

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ  
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ В.Н. КАРАЗИНА



***ПОТЕНЦИАЛЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ  
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ  
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ***

Методическое пособие  
для студентов специальности "механика"

2006

УДК 531 : 539.3

Потенціали теорії пружності. Інтегральні рівняння першої та другої крайових задач. Методичний посібник для студентів III-IV курсів спеціальності "Механіка"  
/ Укладач І.І. Ієвлев – Харків: ХНУ, 2006. – 24 с.

Даний методичний посібник містить опис розділу класичної лінійної теорії пружності, пов'язаного із застосуванням інтегральних рівнянь для розв'язання основних просторових крайових задач. Теорія опирається на поняття тензора впливу Кельвіна-Сомільяни, побудованого для безмежного пружного простору. Подання розв'язань рівняння рівноваги у формі векторних потенціалів простого й подвійного шару зводить задачу про рівновагу тіла до сингулярних інтегральних рівнянь.

Рекомендовано студентам 3-4 курсів університета, що вивчають теорію пружності.

Рецензент: кандидат фіз.мат.наук, доцент С.О. Пославський

Рекомендовано до друку кафедрою теоретичної механіки Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна (протокол №1 від 07.09. 2006.

© Харківський національний  
університет ім. В.Н. Каразіна, 2006  
© І.І. Ієвлев, 2006

## Оглавление

Тензор влияния Кельвина – Сомильяны .....	- 2 -
Потенциалы теории упругости .....	- 10 -
Интегральные уравнения краевых задач теории упругости .....	- 13 -
Приложение I. Основные соотношения линейной теории упругости .....	- 23 -
Приложение II. Сводка применяемых формул и теорем. ....	- 24 -
Литература .....	- 25 -

**Тензор влияния Кельвина – Сомильяны**

В данном параграфе с помощью фундаментального решения уравнения равновесия Ляме вводятся два тензора: тензор влияния Кельвина-Сомильяны  $\hat{U}$  и силовой тензор  $\hat{\Phi}$  для упругого пространства. Для нахождения фундаментального решения уравнения Ляме используется представление Кирхгофа. Все выкладки проводятся в декартовой системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$  с ортами  $\vec{i}_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

Представление решения уравнения Ляме в форме Кирхгофа для безграничного упругого пространства

Рассмотрим равновесие упругого пространства, на которое действуют массовые силы  $\vec{X}$ . Будем считать, что массовые силы таковы, что перемещения на бесконечности стремятся к нулю. Согласно представлению Кирхгофа вектор перемещений  $\vec{u}$  будем разыскивать в виде суммы потенциальной и соленоидальной составляющих [5]

$$\vec{u} = \nabla\phi + \text{rot}\vec{\psi} \quad (u_i = \phi_{,i} + e_{ijk}\psi_{k,j}) \quad (1.1)$$

Соответственно, и массовые силы разобьем на потенциальную и соленоидальную составляющие

$$\vec{X} = \nabla\Pi + \text{rot}\vec{\chi} \quad (X_i = \phi_{,i} + e_{ijk}\chi_{k,j}) \quad (1.2)$$

где  $\hat{e} = \{e_{ijk}\}_{i,j,k=1}^3$  – тензор Леви-Чивита [5].

Подставляя выражение (1.1), (1.2) в уравнение (4.5) после очевидных преобразований, получим

$$\nabla\left(\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\Delta\phi + \frac{1}{\mu}\Pi\right) + \text{rot}\left(-\nabla\text{div}\vec{\psi} + \Delta\vec{\psi} + \frac{1}{\mu}\vec{\chi}\right) = 0$$

Это равенство будет выполняться, если потребовать выполнения двух уравнений относительно неизвестных функций  $\phi$  и  $\vec{\psi}$

$$\begin{aligned} -\Delta\phi &= \frac{1}{\lambda + 2\mu} \Pi \\ -\Delta\vec{\psi} &= \frac{1}{\mu} \vec{\chi} \end{aligned} \quad (1.3)$$

В случае неограниченного пространства для функций  $\phi$  и  $\vec{\psi}$ , устремляющихся к нулю на бесконечности, решение уравнений (1.3) можно представить в виде ньютонова потенциала [1]

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \int_V \frac{\Pi(\xi)}{R(x, \xi)} dV_\xi \\ \vec{\psi}(x) &= \frac{1}{4\pi\mu} \int_V \frac{\vec{\chi}(\xi)}{R(x, \xi)} dV_\xi \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $R(x, \xi) = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$  – расстояние между точками  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  и  $x = (x_1, x_2, x_3)$ .

Найдем функции  $\Pi(x)$  и  $\vec{\chi}(x)$ . Из соотношения (1.2) следует, что имеют место равенства  $\text{div } \vec{X} = \Delta\Pi$ ,  $\text{rot } \vec{X} = \text{rot rot } \vec{\chi}$ , которые при дополнительном условии соленоидальности вектора  $\vec{\chi}$  переходят в уравнения для нахождения функций  $\Pi(x)$  и  $\vec{\chi}(x)$

$$\begin{aligned} -\Delta\Pi &= -\text{div } \vec{X} \\ -\Delta\vec{\chi} &= \text{rot } \vec{X} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Как и в предыдущем абзаце, функции  $\Pi(x)$  и  $\vec{\chi}(x)$  будем разыскивать в виде ньютонова потенциала

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\text{div}_\xi(\vec{X}(\xi))}{R(x, \xi)} dV_\xi \\ \vec{\chi}(x) &= \frac{1}{4\pi\mu} \int_V \frac{\text{rot}_\xi(\vec{X}(\xi))}{R(x, \xi)} dV_\xi \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь нижний индекс  $\xi$  говорит, что дифференцирование и интегрирование проводятся по координатам точки  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . Преобразуем правые части соотношений

(1.6), перебрасывая операции  $div_{\xi}$  и  $rot_{\xi}$  с сомножителя  $\bar{X}(\xi)$  подинтегрального выражения на сомножитель  $1/R(x, \xi)$ . Тогда, применяя формулу Гаусса-Остроградского (5.1) для бесконечной области, когда интеграл по бесконечно удаленной поверхности  $\Sigma$  устремляется к нулю, и, переходя от дифференцирования по координатам точки  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  к дифференцированию по  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , получим следующие выражения для  $\Pi(x)$  и  $\bar{\chi}(x)$

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= -\frac{1}{4\pi} \int_V \bar{X}(\xi) \cdot \nabla_x \frac{1}{R(x, \xi)} dV_{\xi} = -\frac{1}{4\pi} div_x \int_V \frac{\bar{X}(\xi)}{R(x, \xi)} dV_{\xi} \\ \bar{\chi}(x) &= -\frac{1}{4\pi} \int_V \bar{X}(\xi) \times \nabla_x \frac{1}{R(x, \xi)} dV_{\xi} = \frac{1}{4\pi} rot_x \int_V \frac{\bar{X}(\xi)}{R(x, \xi)} dV_{\xi} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Тензор влияния Кельвина-Сомильяны

Пусть массовые силы представлены единичной сосредоточенной силой  $\bar{e} = e_k \bar{i}_k$ , действующей в точке  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ . В этом случае

$$\bar{X}(\xi, \zeta) = \bar{e} \delta(\xi, \zeta), \quad (X_k(\xi, \zeta) = e_k \delta(\xi, \zeta))$$

где  $\delta(\xi, \zeta)$  - дельта-функция [1]. Тогда из соотношений (1.7) следует

$$\begin{aligned} \Pi(x, \zeta) &= -\frac{1}{4\pi} \bar{e} \cdot \int_V \delta(\xi, \zeta) \cdot \nabla_x \frac{1}{R(x, \xi)} dV_{\xi} = -\frac{1}{4\pi} div_x \frac{\bar{e}}{R(x, \zeta)} = \frac{1}{4\pi} \frac{\bar{e} \cdot \bar{R}(x, \zeta)}{R^3(x, \zeta)} \\ \bar{\chi}(x, \zeta) &= -\frac{1}{4\pi} \bar{e} \times \int_V \delta(\xi, \zeta) \nabla_x \frac{1}{R(x, \xi)} dV_{\xi} = \frac{1}{4\pi} rot_x \frac{\bar{e}}{R(x, \zeta)} = \frac{1}{4\pi} \frac{\bar{e} \times \bar{R}(x, \zeta)}{R^3(x, \zeta)} \end{aligned} \quad (1.8)$$

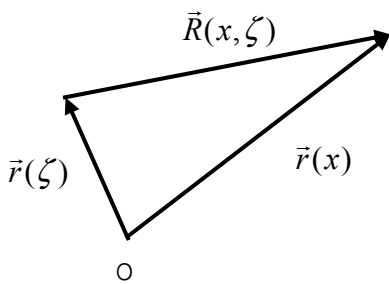


Рис. 1

где  $\bar{R}(x, \zeta) = \bar{r}(x) - \bar{r}(\zeta) = (x_k - \zeta_k) \bar{i}_k$  - вектор, соединяющий точки  $\zeta$  и  $x$  (рис.1).

Непосредственной подстановкой можно проверить, что решениями уравнений (1.3) с правыми частями, задаваемыми формулами (1.8), являются

$$\begin{aligned}\phi(x, \zeta) &= \frac{\vec{e} \cdot \vec{R}(x, \zeta)}{8\pi(\lambda + 2\mu)R(x, \zeta)} \\ \vec{\psi}(x, \zeta) &= \frac{\vec{e} \times \vec{R}(x, \zeta)}{8\pi\mu R(x, \zeta)}\end{aligned}\tag{1.9}$$

Найдем  $\nabla_x \phi$  и  $rot_x \vec{\psi}$

$$\begin{aligned}\nabla_x \phi &= \frac{1}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \nabla_x \left( \frac{\vec{e} \cdot \vec{R}}{R} \right) = \frac{1}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left( \frac{\vec{e}}{R} - \frac{\vec{e} \cdot \vec{R} \vec{R}}{R^3} \right) \\ rot_x \vec{\psi} &= \frac{1}{8\pi\mu} rot_x \left( \frac{\vec{e} \times \vec{R}}{R} \right) = \frac{1}{8\pi\mu} \left[ \frac{\nabla_x \times (\vec{e} \times \vec{R})}{R} + \nabla_x \frac{1}{R} \times (\vec{e} \times \vec{R}) \right] = \\ &= \frac{1}{8\pi\mu} \left[ \frac{3\vec{e} + \vec{e} \cdot \hat{\delta}}{R} - \frac{\vec{R}}{R^3} \times (\vec{e} \times \vec{R}) \right] = \frac{1}{8\pi\mu} \left( \frac{\vec{e}}{R} + \frac{(\vec{e} \cdot \vec{R}) \vec{R}}{R^3} \right)\end{aligned}$$

Тогда вектор перемещений  $\vec{U}$ , определяемый соотношением (1.1), принимает вид

$$\vec{U}(x, \zeta) = \frac{1}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left( \frac{\vec{e}}{R} - \frac{\vec{e} \cdot \vec{R} \vec{R}}{R^3} \right) + \frac{1}{8\pi\mu} \left( \frac{\vec{e}}{R} + \frac{\vec{e} \cdot \vec{R} \vec{R}}{R^3} \right) = \frac{(\lambda + \mu)}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left[ \frac{(\lambda + 3\mu) \vec{e}}{(\lambda + \mu) R} + \frac{\vec{R} \vec{R} \cdot \vec{e}}{R^3} \right]$$

Учтем формулы (4.3), для констант  $\lambda$  и  $\mu$ , вынесем в виде общего множителя вектор  $\vec{e}$  вправо за квадратные скобки. Тогда, обозначая через  $\hat{\delta}$  единичный тензор, получим соотношение для вектора  $\vec{U}$

$$\vec{U}(x, \zeta) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \frac{\hat{\delta}}{R} + \frac{\vec{R} \vec{R}}{R^3} \right] \cdot \vec{e}\tag{1.10}$$

Тензор, стоящий здесь множителем при векторе  $\vec{e}$ , является тензором влияния Кельвина-Сомильяны. Обозначим его через  $\hat{U}$  и запишем в виде

$$\hat{U}(x, \zeta) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \frac{\hat{\delta}}{R} + \frac{\vec{R} \vec{R}}{R^3} \right]\tag{1.11}$$

Силовой тензор

С тензором Кельвина-Сомильяны связан другой тензор – силовой. Строится он следующим образом. По вектору  $\vec{U}(x, \zeta)$  вычисляем тензор деформаций  $\hat{\epsilon}$ , а по нему тензор напряжений  $\hat{\sigma}$  в соответствии с законом Гука. Далее, выбирая произвольную площадочку с единичной нормалью  $\vec{n}$ , записываем произведение  $\vec{n} \cdot \hat{\sigma}$ . Т.к. тензор напряжений линейно зависит от вектора  $\vec{e}$ , то это произведение можно представить в виде произведения другого тензора  $\hat{\Phi}$  на вектор  $\vec{e}$ :  $\vec{n} \cdot \hat{\sigma} = \hat{\Phi} \cdot \vec{e}$ . Указанный тензор  $\hat{\Phi}$  и носит название силового тензора.

По вектору перемещений  $\vec{U}(x, \zeta)$  находим тензор деформаций как "деформацию вектора"  $def_x \vec{U}(x, \zeta)$  – симметричную часть градиента вектора [3]

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}(x, \zeta) = def_x(\vec{U}(x, \zeta)) &= \frac{1}{2} \left[ \nabla_x \vec{U}(x, \zeta) + (\nabla_x \vec{U}(x, \zeta))^T \right] \\ \left( \epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_k(x, \zeta)}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i(x, \zeta)}{\partial x_k} \right) \right) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Привлекая соотношение (1.10), получим выражение

$$\begin{aligned} \nabla_x \vec{U} &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \nabla_x \left( \frac{\vec{e}}{R} \right) + \nabla_x \left( \frac{\vec{R}\vec{R} \cdot \vec{e}}{R^3} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{16\mu(1-\nu)} \left[ (4\nu-3) \frac{\vec{e}\vec{R}}{R^3} + \frac{\vec{R}\vec{e}}{R^3} + \frac{\vec{R} \cdot \vec{e}}{R^3} \hat{\delta} - 3 \frac{\vec{R} \cdot \vec{e}}{R^5} \vec{R}\vec{R} \right] \end{aligned}$$

а, затем

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ + \frac{\vec{R} \cdot \vec{e}}{R^3} \hat{\delta} - (1-2\nu) \frac{\vec{e}\vec{R} + \vec{R}\vec{e}}{R^3} - 3 \frac{\vec{R} \cdot \vec{e}}{R^5} \vec{R}\vec{R} \right] \quad (1.13)$$

Отсюда, согласно закону Гука (4.1), получаем выражение для тензора напряжений

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \frac{\vec{R} \cdot \vec{e} \hat{\delta} - (\vec{R}\vec{e} + \vec{e}\vec{R})}{R^3} - 3 \frac{\vec{R} \cdot \vec{e}}{R^5} \vec{R}\vec{R} \right] \quad (1.14)$$



Теперь возьмем произвольную элементарную площадочку, ориентированную единичной нормалью  $\vec{n}$ , и рассмотрим в произвольной точке этой площадочки внутреннее произведение нормали с тензором напряжений (1.14)

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \vec{\sigma} &= 2\mu A \left\{ (1-2\nu) \left[ \frac{\vec{n}\vec{R} \cdot \vec{e}}{R^3} - \frac{\vec{n} \cdot \vec{R}\vec{e} + \vec{R}\vec{n} \cdot \vec{e}}{R^3} \right] - 3 \frac{\vec{n} \cdot \vec{R} \vec{R} \vec{R} \cdot \vec{e}}{R^5} \right\} = \\ &= 2\mu A \left\{ \left[ (1-2\nu) \frac{\vec{n}\vec{R} - \vec{R}\vec{n}}{R^3} - \frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{R^3} \hat{\delta} \right] - 3 \frac{\vec{n} \cdot \vec{R} \vec{R} \vec{R}}{R^5} \right\} \cdot \vec{e}\end{aligned}$$

где для краткости введено обозначение

$$A = 1/16\pi\mu(1-\nu) \quad (1.15)$$

Это соотношение представлено в виде произведения тензора второго ранга, который в дальнейшем будем обозначать через  $\hat{\Phi}$ , на вектор  $\vec{e}$

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = \hat{\Phi} \cdot \vec{e} \quad (1.16)$$

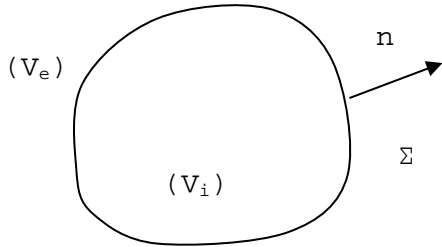
где

$$\begin{aligned}\hat{\Phi} = \hat{\Phi}(x, \zeta) &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \frac{\vec{n}\vec{R} - \vec{R}\vec{n} - \vec{n} \cdot \vec{R} \hat{\delta}}{R^3} - 3 \frac{\vec{n} \cdot \vec{R} \vec{R} \vec{R}}{R^5} \right] = \\ &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \frac{\vec{n}\vec{R} - \vec{R}\vec{n}}{R^3} - \vec{n} \cdot \vec{R} \nabla_x \nabla_x \frac{1}{R} \right] - \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{n} \cdot \vec{R}}{R^3} \hat{\delta} = \\ &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \frac{\vec{n}\vec{R} - \vec{R}\vec{n}}{R^3} - \vec{n} \cdot \vec{R} \nabla_x \nabla_x \frac{1}{R} \right] + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} \hat{\delta}\end{aligned} \quad (1.17)$$

представляет собой силовой тензор влияния (здесь в последнем равенстве использовано тождество  $3\vec{R}\vec{R}/R^5 = \nabla_x \nabla_x (1/R) + \hat{\delta}/R^3$ ).

#### СВОЙСТВО СИЛОВОГО ТЕНЗОРА ВЛИЯНИЯ

Рассмотрим область  $V_i$ , ограниченную поверхностью  $\Sigma$  с внешней нормалью  $\vec{n}$  (рис.2). Через  $V_e$  обозначим область, внешнюю по отношению к  $V_i$ . Найдем интеграл от выражения  $\Phi \cdot \vec{e} - \frac{\vec{e}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R}$  по поверхности  $\Sigma$ . Преобразуем



его, используя формулу Гаусса-Остроградского и уравнение равновесия

$$\operatorname{div}_x \hat{\sigma} + \vec{e} \delta(x, \zeta) = 0$$

Рис. 2

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} \left[ \hat{\Phi}(x, \zeta) \cdot \vec{e} - \frac{\vec{e}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{R(x, \zeta)} \right] d\Sigma_x &= \oint_{\Sigma} \vec{n}(x) \cdot \left[ \hat{\sigma}(x, \zeta) - \frac{\vec{e}}{4\pi} \nabla_x \frac{1}{R(x, \zeta)} \right] d\Sigma_x = \\ &= \int_{V_i} \operatorname{div}_x \hat{\sigma}(x, \zeta) + \vec{e} \delta(x, \zeta) dV_x = 0 \end{aligned}$$

Тогда, в силу произвола выбора вектора  $\vec{e}$ , из последнего равенства следует соотношение

$$\oint_{\Sigma} \hat{\Phi}(x, \zeta) d\Sigma_x = \frac{\hat{\delta}}{4\pi} \oint_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{R(x, \zeta)} d\Sigma_x \quad (1.18)$$

где правая часть содержит интеграл, представляющий собой интегралом Гаусса, равный <sup>1)</sup>

$$\oint_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R(x, \zeta)} d\Sigma_x = - \begin{cases} 4\pi & (\zeta \in V_i) \\ 2\pi & (\zeta \in \Sigma) \\ 0 & (\zeta \in V_e) \end{cases}$$

Из (1.18) следует окончательное выражение

<sup>1)</sup> см. [1], стр.367.

$$\oint_{\Sigma} \widehat{\Phi}(x, \zeta) d\Sigma_x = -\widehat{\delta} \begin{cases} 1 & (\zeta \in V_i) \\ 1/2 & (\zeta \in \Sigma) \\ 0 & (\zeta \in V_e) \end{cases} \quad (1.19)$$

Покажем, что для силового тензора влияния  $\widehat{\Phi}$  имеет место еще одно полезное соотношение

$$\oint_{\Sigma} \vec{R}(x, \zeta) \times \widehat{\Phi}(x, \zeta) d\Sigma_x = 0 \quad (1.20)$$

Для доказательства, умножим обе части последнего равенства на постоянный вектор  $\vec{e}$  и учтем равенство (1.16). Используя координатную форму записи тензорных величин и тензор Леви-Чивита  $\widehat{\mathcal{E}} = \varepsilon_{ijk} \vec{i}_i \vec{i}_j \vec{i}_k$  <sup>2)</sup>, произведем следующие очевидные действия

$$\begin{aligned} & \left( \oint_{\Sigma} \vec{R}(x, \zeta) \times \widehat{\Phi}(x, \zeta) \cdot \vec{e} d\Sigma_x \right)_i = \left( \oint_{\Sigma} \vec{R}(x, \zeta) \times [\vec{n}(x) \cdot \widehat{\sigma}(x, \zeta)] d\Sigma_x \right)_i = \\ & = \oint_{\Sigma} \varepsilon_{ijk} R_j(x, \zeta) n_m(x) \sigma_{mk}(x, \zeta) d\Sigma_x = \int_V \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_m} R_j(x, \zeta) \sigma_{mk}(x, \zeta) dV_x = \\ & = \int_V \left[ \varepsilon_{ijk} \left( \frac{\partial}{\partial x_m} R_j(x, \zeta) \right) \sigma_{mk}(x, \zeta) + \varepsilon_{ijk} R_j(x, \zeta) \left( \frac{\partial}{\partial x_m} \sigma_{mk}(x, \zeta) \right) \right] dV_x = \\ & = \int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk}(x, \zeta) dV_x - \int_V (\varepsilon_{ijk} R_j(x, \zeta) \delta(x, \zeta) e_k) dV_x \end{aligned}$$

После последнего знака равенства первый интеграл равен нулю в силу антисимметрии тензора Леви-Чивита  $\widehat{\mathcal{E}}$  и симметрии тензора напряжений  $\widehat{\sigma}$ , второй интеграл равен нулю в силу свойства  $\delta$ -функции. Отсюда следует соотношение (1.20).

<sup>2)</sup> см. [6]

Потенциалы теории упругости

Формула Сомильяны

Пусть упругое тело заполняет некоторую область  $V$  пространства (это может быть как внутренняя область  $V_i$ , так и внешняя  $V_e$  по отношению к замкнутой поверхности  $\Sigma$ , см. рис.2). Рассмотрим два напряженно деформированных состояний тела, характеризуемых векторами перемещения  $\vec{u}$  и  $\vec{u}'$ , возникающих под действием внешних массовых сил  $\vec{X}$  и  $\vec{X}'$ , поверхностных сил  $\vec{p}$  и  $\vec{p}'$ , соответственно. Здесь нештрихованные величины относятся к первому состоянию, а штрихованные – ко второму. Воспользуемся формулами Бетти [3,5]

$$\int_V \vec{X} \cdot \vec{u}' dV + \oint_{\Sigma} \vec{p} \cdot \vec{u}' d\Sigma = \int_V \vec{X}' \cdot \vec{u} dV + \oint_{\Sigma} \vec{p}' \cdot \vec{u} d\Sigma$$

Пусть второе состояние вызывается сосредоточенной силой  $\vec{e}$ , действующей в точке  $\zeta$  неограниченного пространства:

$$\vec{X}' = \vec{e} \delta(x, \zeta), \quad \vec{u}' = \hat{U}(x, \zeta) \cdot \vec{e}, \quad \vec{p}' = \vec{n}(x) \cdot \hat{\sigma}(x, \zeta)$$

Тогда формула Бетти дает следующее выражение

$$\vec{u}(\zeta) \cdot \vec{e} = \int_V \vec{X}(x) \cdot \hat{U}(x, \zeta) \cdot \vec{e} dV_x + \oint_{\Sigma} [\vec{p}(x) \cdot \hat{U}(x, \zeta) \cdot \vec{e} - \vec{n}(x) \cdot \hat{\sigma}(x, \zeta) \cdot \vec{u}(x)] d\Sigma_x$$

Учитывая формулу (1.16) и произвол в выборе вектора  $\vec{e}$ , последнее соотношение можно представить в виде

$$\vec{u}(\zeta) = \int_V \vec{X}(x) \cdot \hat{U}(x, \zeta) dV_x + \oint_{\Sigma} [\vec{p}(x) \cdot \hat{U}(x, \zeta) - \vec{u}(x) \cdot \hat{\Phi}(x, \zeta)] d\Sigma_x \quad (2.1)$$

Соотношение (2.1) представляет собой формулу Сомильяны и выражает значения вектора перемещений внутри объема  $V$  через значения этого вектора на поверхности  $\Sigma$ , массовые силы и поверхностные силы  $\vec{p}$ .

Как нетрудно заметить из соотношений (1.11), (1.17), тензор влияния  $\hat{U}(x, \zeta)$  имеет особенность на бесконечности вида  $1/R$ , а силовой тензор влияния  $\hat{\Phi}(x, \zeta)$  особенность вида  $1/R^2$ . Такого же типа особенности имеют скалярные потенциалы теории потенциала в математической физике [1].

Введем три векторные функции  $\vec{\psi}(\zeta)$ ,  $\vec{V}(\zeta)$  и  $\vec{W}(\zeta)$ , которые по аналогии с теорией скалярных потенциалов будем называть

$$\vec{\psi}(\zeta) = \int_V \vec{X}(x) \cdot \hat{U}(x, \zeta) dV_x \quad (2.2)$$

векторным объемным потенциалом

$$\vec{V}(\zeta) = \oint_{\Sigma} \vec{a}(y) \cdot \hat{U}(y, \zeta) d\Sigma_y \quad (2.3)$$

векторными потенциалами простого

$$\vec{W}(\zeta) = \oint_{\Sigma} \vec{b}(y) \cdot \hat{\Phi}(y, \zeta) d\Sigma_y \quad (2.4)$$

и двойного слоя.

Здесь  $\vec{X}(x)$ ,  $\vec{a}(y)$ ,  $\vec{b}(y)$  - векторные плотности потенциалов,  $y = (y_1, y_2, y_3)$  - точка, лежащая на поверхности  $\Sigma$ . Очевидно, что объемный потенциал удовлетворяет уравнению равновесия (4.5), когда на упругое тело действуют массовые силы интенсивности  $\vec{X}$ , а потенциалы простого и двойного слоя являются решениями однородного уравнения равновесия.

Предельные значения векторного потенциала двойного слоя.

Формулы Племели

Векторный объемный потенциал (2.2) в проекциях на оси декартовых координат можно рассматривать как три скалярных выражения, содержащих несобственные интегралы со слабой особенностью вида

$$\int_V \frac{\rho(x)}{R(x, \zeta)} dV_x$$

с непрерывной функцией  $\rho(x)$ . Интегралы такого типа являются непрерывными функциями координат точки  $\zeta \in E_3$ <sup>3)</sup>. Аналогичные утверждения о непрерывности по координатам точки  $\zeta \in E_3$  можно сделать относительно векторного потенциала простого слоя, который в скалярной форме сводится к трем интегралам типа

$$\int_{\Sigma} \frac{\mu(y)}{R(y, \zeta)} d\Sigma_y$$

В частности, непрерывность векторного потенциала (2.3) имеет место и в точках  $\zeta \in \Sigma$ , когда интеграл становится несобственным<sup>4)</sup>.

Векторный потенциал двойного слоя (2.4) является непрерывной функцией координат точки  $\zeta$  в любой точке области  $V$ , не лежащей на поверхности  $\Sigma$ . Когда точка  $\zeta$  принадлежит поверхности  $\Sigma$ , интеграл (2.4) становится сингулярным из-за слагаемых

$$\frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} \frac{\vec{n}\vec{R} - \vec{R}\vec{n}}{R^3}$$

входящих в ядро  $\hat{\Phi}$  потенциала двойного слоя<sup>5)</sup>.

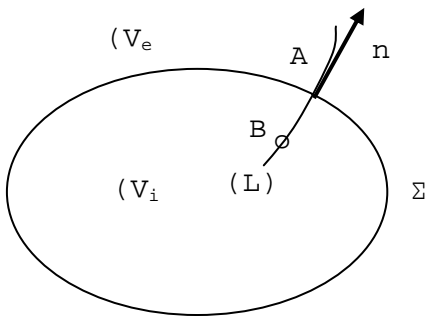


Рис. 3

Выберем пространственную кривую  $(L)$ , пересекающую поверхность  $\Sigma$  под прямым углом (рис.2). Обозначим через  $s$  дуговую координату этой линии, возрастающую в направлении нормали  $\vec{n}$ . Тогда предельным значением потенциала двойного слоя изнутри  $\vec{W}_i(\eta)$  называют

$$\vec{W}_i(\eta) = \lim_{s \rightarrow -0} \vec{W}[\zeta(s)]$$

а его предельным значением снаружи  $\vec{W}_e(\eta)$

$$\vec{W}_e(\eta) = \lim_{s \rightarrow +0} \vec{W}[\zeta(s)]$$

<sup>3)</sup> см. [1], стр.234.

<sup>4)</sup> см. [1], стр.374.

<sup>5)</sup> см. [7], стр.223.

где  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  - координаты точки  $A$ . Предельные значения  $\vec{W}_i(\eta)$  и  $\vec{W}_e(\eta)$  не совпадают, т.е. как и в случае скалярного потенциала двойного слоя, векторный потенциал  $\vec{W}(\zeta)$  претерпевает скачок при переходе через поверхность  $\Sigma$  <sup>6)</sup>. Действительно, представим потенциал двойного слоя в виде суммы

$$\vec{W}(\zeta) = \oint_{\Sigma} [\vec{b}(y) - \vec{b}(\eta)] \cdot \hat{\Phi}(y, \zeta) d\Sigma_y + \vec{b}(\eta) \cdot \oint_{\Sigma} \hat{\Phi}(y, \zeta) d\Sigma_y$$

В этом выражении первый интеграл представляет собой непрерывную функцию и при стремлении точки  $B$  к точке  $A$  как изнутри, так и снаружи (при  $s \rightarrow \pm 0$ ) может быть заменен своим прямым значением <sup>7)</sup>

$$\oint_{\Sigma} [\vec{b}(y) - \vec{b}(\eta)] \cdot \hat{\Phi}(y, \eta) d\Sigma_y = \oint_{\Sigma} \vec{b}(y) \cdot \hat{\Phi}(y, \eta) d\Sigma_y - \vec{b}(\eta) \cdot \oint_{\Sigma} \hat{\Phi}(y, \eta) d\Sigma_y .$$

Во втором слагаемом интеграл принимает соответствующие значения согласно формуле (1.19). Окончательно имеем следующие соотношения, носящие название формул Плетели

$$\begin{aligned} \vec{W}_i(\eta) &= \vec{W}(\eta) - \frac{1}{2} \vec{b}(\eta) \\ \vec{W}_e(\eta) &= \vec{W}(\eta) + \frac{1}{2} \vec{b}(\eta) \end{aligned} \tag{2.5}$$

### ***Интегральные уравнения краевых задач теории упругости***

Если на упругое тело действуют массовые силы  $\vec{X}$ , то всегда можно найти частное решение  $\vec{\psi}$ , удовлетворяющее неоднородному уравнению равновесия (4.5), например, в форме векторного объемного потенциала (2.2). Тогда замена  $\vec{u} = \vec{v} + \vec{\psi}$  приводит к однородному уравнению равновесия относительно функции  $\vec{v}$ . Поэтому в дальнейшем будем считать, что массовые силы отсутствуют, а тело нагружено только поверхностными силами. В этом случае решения таких задач можно разыскивать в форме потенциалов (2.3), (2.4).

#### Первая краевая задача

<sup>6)</sup> см. [1], стр.370.

<sup>7)</sup> см. [1], стр.371.

Пусть область  $V$  ограничена поверхностью  $\Sigma$ , на которой задан вектор перемещений  $\vec{u}$

$$\vec{u}(\eta) = \vec{g}(\eta) \quad (\eta \in \Sigma) \quad (3.1)$$

Если область  $V$  совпадает с  $V_i$ , то будем говорить о *первой внутренней краевой задаче* ( $I_i$ ), а, если  $V$  совпадает с  $V_e$ , то о *внешней задаче* ( $I_e$ ) (см. рис.2). Нормаль  $\vec{n}$  будем всегда выбирать внешней по отношению к объему  $V_i$ . Представим решение данной задачи в форме потенциала двойного слоя (2.4) с неизвестной плотностью  $\vec{b}(y)$ . Т.к. уравнение равновесия таким способом удовлетворяется, то остается потребовать выполнения граничного условия (3.1). Используя формулы Племели (2.5), получим следующие уравнения относительно плотности  $\vec{b}(y)$

$$\frac{1}{2}\vec{b}(\eta) - \oint_{\Sigma} \vec{b}(y) \cdot \hat{\Phi}(y, \eta) d\Sigma_y = -\vec{g}(\eta) \quad (3.2)$$

для внутренней задачи

$$\frac{1}{2}\vec{b}(\eta) + \oint_{\Sigma} \vec{b}(y) \cdot \hat{\Phi}(y, \eta) d\Sigma_y = \vec{g}(\eta) \quad (3.3)$$

для внешней задачи.

Зададим плотность потенциала  $\vec{b}(y)$  формулой (рис.4)

$$\vec{b}(y) = -(\vec{v}^0 + \vec{\omega} \times \vec{r}(y)) = -(\vec{v}^0 + \vec{\omega} \times \vec{r}(\eta)) - \vec{\omega} \times \vec{R}(y, \eta) \quad (3.4)$$

где  $\vec{v}^0, \vec{\omega}$  - постоянные векторы, а  $\eta, y$  координаты точек В и А, лежащие на поверхности  $\Sigma$ . Подставим данную плотность в левую часть интегрального уравнения (3.2) задачи ( $I_i$ ). Тогда с помощью формул (1.19)-(1.20) получим



$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}(\vec{v}^0 + \vec{\omega} \times \vec{r}(\eta)) + \oint_{\Sigma} [\vec{v}^0 + \vec{\omega} \times \vec{r}(\eta) + \vec{\omega} \times \vec{R}(y, \eta)] \cdot \hat{\Phi}(y, \eta) d\Sigma_y = \\
 & = -\frac{1}{2}(\vec{v}^0 + \vec{\omega} \times \vec{r}(\eta)) + (\vec{v}^0 + \vec{\omega} \times \vec{r}(\eta)) \cdot \oint_{\Sigma} \hat{\Phi}(y, \eta) d\Sigma_y + \vec{\omega} \times \oint_{\Sigma} [\vec{R}(y, \eta) \cdot \hat{\Phi}(y, \eta)] d\Sigma_y = \\
 & = -(\vec{v}^0 + \vec{\omega} \times \vec{r}(\eta)) + \vec{\omega} \cdot \oint_{\Sigma} [\vec{R}(y, \eta) \times \hat{\Phi}(y, \eta)] d\Sigma_y = -(\vec{v}^0 + \vec{\omega} \times \vec{r}(\eta))
 \end{aligned}$$

Т.о. заданной плотности потенциала отвечают перемещения точек поверхности  $\Sigma$  как твердой поверхности. Покажем, что и внутренние точки области  $V_i$  движутся как твердое тело. Перемещения внутренних точек определяются формулой (2.4) с плотностью  $\vec{b}(y) = -(\vec{v}^0 + \vec{\omega} \times \vec{r}(y))$ , а, следовательно, применяя соотношения (1.19) - (1.20), придем к выражению

$$\begin{aligned}
 \vec{u}(x) &= \oint_{\Sigma} [\vec{v}^0 + \vec{\omega} \times \vec{r}(y)] \cdot \hat{\Phi}(y, \eta) d\Sigma_y = \oint_{\Sigma} [\vec{v}^0 + \vec{\omega} \times \vec{r}(x) + \vec{\omega} \times \vec{R}(y, x)] \cdot \hat{\Phi}(y, x) d\Sigma_y = \\
 &= (\vec{v}^0 + \vec{\omega} \times \vec{r}(x)) \cdot \oint_{\Sigma} \hat{\Phi}(y, x) d\Sigma_y + \vec{\omega} \times \oint_{\Sigma} [\vec{R}(y, x) \cdot \hat{\Phi}(y, x)] d\Sigma_y = (\vec{v}^0 + \vec{\omega} \times \vec{r}(x))
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Подставим выражение для плотности потенциала (3.4) в левую часть интегрального уравнения (3.3) задачи  $(I_e)$ . Используя соотношения (1.19)-(1.20), преобразуем ее следующим образом

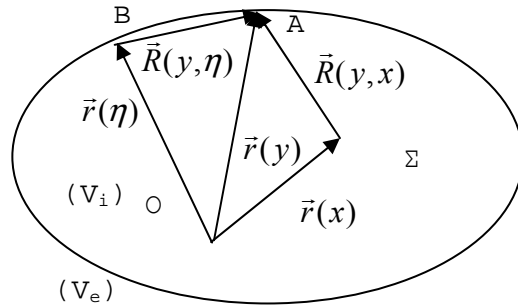


Рис. 4

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}(\vec{v}^0 + \vec{\omega} \times \vec{r}(\eta)) - \oint_{\Sigma} [\vec{v}^0 + \vec{\omega} \times \vec{r}(\eta) + \vec{\omega} \times \vec{R}(y, \eta)] \cdot \hat{\Phi}(y, \eta) d\Sigma_y = \\
 & = -\frac{1}{2}(\vec{v}^0 + \vec{\omega} \times \vec{r}(\eta)) - (\vec{v}^0 + \vec{\omega} \times \vec{r}(\eta)) \cdot \oint_{\Sigma} \hat{\Phi}(y, \eta) d\Sigma_y - \vec{\omega} \times \oint_{\Sigma} [\vec{R}(y, \eta) \cdot \hat{\Phi}(y, \eta)] d\Sigma_y = 0
 \end{aligned}$$

Т.о. однородное уравнение (3.3) имеет нетривиальное решение в виде векторного потенциала (3.4).

Вторая краевая задача

Во второй краевой задаче на границе  $\Sigma$  задаются напряжения

$$\vec{n}(\eta) \cdot \vec{\sigma}(\eta) = \pm \vec{p}(\eta) \quad (\eta \in \Sigma) \quad (3.6)$$

Здесь знак плюс относится к внутренней, а знак минус ко внешней задачам (нормаль  $\vec{n}$  является внешней по отношению к  $V_i$  и внутренней к  $V_e$ ). Будем разыскивать решение в виде векторного потенциала простого слоя (2.3). Т.к. уравнение равновесия выполняется, остается потребовать выполнения граничных условий (3.6). Для этого требуется определить тензор деформаций

$$\vec{\varepsilon} = def \vec{u} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \vec{i}_i \vec{i}_k \quad (3.7)$$

и с привлечением закона Гука найти тензор напряжений

$$\vec{\sigma} = 2\mu \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{mm} \delta + \vec{\varepsilon} \right) = 2\mu \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{mm} \delta_{ik} + \varepsilon_{ik} \right) \vec{i}_i \vec{i}_k \quad (3.8)$$

Вначале найдем компоненты градиента  $\nabla \vec{u} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \vec{i}_i \vec{i}_k$  вектора перемещений  $\vec{u}$ ,

заданного формулами (2.3), (1.11)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} &= \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \oint_{\Sigma} \vec{a}(y) \cdot \widehat{U}(y, x) d\Sigma_y \right) = \oint_{\Sigma} a_m(y) \frac{\partial}{\partial x_i} U_{mk}(y, x) d\Sigma_y = \\ &= \oint_{\Sigma} a_m(y) A \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (3-4\nu) \frac{\delta_{mk}}{R(y, x)} + \frac{(y_m - x_m)(y_k - x_k)}{R^3(y, x)} \right] d\Sigma_y = \\ &= \oint_{\Sigma} a_m(y) A \left[ (3-4\nu) \frac{(y_i - x_i) \delta_{mk}}{R^3(y, x)} - \frac{\delta_{im}(y_k - x_k) + (y_m - x_m) \delta_{ik}}{R^3(y, x)} + 3 \frac{(y_m - x_m)(y_i - x_i)(y_k - x_k)}{R^5(y, x)} \right] d\Sigma_y = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \oint_{\Sigma} A \left[ (3-4\nu) \frac{(y_i - x_i) a_k(y)}{R^3(y, x)} - \frac{a_i(y)(y_k - x_k) + a_m(y)(y_m - x_m) \delta_{ik}}{R^3(y, x)} + \right. \\
 &\quad \left. + 3 \frac{a_m(y)(y_m - x_m)(y_i - x_i)(y_k - x_k)}{R^5(y, x)} \right] d\Sigma_y = \\
 &= \left\{ \oint_{\Sigma} A \left[ (3-4\nu) \frac{\vec{R}\vec{a}}{R^3} - \frac{\vec{a}\vec{R} + \vec{a} \cdot \vec{R} \hat{\delta}}{R^3} + 3 \frac{\vec{a} \cdot \vec{R}}{R^5} \vec{R}\vec{R} \right] d\Sigma_y \right\}_{ik}
 \end{aligned}$$

где постоянная  $A$  определяется соотношением (1.15). Тензор деформаций  $\hat{\varepsilon}$  образуется из тензора  $\frac{\partial u_k}{\partial x_i}$  выделением его симметричной части

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}(x) = \left\{ \oint_{\Sigma} A \left[ (1-2\nu) \frac{\vec{R}\vec{a} + \vec{a}\vec{R}}{R^3} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{R}}{R^3} \hat{\delta} + 3 \frac{\vec{a} \cdot \vec{R}}{R^5} \vec{R}\vec{R} \right] d\Sigma_y \right\}_{ik} \quad (3.9)$$

Дилатация  $\theta$  (или след тензора  $\hat{\varepsilon}$ ) равна

$$\theta = \varepsilon_{mm} = \oint_{\Sigma} 2(1-2\nu) A \frac{\vec{a} \cdot \vec{R}}{R^3} d\Sigma_y$$

Окончательно, тензор напряжений равняется

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(x) = \oint_{\Sigma} 2\mu A \left[ (1-2\nu) \frac{\vec{R}\vec{a} + \vec{a}\vec{R} - \vec{a} \cdot \vec{R} \hat{\delta}}{R^3} + 3 \frac{\vec{a} \cdot \vec{R}}{R^5} \vec{R}\vec{R} \right] d\Sigma_y \quad (3.10)$$

Пусть  $\vec{n}(\eta)$  - нормаль к поверхности  $\Sigma$  в какой либо ее точке с координатами  $\eta$ .

Найдем выражение для произведения  $\vec{n}(\eta) \cdot \hat{\sigma}(x)$

$$\begin{aligned} \vec{n}(\eta) \cdot \vec{\sigma}(x) &= \\ &= \oint_{\Sigma} 2\mu A \left[ \begin{aligned} &(1-2\nu) \frac{\vec{n}(\eta) \cdot \vec{R}(y,x) \vec{a}(y) + \vec{n}(\eta) \cdot \vec{a}(y) \vec{R}(y,x) - \vec{a}(y) \cdot \vec{R}(y,x) \vec{n}(\eta)}{R^3(y,x)} + \\ &+ 3 \frac{\vec{a}(y) \cdot \vec{R}(y,x)}{R^5(y,x)} \vec{n}(\eta) \cdot \vec{R}(y,x) \vec{R}(y,x) \end{aligned} \right] d\Sigma_y = \\ &= \oint_{\Sigma} 2\mu A \vec{a}(y) \cdot \left[ \begin{aligned} &(1-2\nu) \frac{\vec{n}(\eta) \cdot \vec{R}(x,y) \hat{\delta} + \vec{n}(\eta) \vec{R}(y,x) - \vec{R}(y,x) \vec{n}(\eta)}{R^3(y,x)} + \\ &+ 3 \frac{\vec{n}(\eta) \cdot \vec{R}(y,x)}{R^5(y,x)} \vec{R}(y,x) \vec{R}(y,x) \end{aligned} \right] d\Sigma_y \end{aligned}$$

Обозначим тензор, стоящий сомножителем при векторе  $\vec{a}(y)$  под знаком интеграла, через  $\hat{\Psi}(y,x,\eta)$ . Рассмотрим интеграл суммы

$$\begin{aligned} &\oint_{\Sigma} \vec{a}(y) \cdot [\hat{\Psi}(y,x,\eta) + \hat{\Phi}(y,x)] d\Sigma_y = \\ &= \oint_{\Sigma} 2\mu A \vec{a}(y) \cdot \left\{ \left[ \begin{aligned} &(1-2\nu) \frac{\vec{n}(\eta) \cdot \vec{R}(y,x) \hat{\delta} + \vec{n}(\eta) \vec{R}(y,x) - \vec{R}(y,x) \vec{n}(\eta)}{R^3(y,x)} + \\ &+ 3 \frac{\vec{n}(\eta) \cdot \vec{R}(y,x)}{R^5(y,x)} \vec{R}(y,x) \vec{R}(y,x) \end{aligned} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[ \begin{aligned} &(1-2\nu) \frac{\vec{n}(y) \cdot \vec{R}(y,x) \hat{\delta} + \vec{R}(y,x) \vec{n}(y) - \vec{n}(y) \vec{R}(y,x)}{R^3(y,x)} + \\ &+ 3 \frac{\vec{n}(y) \cdot \vec{R}(y,x)}{R^5(y,x)} \vec{R}(y,x) \vec{R}(y,x) \end{aligned} \right] \right\} d\Sigma_y = \\ &= 2\mu A \oint_{\Sigma} \vec{a}(y) \cdot \left[ \begin{aligned} &(1-2\nu) \frac{(\vec{n}(\eta) - \vec{n}(y)) \cdot \vec{R}(y,x) \hat{\delta} + \vec{R}(y,x) (\vec{n}(\eta) - \vec{n}(y)) - (\vec{n}(\eta) - \vec{n}(y)) \vec{R}(y,x)}{R^3(y,x)} + \\ &+ 3 \frac{(\vec{n}(\eta) - \vec{n}(y)) \cdot \vec{R}(y,x)}{R^5(y,x)} \vec{R}(y,x) \vec{R}(y,x) \end{aligned} \right] d\Sigma_y \end{aligned}$$

Данная функция координат является непрерывной в области  $V$ , включая точку поверхности  $\Sigma$ , имеющую координаты  $\eta^8$ ). Следовательно, при устремлении  $x \rightarrow \eta$  последний интеграл принимает свое прямое значение. Воспользуемся доказанным обстоятельством и запишем выражение  $\vec{n}(\eta) \cdot \vec{\sigma}(x)$  в виде

<sup>8</sup>) см. [1], стр.371.

$$\vec{n}(\eta) \cdot \vec{\sigma}(x) = \oint_{\Sigma} [\hat{\Psi}(y, x, \eta) + \hat{\Phi}(y, x)] \cdot \vec{a}(y) d\Sigma_y - \oint_{\Sigma} \hat{\Phi}(y, x) \cdot \vec{a}(y) d\Sigma_y \quad (3.11)$$

Перейдем в последнем соотношении к пределу, когда  $x \rightarrow \eta$ . Тогда, учитывая формулы Племели (2.5), получим значения  $\vec{n}(\eta) \cdot \vec{\sigma}(x)$  изнутри области  $V_i$  ( $\vec{n}(\eta) \cdot \vec{\sigma}(x)_i$ )

$$\begin{aligned} (\vec{n}(\eta) \cdot \vec{\sigma}(x))_i &= \oint_{\Sigma} \vec{a}(y) \cdot [\hat{\Psi}(y, \eta, \eta) + \hat{\Phi}(y, \eta)] d\Sigma_y - \oint_{\Sigma} \vec{a}(y) \cdot \hat{\Phi}(y, \eta) d\Sigma_y + \frac{1}{2} \vec{a}(\eta) = \\ &= \oint_{\Sigma} \vec{a}(y) \cdot \hat{\Psi}(y, \eta, \eta) d\Sigma_y + \frac{1}{2} \vec{a}(\eta) \end{aligned} \quad (3.12)$$

и снаружи ( $\vec{n}(\eta) \cdot \vec{\sigma}(x)_e$ )

$$\begin{aligned} (\vec{n}(\eta) \cdot \vec{\sigma}(x))_e &= \oint_{\Sigma} \vec{a}(y) \cdot [\hat{\Psi}(y, \eta, \eta) + \hat{\Phi}(y, \eta)] d\Sigma_y - \oint_{\Sigma} \vec{a}(y) \cdot \hat{\Phi}(y, \eta) d\Sigma_y - \frac{1}{2} \vec{a}(\eta) = \\ &= \oint_{\Sigma} \vec{a}(y) \cdot \hat{\Psi}(y, \eta, \eta) d\Sigma_y - \frac{1}{2} \vec{a}(\eta) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Непосредственным сравнением выражений для  $\hat{\Psi}$  и  $\hat{\Phi}$  можно убедиться в том, что  $\Psi_{mk}(y, \eta, \eta) \equiv \Phi_{km}(\eta, y)$ , а, следовательно,  $a_m(y) \Psi_{mk}(y, \eta, \eta) \equiv \Phi_{km}(\eta, y) a_m(y)$ . Используя граничные условия (3.6), соотношения (3.12), (3.13), получим интегральные уравнения

$$\frac{1}{2} \vec{a}(\eta) + \oint_{\Sigma} \hat{\Phi}(y, \eta) \cdot \vec{a}(y) d\Sigma_y = \vec{p}(\eta) \quad (3.14)$$

для внутренней (II<sub>i</sub>) и

$$\frac{1}{2} \vec{a}(\eta) - \oint_{\Sigma} \hat{\Phi}(y, \eta) \cdot \vec{a}(y) d\Sigma_y = \vec{p}(\eta) \quad (3.15)$$

внешней (II<sub>e</sub>) краевых задач.

Свойства интегральных уравнений

Уравнения (3.2), (3.3), (3.14), (3.15) представляют собой сингулярные интегральные уравнения, причем уравнение (3.15) является сопряженным по отношению к уравнению (3.2), а (3.14) сопряженным по отношению к (3.3) [2,4,7]. Для этих уравнений выполняются теоремы Фредгольма<sup>9)</sup> и имеют место следующие утверждения:

- уравнения (3.2), (3.15) задач (I<sub>i</sub>) и (II<sub>e</sub>) всегда разрешимы и притом единственным образом;
- уравнение (3.14) задачи (II<sub>i</sub>) разрешимо только тогда, когда выполнены условия

$$\oint_{\Sigma} \vec{p}(y) d\Sigma_y = 0, \quad \oint_{\Sigma} \vec{r}(y) \times \vec{p}(y) d\Sigma_y = 0 \quad (3.16) \text{ выра-}$$

жающие собой необходимые условия равновесия тела – равенство нулю главного вектора и векторного момента внешних сил;

- уравнение (3.3) в общем случае неразрешимо из-за того, что не любое решение задачи (I<sub>e</sub>) имеет такую же быстроту убывания на бесконечности, как и потенциал двойного слоя.

Для доказательства первого утверждения предположим, что однородное уравнение (3.15) задачи (II<sub>e</sub>) имеет нетривиальное решение  $\vec{a}^0(y)$

$$\frac{1}{2} \vec{a}^0(\eta) - \oint_{\Sigma} \vec{a}^0(y) \cdot \hat{\Phi}(y, \eta) d\Sigma_y = 0 \quad (3.17)$$

Рассмотрим вектор перемещений  $\vec{u}(x)$  в области  $V_e$  в форме потенциала простого слоя (2.3). Вектор  $\vec{u}(x)$  на бесконечности имеет порядок  $O(R^{-1})$ , найденный по этому вектору тензор деформаций, а, следовательно, и тензор напряжений имеют порядок  $O(R^{-2})$ . Потенциальная энергия упругого тела определяется интегралом [3]

---

<sup>9)</sup> см. [7], стр. 224.

$$\begin{aligned}
 \int_{V_e} \sigma_{ik} \varepsilon_{ik} dV &= \int_{V_e} 2\mu \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{mm} + \varepsilon_{ik} \right] \varepsilon_{ik} dV = \int_{V_e} 2\mu \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{mm})^2 + \varepsilon_{ik} \varepsilon_{ik} \right] dV = \\
 &= \int_{V_e} \sigma_{ik} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dV = \int_{V_e} \sigma_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dV = - \int_{V_e} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} u_k dV + \oint_{\Sigma} p_k u_k d\Sigma = \int_{V_e} X_k u_k dV = 0
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Здесь учтено то, что массовые и поверхностные силы для таких деформаций равны нулю. Отсюда следует равенство нулю компонент тензора деформаций, что соответствует перемещению тела как твердого. Но перемещения тела на бесконечности равны нулю. Следовательно,  $\vec{u}(x) = 0$  ( $x \in V_e$ ). Соотношение, аналогичное уравнению (3.18), имеет место и для области  $V_i$ , а, значит,  $\vec{u}(x) = 0$  ( $x \in V_i$ ). Т.о. внутри области  $V_i$  тензор деформаций и тензор напряжений также равны нулю. Представляя вектор перемещений внутри  $V_i$  в форме потенциал простого слоя (2.3), используя равенство нулю выражения (3.12) (отсутствие напряжений на поверхности  $\Sigma$ ), получим

$$\frac{1}{2} \vec{a}^0(\eta) + \oint_{\Sigma} \vec{a}^0(y) \cdot \hat{\Phi}(y, \eta) d\Sigma_y = 0$$

Складывая левые и правые части этого уравнения и уравнения (3.17), получим, что  $\vec{a}^0 = 0$ . Отсюда следует единственность решения уравнения (3.15) и сопряженного ему уравнения (3.2).

Как отмечалось выше, однородное уравнение (3.3) имеет ненулевое решение

$$\vec{b}^0(y) = -(\vec{v}^0 + \vec{\omega} \times \vec{r}(y))$$

Следовательно, и сопряженное однородное уравнение (3.14) имеет ненулевое решение  $\vec{a}^0(y)$ . Для выяснения механического смысла данного решения рассмотрим перемещения  $\vec{u}(x)$  точек области  $V_e$  в виде потенциала простого слоя с плотностью потенциала, равной  $\vec{a}^0(y)$ . Определяя предельное значение  $(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})_e$ , придем к соотношению (3.15) с  $\vec{a}(y) = \vec{a}^0(y)$ . Складывая полученное уравнение с однородным уравнением (3.14), получим равенство  $\vec{a}^0(y) = \vec{p}(y)$ . Т.о. решение однородного уравнения (3.14) представляет собой напряжения на поверхности  $\Sigma$ , которые от-

носятся к краевой задаче, называемой задачей Робена. Эта задача формулируется следующим образом:

*найти перемещения, равные нулю на бесконечности, упругого тела, заполняющего пространство вне замкнутой поверхности  $\Sigma$  (область  $V_e$ ) при заданном перемещении  $\vec{g}(\eta) = \vec{v}^0 + \vec{\omega} \times \vec{r}(y)$  точек поверхности  $\Sigma$  как поверхности твердого тела, расположенного в области  $V_i$ , с заданными постоянными векторами  $\vec{v}^0$  - трансляционного перемещения и  $\vec{\omega}$  - поворота этого тела вокруг начала координат.*

Необходимым условием разрешимости уравнения (3.3) является ортогональность правой части  $\vec{g}(\eta)$  данного уравнения (перемещений точек поверхности  $\Sigma$ ) к напряжениям  $\vec{a}^0(\eta)$  на этой поверхности, определяемым в результате решения задачи Робена,

$$\oint_{\Sigma} \vec{g}(y) \cdot \vec{a}^0(y) d\Sigma = 0$$



**Приложение I. Основные соотношения линейной теории упругости**

Здесь приведены в виде справочного материала основные соотношения теории упругости, используемые в основном тексте [3,5].

1<sup>0</sup>. Закон Гука, определяющий связь между компонентами тензора напряжений  $\hat{\sigma}$  и тензора деформаций  $\hat{\varepsilon}$

$$\hat{\sigma} = \lambda\theta\hat{\delta} + 2\mu\hat{\varepsilon} = 2\mu\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\theta\hat{\delta} + \hat{\varepsilon}\right) \left(\sigma_{ik} = \lambda\theta\delta_{ik} + 2\mu\varepsilon_{ik} = 2\mu\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\theta\delta_{ik} + \varepsilon_{ik}\right)\right) \quad (4.1)$$

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu}\left(\hat{\sigma} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma\hat{\delta}\right) \left(\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ik} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma\delta_{ik}\right)\right) \quad (4.2)$$

где

$$2\mu = \frac{E}{1+\nu}, \quad \lambda = 2\mu\frac{\nu}{1-2\nu} \quad (4.3)$$

- физические константы упругого материала,  $E, \nu$  - модуль Юнга и коэффициент Пуассона, соответственно,  $\theta = \varepsilon_{mm}$  - дилатация (след тензора деформаций),  $\sigma = \sigma_{mm}$  - среднее напряжение (одна треть следа тензора напряжений).

2<sup>0</sup>. Уравнение равновесия

$$\text{div } \hat{\sigma} + \mathbf{X} = 0 \quad (\sigma_{ki,j} + X_i = 0) \quad (4.4)$$

уравнение Лямэ

$$(\lambda + \mu)\nabla \text{div } \mathbf{u} + \mu\Delta \mathbf{u} + \mathbf{X} = 0 \quad ((\lambda + \mu)u_{k,ik} + \mu u_{i,kk} + X_i = 0) \quad (4.5)$$

для вектора перемещений  $u_i$ .

Здесь  $\vec{\nabla}$  - объемная плотность массовых сил, запятая в индексах означает ковариантное дифференцирование по координатам с индексами, следующими после запятой.

**Приложение II. Сводка применяемых формул и теорем.**

1<sup>0</sup>. Обобщенная формула Гаусса-Остроградского [6]

$$\int_V T_{i_1 \dots i_n}^{k j_1 \dots j_n} dV = \oint_{\Sigma} n_k T_{i_1 \dots i_n}^{k j_1 \dots j_n} d\Sigma \quad (5.1)$$

где  $T_{i_1 \dots i_n}^{k j_1 \dots j_n}$  - тензор n-го ранга, индекс после запятой означает ковариантное дифференцирование по соответствующей переменной,  $\Sigma$  - поверхность, охватывающая объем  $V$ ,  $\vec{n}$  - ковариантный вектор нормали, внешней по отношению к объему  $V$ .

В случае безграничной области, когда тензор  $T_{i_1 \dots i_n}^{k j_1 \dots j_n}$  имеет порядок убывания на бесконечности  $O(\frac{1}{R^{2+\alpha}})$ , ( $\alpha > 0$ ), правая часть в соотношении (5.1) обращается в нуль.

2<sup>0</sup>. Интеграл Гаусса.

$$W_0(\zeta) = \oint_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{1}{R(x, \zeta)} d\Sigma_x = \begin{cases} -4\pi & (\zeta \in V_i) \\ -2\pi & (\zeta \in \Sigma) \\ 0 & (\zeta \in V_e) \end{cases} \quad (5.2)$$

*Литература*

1. Михлин С.Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968. - 576 с.
2. Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. - 448 с.
3. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука.-1970. 939 с.
4. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. Физматгиз, 1963.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир.-1975. 872 с.
6. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. Харьков: Выща школа, Изд-во при Харьк. ун-те, 1986. - 216 с.
7. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. Л.: Физматгиз, 1962. - 256 с.

Навчальне видання

ПОТЕНЦІАЛИ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ  
ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОЇ ТА ДРУГОЇ  
КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Методичний посібник  
для студентів III-IV курсів  
спеціальності "Механіка"

Укладач ІЄВЛЕВ Іван Іванович

Відповідальний за випуск І. І. Ієвлев