовых функций как э. п. функций одного переменного.

Особенно наглядно выглядит критерий единственности продолжения. Именно для того, чтобы функция $F(x;\ y)$ продолжалась как э. п. функция двух переменных единственным образом, необходимо и достаточно, чтобы все ее каналовые функции продолжались однозначно как э. п. функции одного переменного.

Отметим, что необходимым и достаточным условием существования у $F(x;\ y)$ почти периодического продолжения является существование таковых у каждой из каналовых функций. Последнее всегда имеет место, если каналовые функции продолжаются неоднозначно. Приведем удобный достаточный признак единственности продолжения функции класса D.

Теорема 4а. *Пусть $F(x;\ y)$ — э. п. функция класса D, заданная в полосе $-\infty<x<\infty$, $|y|\leqslant 2a$, а*

$$f(x)=\sum\alpha_j e^{i\mu_j x},\quad \sum|\alpha_j|<\infty$$

почти периодическая функция, строго положительная на множестве показателей Фурье функции $F(x;\ 0)$. Тогда функция $\sum\alpha_j F(\mu_j;\ y)$, $|y|\leqslant\leqslant 2a$ — эрмитово-положительна и если она продолжается однозначно как э. п. функция одного переменного, то функция $F(x;\ y)$ однозначно продолжается как э. п. функция двух переменных.

§ 4. Рассмотрим приложение общих построений в некоторых конкретных случаях.

Укажем прием построения э. п. функций $\tilde F(x;\ y)$, заданных в прямоугольнике $|x|\leqslant 2a$, $|y|\leqslant 2b$, которые однозначно продолжаются, в то время как функция $\tilde F(0;\ y)$ продолжается неоднозначно.

Пусть $F x)$ — непрерывная э. п. функция, заданная на всей оси, которая однозначно продолжается с отрезка $[-2a,\ 2a]$ и неоднозначно с любого меньшего отрезка. Можно взять, например, такую функцию

$$\begin{cases} f(x)=-\dfrac{b}{a}x+b, & 0\leqslant x\leqslant 2a\\ f(x)=\dfrac{b}{a}x+b, & -2a\leqslant x\leqslant 0.\end{cases}$$

Определим в прямоугольнике $|x|\leqslant 2a$, $|y|\leqslant 2b$, $b<a$ э. п. функцию $\tilde F(x;\ y)$, полагая $\tilde F(x;\ y)=F(x-y)$. Так как функция $\tilde F(x;\ 0)$ однозначно продолжается с отрезка $[-2a;\ 2a]$, то $\tilde F(x;\ y)$ однозначно продолжается на полосу $-\infty<x<\infty$, $|y|\leqslant 2a$*. Продолженную функцию будем обозначать $F'(x;\ y)$. Пусть

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x}\,d\sigma(\lambda).$$

Тогда

$$\tilde F'(x;\ y)=F(x-y)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x}e^{-i\lambda y}\,d\sigma(\lambda).$$

* Этот простой факт имеется, по существу, в работе М. С. Лившица [6]. Очень просто он вытекает из результатов работы [22].

Отсюда каналовые функции $\psi(\lambda; y)$ э. п. функции $\tilde{F}'(x; y)$ равны $e^{-i\lambda y}$. Функция $\psi(\lambda; y)=e^{-i\lambda y}$ — аналитическая функция переменной y и, следовательно, при каждом λ продолжается однозначно. Поэтому $\tilde{F}'(x; y)$ однозначно продолжается с полосы на плоскость. Следовательно, функция $\tilde{F}(x; y)$ однозначно продолжается с прямоугольника как э. п. функция двух переменных. В то же время $\tilde{F}(0; y)$ неоднозначно продолжается с отрезка $[-2b; 2b]$.

Рассмотрим случай, когда $F(x; y)$ произведение э. п. функций. Пусть

$$f(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\,d\sigma(\lambda),$$

$\sigma(\lambda)$ — неубывающая функция ограниченной вариации, $\psi(y)$ — непрерывная э. п. функция на сегменте $[-2a; 2a]$. Тогда $F(x; y)=f(x)\psi(y)$ — непрерывная э. п. функция, определенная в полосе $-\infty<x<\infty$, $|y|\leqslant 2a$. Почти всюду относительно меры $\sigma(\lambda)$ справедливо равенство $\psi(\lambda; y)=\frac{\psi(y)}{\psi(0)}$. Если при почти всех относительно меры $\sigma(\lambda)$ значениях λ мы будем каналовые функции $\psi(\lambda; y)$ продолжать одинаково, то получим продолжения э. п. функции $F(x; y)$, равные произведению функции $f(x)$ на продолжение функции $\psi(y)$. При другом выборе допустимых продолжений каналовых функций получаются продолжения э. п. функции $F(x; y)$, отличные от произведения функции $f(x)$ на продолжение функции $\psi(y)$.

Рассмотрим теперь функцию $F(x; y)=f(x)+\psi(y)$, $f(x)$, $\psi(y)$ такие же, как и выше. Обозначим

$$\sigma_1(\lambda)=\psi(0)\,h(\lambda)+\sigma(\lambda)$$

$$h(\lambda)=\begin{cases}1 & \text{при } \lambda\geqslant 0\\ 0 & \text{при } \lambda<0.\end{cases}$$

Непосредственный подсчет показывает, что при $\lambda\neq 0$ почти всюду относительно меры $\sigma_1(\lambda)$ функции $\psi(\lambda; y)\equiv 1$, а $\psi(0; y)=\frac{\alpha+\psi(y)}{\alpha+\psi(0)}$, α — скачок функции $\sigma(\lambda)$ в нуле. Отсюда следует, что эрмитово-положительные продолжения функции $F(x; y)$ представляют собой сумму эрмитово-положительных функций переменных x и y. В отличие от произведения «сумма продолжается только в сумму».

Заметим, что из однозначной продолжительности функции $\psi(y)$, вообще говоря, не следует однозначная продолжительность функции $F(x; y)$, так как при $\alpha>0$ функция $\frac{\alpha+\psi(y)}{\alpha+\psi(0)}$ может продолжаться неоднозначно.

§ 5. В заключение мы покажем, что в теореме М. С. Лившица о продолжаемости э. п. функции $F(x; y)$ с полосы на всю плоскость можно отбросить требование непрерывности.

Теорема 5. *Всякую э. п. функцию $F(x; y)$, заданную в полосе $-\infty<x<\infty$, $|y|\leqslant 2a$, можно продолжить с сохранением эрмитовой положительности на всю плоскость.*

Доказательство. Обозначим через W^2_{2a} линейное пространство функций следующего вида.

$$\varphi(t; \tau)=\sum_{k,j} c_{kj}e^{i(x_k t+y_j\tau)},\quad -\infty<x_k<\infty,\ |y_j|\leqslant 2a$$

с нормой

$$\| \varphi (t; \tau) \| = \sum | c_{kj} | < \infty,$$

а через $\overset{+}{W}_{2a}$ — конус неотрицательных функций в W^2_{2a}. Всякая функция $\varphi(t: \tau) \in W^2_{2a}$ может быть записана в форме

$$\varphi (t; \tau) = \sum_{k, j} c_j (t) e^{iy_k \tau}.$$

Коэффициенты $c_j(t)$ относятся к кольцу W^1 почти периодических функций с абсолютно сходящимся рядом Фурье и нормой

$$\| c_j (t) \| = \sum_k | c_{kj} |.$$

Очевидно, что

$$\| \varphi (t; \tau) \| = \sum_j \| c_j (t) \|.$$

Определим на W^2_{2a} функционал

$$F [\varphi (t; \tau)] = \sum_{k, j} c_{kj} F (x_k; y_j),$$

он определен и ограничен в силу неравенства $|F(x; y)| \leqslant F(0; 0)$. Если функция $\varphi(t: \tau)$ допускает представление

$$\varphi (t; \tau) = \Phi (t; \tau) \overline{\Phi (t; \tau)}, \tag{13}$$

где

$$\Phi (t; \tau) = \sum \xi_{kj} e^{i(\tilde{x}_k t + y_j \tau)}$$

и принадлежит W^2_a, то $F[\varphi(t; \tau)] \geqslant 0$.

Действительно, в этом случае получаем

$$F [\varphi (t; \tau)] = \sum_{k, j, r, s} F (\tilde{x}_k - \tilde{x}_r; \tilde{y}_j - \tilde{y}_s) \xi_{kj} \bar{\xi}_{rs} \geqslant 0.$$

Чтобы доказать положительность функционала $F[\varphi]$, достаточно показать, что всякая функция из конуса $\overset{+}{W}{}^2_{2a}$ представляется в форме (13).

Одним из авторов было доказано следующее обобщение известной теоремы Фейера—Рисса [16].

Теорема. *Пусть $f(x)$ — функция вида*

$$f (x) = \sum c_k e^{i\lambda_k x}, \quad |\lambda_k| \leqslant 2a, \quad \sum |a_k| < \infty \tag{14}$$

степени $2a$ и $f(x) \geqslant \gamma > 0$. *Тогда существует функция $\varphi(x)$ вида (14) степени a с корнями в одной из полуплоскостей и такая, что $f(x) = | \varphi(x) |^2$.*

Теорема остается справедливой, если числовые коэффициенты c_k заменить функциями $c_k(t)$ из некоторого кольца, а модули $|c_k|$ заменить нормами $\| c_k(t) \|$. Доказательство проходит в этом случае с сответствующими изменениями.

Итак, функционал F неотрицателен на функциях из $\overset{+}{W}_{2a}$ и согласно теореме М. Г. Крейна [19] может быть продолжен с сохранением положительности на множество всех почти периодических функций от двух переменных с абсолютно сходящимся рядом Фурье. Искомое продолжение функции $F(x; y)$ определим равенством

$$\tilde{F}(x; y) = \tilde{F}[e^{i(\lambda x + \mu y)}], \quad -\infty < x, \ y < \infty,$$

в котором $\tilde{F}$ — продолжение функционала F.

В заключение выражаем глубокую благодарность М. Г. Крейну за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Бохнер. Лекции об интегралах Фурье. Физматгиз, М., 1962.
2. М. Г. Крейн. О проблеме продолжения эрмитово-положительных непрерывных функций. ДАН СССР, 26, 17—21, 1940.
3. А. П. Артеменко. Позитивные функционалы и эрмитово-положительные функции. Автореф. канд. дисс., Одесса, 1941.
4. W. Rudin. On extensions problem for positive definite functions. Illinois Journal of Mathematics, 3, 532—539, 1963.
5. A. P. Calderon, R. Pepinsky. Fouries coefficients and the phase problem of positive definite functions. Computing Methods in X-Ray Crystal Analysis, Pensylvania, 1953.
6. М. С. Лившиц. О самосопряженных и зеркально сопряженных расширениях симметрических операторов. Автореф. докт. дисс., М., 1945.
7. Р. С. Исмагилов. Самосопряженные расширения системы коммутирующих симметрических операторов. ДАН СССР, 133, 4, 511—514, 1960.
8. Г. И. Эскин. *Достаточное условие разрешимости многомерной проблемы моментов*. ДАН СССР, 133, 4, 540—543, 1960.
9. A. Devinatz. Extensions of the positive definite functions. Acta Mathem, 101, 1 : 2, 1959.
10. И. Е. Овчаренко. О продолжении эрмитово-положительных функций. ДАН Арм. ССР, 38, 5, 257—261, 1964.
11. Б. Я. Левин, И. Е. Овчаренко. Описание продолжений эрмитово-положительных функций. ДАН СССР, 159, 4, 746—749, 1964.
12. Ю. М. Березанский, М. Л. Горбачук. О продолжении положительно-определенных функций двух переменных. УМЖ, 17, 5, 96—102, 1965.
13. М. Л. Горбачук. Об описании продолжений положительно-определенных ядер. ДАН СССР, 159, 4, 719—722, 1964.
14. М. Г. Крейн. Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m). УМЖ. 1, 2, 3—66, 1949.
15. М. Г. Крейн. О представлении функций интегралами Фурье—Стильтьеса. «Уч. зап. Куйбышевского пед. ин-та», Куйбышев, 1943.
16. Б. Я. Левин. Обобщение теоремы Фейера—Рисса. ДАН СССР, 52, 291—294, 1946.
17. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, М.—Л., 1956.
18. S. Banach. Theorie des operations linearies. Warsowie, 1932.
19. М. Г. Крейн. Про позитивні адитивні функціонали в лінійних нормованих просторах. «Зап. Харківськ. матем. т-ва», 4, 14 (1937).
20. Н. И. Ахиезер. Классическая проблема моментов. Физматгиз, М., 1961.
21. Ю. М. Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Изд-во «Наукова думка», Киев, 1965.
22. И. Е. Овчаренко. Об одном применении метода направляющих функционалов в теории предкоммутирующих операторов. ДАН СССР, 154, 5, 1038—1042, 1964.

Поступила 7 декабря 1966 г.