ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ $(\overline{R}, p_m, q_n)$-МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ ДВОЙНЫХ РЯДОВ И ТЕОРЕМАХ ТАУБЕРОВА ТИПА

М. Ф. Бурляй

§ 1. Пусть дан двойной числовой ряд

$$\sum_{m,\, n=0}^{\infty} a_{mn} \tag{1}$$

с комплексными членами. Обозначим через

$$S_{mn} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij}$$

его частные суммы.

Ряд (1) называется суммируемым $(\overline{R}, p_m, q_n)$-методом к числу S [1], если $\lim\limits_{m,\, n\to\infty} \overline{R}_{mn} = S$,
где

$$\overline{R}_{mn} = \frac{1}{P_m Q_n} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} p_i q_j S_{ij},$$

$$p_m \geqslant 0,\ p_0 > 0,\ P_m = \sum_{i=0}^{m} p_i \to \infty,\ \ q_n \geqslant 0,\ \ q_0 > 0,\ Q_n = \sum_{j=0}^{n} q_j \to \infty.$$

Пусть G — замкнутое выпуклое множество в комплексной плоскости и G_ε — замкнутая выпуклая ε-окрестность множества G. По аналогии с определением Н. А. Давыдова [2, стр. 521] дадим следующее

Определение 1. *Замкнутое выпуклое множество G в комплексной плоскости, отличное от всей комплексной плоскости, назовем $(\overline{R}, p, q)$-множеством двойной последовательности комплексных чисел S_{mn}, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся число $\mu(\varepsilon) > 1$ и такая последовательность замкнутых прямоугольников $\Delta_k \{m_k, m_k'; n_k, n_k'\}$ $(k = 1, 2, \dots)$*, что $S_{mn} \in G_\varepsilon$ для $(m, n) \in \Delta_k$, $m_k, n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$, причем

$$\frac{P_{m_k'}}{P_{m_k}} \geqslant \mu(\varepsilon) > 1,\ \ \frac{Q_{n_k'}}{Q_{n_k}} \geqslant \mu(\varepsilon) > 1. \tag{2}$$

Если $(\overline{R}, p, q)$-множество G состоит из одной точки, то эту точку будем называть $(\overline{R}, p, q)$-точкой последовательности S_{mn}.

Определение 2. *Бесконечно удаленную точку комплексной плоскости будем называть* ($\overline{R}$, p, q)*-точкой последовательности* S_{mn}, *если найдутся число* $\mu > 1$, *последовательность замкнутых прямоугольников* $\Delta_k \{m_k, m'_k; n_k, n'_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *а также последовательность замкнутых выпуклых множеств* G_k, *стягивающихся к бесконечно удаленной точке, такие, что* $S_{mn} \in G_k$ *для* $(m, n) \in \Delta_k$, *причем*

$$\frac{P_{m'_k}}{P_{m_k}} \geqslant \mu > 1, \frac{Q_{n'_k}}{Q_{n_k}} \geqslant \mu > 1 \quad (k = 1, 2, \ldots), \quad m_k, \quad n_k \to \infty \quad (k \to \infty).$$

Следующая теорема выражает ($\overline{R}$, p, q)-свойство ($\overline{R}$, p_m, q_n)-методов суммирования двойных рядов.

Теорема 1. *Если ряд (1) суммируется* ($\overline{R}$, p_m, q_n)*-методом к числу* S *и множество* G *является* ($\overline{R}$, p, q) — *множеством последовательности* S_{mn}, *то* $S \in G$. *Если бесконечно удаленная точка является* ($\overline{R}$, p, q)*-точкой последовательности* S_{mn}, *то* $\lim\limits_{m, n \to \infty} |\overline{R}_{mn}| = \infty$.

Доказательство. Пусть множество G является ($\overline{R}$, p, q) — множеством последовательности S_{mn}. Зададим число $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся число $\mu(\varepsilon) > 1$ и такая последовательность замкнутых прямоугольников $\Delta_k \{m_k, m'_k; n_k, n'_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, что $S_{mn} \in G_\varepsilon$ для $(m, n) \in \Delta_k$, m_k, $n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$ и выполнены условия (2).

Рассмотрим равенство

$$\frac{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m'_k} \sum\limits_{j=n_k+1}^{n'_k} p_i q_j S_{ij}}{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m'_k} \sum\limits_{j=n_k+1}^{n'_k} p_i q_j} = \frac{\left(\sum\limits_{i=0}^{m'_k} \sum\limits_{j=0}^{n'_k} - \sum\limits_{i=0}^{m'_k} \sum\limits_{j=0}^{n_k} - \sum\limits_{i=0}^{m_k} \sum\limits_{j=0}^{n'_k} + \sum\limits_{i=0}^{m_k} \sum\limits_{j=0}^{n_k}\right) p_i q_j S_{ij}}{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m'_k} \sum\limits_{j=n_k+1}^{n'_k} p_i q_j} =$$

$$= \frac{P_{m'_k} Q_{n'_k}}{(P_{m'_k} - P_{m_k})(Q_{n'_k} - Q_{n_k})} \overline{R}_{m'_k n'_k} - \frac{P_{m'_k} Q_{n_k}}{(P_{m'_k} - P_{m_k})(Q_{n'_k} - Q_{n_k})} \overline{R}_{m'_k n_k} -$$

$$- \frac{P_{m_k} Q_{n'_k}}{(P_{m'_k} - P_{m_k})(Q_{n'_k} - Q_{n_k})} \overline{R}_{m_k n'_k} + \frac{P_{m_k} Q_{n_k}}{(P_{m'_k} - P_{m_k})(Q_{n'_k} - Q_{n_k})} \overline{R}_{m_k n_k}. \qquad (3)$$

Из равенства (3) получаем

$$\frac{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m'_k} \sum\limits_{j=n_k+1}^{n'_k} p_i q_j S_{ij}}{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m'_k} \sum\limits_{j=n_k+1}^{n'_k} p_i q_j} - S = \frac{P_{m'_k} Q_{n'_k}}{(P_{m'_k} - P_{m_k})(Q_{n'_k} - Q_{n_k})} (\overline{R}_{m'_k n'_k} - S) -$$

$$- \frac{P_{m'_k} Q_{n_k}}{(P_{m'_k} - P_{m_k})(Q_{n'_k} - Q_{n_k})} (\overline{R}_{m'_k n_k} - S) - \frac{P_{m_k} Q_{n'_k}}{(P_{m'_k} - P_{m_k})(Q_{n'_k} - Q_{n_k})} (\overline{R}_{m_k n'_k} -$$

$$- S) + \frac{P_{m_k} Q_{n_k}}{(P_{m'_k} - P_{m_k})(Q_{n'_k} - Q_{n_k})} (\overline{R}_{m_k n_k} - S). \qquad (4)$$

Так как $\dfrac{P_{m'_k}}{P_{m_k}} \geqslant \mu > 1$, $\quad \dfrac{Q_{n'_k}}{Q_{n_k}} \geqslant \mu > 1$, то

$$0 < \frac{P_{m'_k} Q_{n'_k}}{(P_{m'_k} - P_{m_k})(Q_{n'_k} - Q_{n_k})} = \frac{1}{\left(1 - \dfrac{P_{m_k}}{P_{m'_k}}\right)\left(1 - \dfrac{Q_{n_k}}{Q_{n'_k}}\right)} \leqslant \frac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{\mu}\right)^2}, \tag{5}$$

$$0 < \frac{P_{m'_k} Q_{n_k}}{(P_{m'_k} - P_{m_k})(Q_{n'_k} - Q_{n_k})} = \frac{1}{\left(1 - \dfrac{P_{m_k}}{P_{m'_k}}\right)\left(\dfrac{Q_{n'_k}}{Q_{n_k}} - 1\right)} \leqslant \frac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{\mu}\right)(\mu - 1)}, \tag{6}$$

$$0 < \frac{P_{m_k} Q_{n'_k}}{(P_{m'_k} - P_{m_k})(Q_{n'_k} - Q_{n_k})} = \frac{1}{\left(\dfrac{P_{m'_k}}{P_{m_k}} - 1\right)\left(1 - \dfrac{Q_{n_k}}{Q_{n'_k}}\right)} \leqslant \frac{1}{(\mu - 1)\left(1 - \dfrac{1}{\mu}\right)}, \tag{7}$$

$$0 < \frac{P_{m_k} Q_{n_k}}{(P_{m'_k} - P_{m_k})(Q_{n'_k} - Q_{n_k})} = \frac{1}{\left(\dfrac{P_{m'_k}}{P_{m_k}} - 1\right)\left(\dfrac{Q_{n'_k}}{Q_{n_k}} - 1\right)} \leqslant \frac{1}{(\mu - 1)^2}. \tag{8}$$

Если $\lim\limits_{m,\, n \to \infty} \overline{R}_{mn} = S$, то правая часть равенства (4) в силу (5)—(8) стремится к нулю при $k \to \infty$.

Следовательно,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m'_k} \sum\limits_{j=n_k+1}^{n'_k} p_i q_j S_{ij}}{\sum\limits_{i=m_k+1}^{m'_k} \sum\limits_{j=n_k+1}^{n'_k} p_i q_j} = S. \tag{9}$$

Так как $S_{ij} \in G_\varepsilon$ для $(i, j) \in \Delta_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то, по известной теореме ([3], стр. 115, задача 30), число, стоящее под знаком предела в равенстве (9), принадлежит множеству G_ε для всех $k = 1, 2, \ldots$ Поэтому $S \in G_\varepsilon$. В силу произвольной малости $\varepsilon > 0$ и замкнутости множества G число $S \in G$.

Предположим теперь, что бесконечно удаленная точка является $(\overline{R}, p, q)$-точкой последовательности S_{mn}. Тогда найдутся число $\mu > 1$, последовательность замкнутых прямоугольников $\Delta_k \{m_k, m'_k;\, n_k, n'_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, а также последовательность замкнутых выпуклых множеств G_k, стягивающихся к бесконечно удаленной точке, такие, что $S_{mn} \in G_k$ для $(m, n) \in \Delta_k$, причем

$$\frac{P_{m'_k}}{P_{m_k}} \geqslant \mu > 1, \quad \frac{Q_{n'_k}}{Q_{n_k}} \geqslant \mu > 1 \quad (k = 1, 2, \ldots), \quad m_k,\ n_k \to \infty \quad (k \to \infty). \tag{10}$$

Как и при доказательстве первой части теоремы, имеем равенство (3). Число, стоящее в левой части этого равенства, в силу известной теоремы [3, стр. 115, задача 30] принадлежит множеству G_k и, следовательно, оно стремится к бесконечности при $k \to \infty$. Так как в силу (10) имеют место соотношения (5) — (8), то отсюда следует справедливость утверждения второй части теоремы.

Следствие. *Если ряд* (1) *суммируется* $(\overline{R}, p_m, q_n)$-*методом к числу* S *и если точка* A *является* $(\overline{R}, p, q)$-*точкой последовательности* S_{mn}, *то* $S = A$. Это следствие является частным случаем теоремы 1.

§ 2. Из доказанного выше $(\overline{R}, p, q)$-свойства $(\overline{R}, p_m, q_n)$-методов вытекает целый ряд теорем тауберова типа.

Теорема 2. *Если ряд* (1) *суммируется* $(\overline{R}, p_m, q_n)$-*методом к числу* S *и если каждый частичный предел, конечный или бесконечный, последовательности* S_{mn} *частных сумм этого ряда является* $(\overline{R}, p, q)$-*точкой этой последовательности, то ряд* (1) *сходится к числу* S.

Теорема 3. *Если ряд (1) суммируется* $(\overline{R}, p_m, q_n)$-*методом к числу* S *и если каждый частичный предел, конечный или бесконечный, подпоследовательности* $S_{m_k n_k}$ *частных сумм этого ряда является* $(\overline{R}, p, q)$-*точкой последовательности* S_{mn}, *то*

$$\lim_{k\to\infty} S_{m_k n_k} = S.$$

Теоремы 2 и 3 являются следствиями теоремы 1.

Покажем это на примере теоремы 2.

По $(\overline{R}, p, q)$-свойству $(\overline{R}, p_m, q_n)$-методов последовательность S_{mn} не может иметь двух различных конечных частичных пределов, а бесконечно удаленная точка не может быть частичным пределом этой последовательности. Таким образом, при выполнении условий теоремы 2 последовательность S_{mn} имеет только один конечный частичный предел, т. е. $\lim\limits_{m,\, n\to\infty} S_{mn} = S$.

Лемма 1. *Пусть частные суммы ряда (1) удовлетворяют условиям*

$$\overline{\lim_{k,\, m,\, n\to\infty}} |S_{mn} - S_{mn_k}| = r < \infty, \quad \overline{\lim_{k,\, m,\, n\to\infty}} |S_{mn} - S_{m_k n}| = r < \infty; \tag{11}$$

$$1 < \frac{Q_n}{Q_{n_k}} \to 1 \qquad 1 < \frac{P_m}{P_{m_k}} \to 1$$

или

$$\overline{\lim_{k,\, m,\, n\to\infty}} |S_{mn_k} - S_{mn}| = r < \infty, \quad \overline{\lim_{k,\, m,\, n\to\infty}} |S_{m_k n} - S_{mn}| = r < \infty; \tag{12}$$

$$1 < \frac{Q_{n_k}}{Q_n} \to 1 \qquad 1 < \frac{P_{m_k}}{P_m} \to 1$$

или

$$\overline{\lim_{k,\, m,\, n\to\infty}} |S_{mn} - S_{mn_k}| = r < \infty, \quad \overline{\lim_{k,\, m,\, n\to\infty}} |S_{m_k n} - S_{mn}| = r < \infty; \tag{13}$$

$$1 < \frac{Q_n}{Q_{n_k}} \to 1 \qquad 1 < \frac{P_{m_k}}{P_m} \to 1$$

или

$$\overline{\lim_{k,\, m,\, n\to\infty}} |S_{mn_k} - S_{mn}| = r < \infty, \quad \overline{\lim_{k,\, m,\, n\to\infty}} |S_{mn} - S_{m_k n}| = r < \infty, \tag{14}$$

$$1 < \frac{Q_{n_k}}{Q_n} \to 1 \qquad 1 < \frac{P_m}{P_{m_k}} \to 1$$

где m_k *и* n_k — *заданные возрастающие последовательности натуральных чисел. Тогда каждый круг* K_r $(|z - a| \leqslant r)$ *радиуса* r *с центром в точке* a, *являющейся конечным частичным пределом подпоследовательности* $S_{m_k n_k}$, *представляет собой* $(\overline{R}, p, q)$-*множество последовательности* S_{mn}. *Если бесконечно удаленная точка является частичным пределом подпоследовательности* $S_{m_k n_k}$, *то она будет бесконечно удаленной* $(\overline{R}, p, q)$-*точкой последовательности* S_{mn}.

Доказательство. Из соотношений (11) при $m = m_k$, $n = n_k$ соответственно получим

$$\overline{\lim_{k,\, m,\, n\to\infty}} |S_{m_k n} - S_{m_k n_k}| = r' \leqslant r < \infty, \quad \overline{\lim_{k,\, m,\, n\to\infty}} |S_{m n_k} - S_{m_k n_k}| = r'' \leqslant r < \infty. \tag{11'}$$

$$1 < \frac{Q_n}{Q_{n_k}} \to 1 \qquad\qquad 1 < \frac{P_m}{P_{m_k}} \to 1$$

Пусть a — конечный частичный предел подпоследовательности $S_{m_k n_k}$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и последовательность $S_{p_k q_k}$, сходящуюся к a при $k \to \infty$. Можем считать, что все $S_{p_k q_k} \in K_{\frac{\varepsilon}{4}}\left(|z-a| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\right)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Обозначим через $S_{p_k q'_k}$ первую после $S_{p_k q_k}$ частную сумму в строке p_k, не принадлежащую кругу $K_{r+\frac{\varepsilon}{2}}\left(|z-a| \leqslant r + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Если такая сумма существует для каждого k, то

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{Q_{q'_k} - 1}{Q_{q_k}} = \mu_1 > 1. \tag{15}$$

Если бы это было не так, то нашлась бы подпоследовательность $\frac{Q_{q'_{k_i}}}{Q_{q_{k_i}}} \to 1$ $(i \to \infty)$ и по первому из соотношений (11′) имели бы

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} |S_{p_{k_i} q'_{k_i}} - S_{p_{k_i} q_{k_i}}| \leqslant r,$$

$$1 < \frac{Q_{q'_{k_i}}}{Q_{q_{k_i}}} \to 1,$$

что противоречит неравенствам

$$|S_{p_{k_i} q'_{k_i}} - S_{p_{k_i} q_{k_i}}| > r + \frac{\varepsilon}{4} \; (i = 1, 2, \ldots),$$

справедливость которых следует из построения последовательности $S_{p_k q'_k}$. Если суммы $S_{p_k q'_k}$ не существует для некоторого k, т. е. $S_{p_k, j} \in K_{r+\frac{\varepsilon}{2}} \times \left(|z-a| \leqslant r + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ для $q_k \leqslant j < \infty$, то за $S_{p_k q'_k}$ возьмем любую сумму $S_{p_k q'_k}$, для которой $\frac{Q_{q'_k - 1}}{Q_{q_k}} \geqslant 2$. Следовательно, $S_{p_k, j} \in K_{r+\frac{\varepsilon}{2}}\left(|z-a| \leqslant r + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ для $q_k \leqslant j \leqslant q'_k - 1$, причем

$$\frac{Q_{q'_k - 1}}{Q_{q_k}} \geqslant \mu'_1 > 1, \quad 1 < \mu'_1 \leqslant \min\{\mu_1, 2\}, \; k \geqslant N_1(\varepsilon).$$

Обозначим через $S_{p'_k q_k}$ первую после $S_{p_k q_k}$ частную сумму в столбце q_k, которая не принадлежит кругу $K_{r+\frac{\varepsilon}{2}}\left(|z-a| \leqslant r + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Аналогично доказывается, что

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{P_{p'_k - 1}}{P_{p_k}} = \mu_2 > 1.$$

Если сумма $S_{p'_k q_k}$ не существует для некоторого k, т. е. $S_{i, q_k} \in K_{r+\frac{\varepsilon}{2}} \times \times \left(|z-a| \leqslant r+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ для $p_k \leqslant i < \infty$, то за $S_{p'_k q_k}$ возьмем любую сумму, для которой $\frac{P_{p'_k-1}}{P_{p_k}} \geqslant 2$. Следовательно, $S_{i, q_k} \in K_{r+\frac{\varepsilon}{2}}\left(|z-a| \leqslant r+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ для $p_k \leqslant i \leqslant p'_k - 1$, причем

$$\frac{P_{p'_k-1}}{P_{p_k}} \geqslant \mu'_2 > 1, \quad 1 < \mu'_2 \leqslant \min\{\mu_2, 2\}, \quad k > N_2(\varepsilon).$$

Рассмотрим последовательность прямоугольников

$$\Delta_k\{p_k, p'_k-1; \quad q_k, q'_k-1\},$$

$$\frac{P_{p'_k-1}}{P_{p_k}} \geqslant \mu > 1, \quad \frac{Q_{q'_k-1}}{Q_{q_k}} \geqslant \mu > 1, \tag{16}$$

где $1 < \mu = \min\{\mu'_1, \mu'_2\}$, $k > N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), \quad N_2(\varepsilon)\}$. Возможны следующие случаи.

1. Существует подпоследовательность прямоугольников $\Delta_{k_i}(i = 1, 2, \ldots)$ такая, что для каждой пары индексов $(m, n) \in \Delta_{ki}$ имеет место $S_{mn} \in K_{r+\varepsilon} \times \times (|z-a| \leqslant r+\varepsilon)$. Тогда из (16) следует, что круг $K_r(|z-a| \leqslant r)$ является $(\overline{R}, p, q)$-множеством последовательности S_{mn}.

2. Для каждого $\Delta_k(k > N)$ существует такая точка $(p^*_k, q^*_k) \in \Delta_k$, что $S_{p^*_k, q^*_k} \overline{\in} K_{r+\varepsilon}(|z-a| \leqslant r+\varepsilon)$. Таких точек может быть несколько. Через (p^*_k, q^*_k) обозначим ту из них, которая находится на наименьшем расстоянии от точки (p_k, q_k), а если и этих точек несколько, то обозначим через (p^*_k, q^*_k) ту из них, которая находится на наименьшем расстоянии от точек строки p_k. Как и при доказательстве (15), можно показать, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{P_{p^*_k-1}}{P_{p_k}} = \mu^*_1 > 1, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{Q_{q^*_k-1}}{Q_{q_k}} = \mu^*_2 > 1. \tag{17}$$

Таким образом, $S_{mn} \in K_{r+\varepsilon}(|z-a| < r+\varepsilon)$ для $p_k \leqslant m \leqslant p^*_k - 1$, $q_k \leqslant n \leqslant \leqslant q^*_k - 1$, $k > N$. Отсюда и из (17) следует, что круг $K_r(|z-a| \leqslant r)$ является $(\overline{R}, p, q)$-множеством последовательности S_{mn}. Первая часть леммы доказана.

Пусть бесконечно удаленная точка является частичным пределом подпоследовательности $S_{m_k n_k}$. Тогда найдется подпоследовательность $S_{p_k q_k}$ такая, что $S_{p_k q_k} \to \infty$ $(k\to\infty)$ и $|S_{p_k q_k} - S_{p_{k+1} q_{k+1}}| > 9r+1$. Обозначим через $S_{p_k q'_k}$ первую после $S_{p_k q_k}$ частную сумму в строке p_k, которая не принадлежит кругу $Q_k(|z - S_{p_k q_k}| \leqslant 2r+1)$. Если такая сумма существует для каждого k, то

$$\lim_{k\to\infty} \frac{Q_{q'_k-1}}{Q_{q_k}} = \mu_3 > 1.$$

Если бы это было не так, то нашлась бы подпоследовательность $\frac{Q_{q'_{k_i}}}{Q_{q_{k_i}}} \to 1$ $(i\to\infty)$ и по первому из условий (11') имели бы

$$\varlimsup_{i \to \infty} | S_{p_{k_i} q'_{k_i}} - S_{p_{k_i} q_{k_i}} | \leqslant r,$$

что противоречит неравенствам

$$| S_{p_{k_i} q'_{k_i}} - S_{p_{k_i} q_{k_i}} | \geqslant 2r + 1 \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

справедливость которых следует из построения последовательности $S_{p_k q'_k}$. Если же для некоторого k $S_{p_k, j} \in Q_k (| z - S_{p_k q_k} | \leqslant 2r + 1)$ для $q_k \leqslant j < \infty$, то за $S_{p_k q'_k}$ возьмем любую частную сумму, для которой $\frac{Q_{q'_k - 1}}{Q_{q_k}} \geqslant 2$.

Следовательно, $S_{p_k, j} \in Q_k (| z - S_{p_k q_k} | \leqslant 2r + 1)$ для $q_k \leqslant j \leqslant q'_k - 1$, причем $\frac{Q_{q'_k - 1}}{Q_{q_k}} \geqslant \mu'_3$, где $1 < \mu'_3 \leqslant \min \{\mu_3, 2\}$, $k > N_1$. Обозначим через $S_{p'_k q_k}$ первую после $S_{p_k q_k}$ сумму в столбце q_k, которая не принадлежит кругу $Q_k (| z - S_{p_k q_k} | \leqslant 2r + 1)$. Как и выше, можно показать, что

$$\varliminf_{k \to \infty} \frac{P_{p'_k - 1}}{P_{p_k}} = \mu_4 > 1,$$

если сумма $S_{p'_k q_k}$ существует для каждого k. Если же для некоторого k $S_{i, q_k} \in Q_k (| z - S_{p_k q_k} | \leqslant 2r + 1)$ для $p_k \leqslant i < \infty$, то за $S_{p'_k q_k}$ возьмем любую сумму $S_{p'_k q_k}$, для которой $\frac{P_{p'_k - 1}}{P_{p_k}} \geqslant 2$. Следовательно, $S_{i q_k} \in Q_k$ для $p_k \leqslant i \leqslant p'_k - 1$, причем

$$\frac{P_{p'_k - 1}}{P_{p_k}} \geqslant \mu'_4 > 1, \quad 1 < \mu'_4 \leqslant \min \{\mu_4, 2\}, \quad k > N_2.$$

Рассмотрев последовательность прямоугольников

$$\Delta_k \{p_k, p'_k - 1; \quad q_k, p'_k - 1\}, \quad k > N = \max \{N_1, N_2\},$$

$$\frac{P_{p'_k - 1}}{P_{p_k}} \geqslant \mu > 1, \quad \frac{Q_{q'_k - 1}}{Q_{q_k}} \geqslant \mu > 1, \quad 1 < \mu = \min \{\mu'_3, \mu'_4\},$$

заканчиваем доказательство второй части леммы так же, как и доказательство первой ее части. Аналогично можно показать, что лемма 1 справедлива при выполнении каждого из условий (12)—(14).

Следствие 1. *Каждый частичный предел, конечный или бесконечный подпоследовательности $S_{m_k n_k}$ частичных сумм ряда (1), где m_k и n_k — заданные возрастающие последовательности натуральных чисел, при выполнении одного из условий (11)—(14) при $r = 0$ является $(\overline{R}, p, q)$-точкой последовательности S_{mn}.*

Следствие 2. *Каждый частичный предел, конечный или бесконечный последовательности частичных сумм S_{mn} ряда (1) при выполнении условий*

$$\lim_{m, n, n' \to \infty} (S_{mn'} - S_{mn}) = 0, \qquad \lim_{m, m', n \to \infty} (S_{m'n} - S_{mn}) = 0 \tag{18}$$

$$1 < \frac{Q_{n'}}{Q_n} \to 1 \qquad\qquad 1 < \frac{P_{m'}}{P_m} \to 1$$

является $(\overline{R}, p, q)$-точкой последовательности S_{mn}. Это следствие получается из следствия 1 при $m_k = k$, $n_k = k$, $m = m'$, $n = n'$, $k = 1, 2, \ldots$.

Лемма 2. Если члены ряда (1) удовлетворяют условию $a_{mn}=0$ для $(m, n)\neq(m_k n_k)$, причем

$$\frac{P_{m_{k+1}}}{P_{m_k}}\geqslant\mu>1,\qquad \frac{Q_{n_{k+1}}}{Q_{n_k}}\geqslant\mu>1\quad(k=1,\ 2,\ \ldots),\tag{19}$$

где число $\mu>1$ и возрастающие последовательности m_k и n_k наперед заданы, то каждый частичный предел, конечный или бесконечный, последовательности S_{mn} является $(\overline{R},\ p,\ q)$-точкой этой последовательности.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что

$$S_{mn}=S_{m_k n_k}\ \text{при}\ m_k\leqslant m<m_{k+1},\quad n_k\leqslant n<n_{k+1}.$$

Пусть точка a — частичный предел последовательности $S_{m_k n_k}$. Тогда найдется подпоследовательность $S_{m_{k_\nu} n_{k_\nu}}\to a$ при $\nu\to\infty$. Можем считать, что все $S_{m_{k_\nu} n_{k_\nu}}\in K_\varepsilon\,(|z-a|\leqslant\varepsilon)$. Тогда для $(m,\ n)\in\Delta_{k_\nu}$ $\{m_{k_\nu},\ m_{k_\nu+1}-1;\ n_{k_\nu},\ n_{k_\nu+1}-1\}$ $(\nu=1,\ 2,\ \ldots)$ имеем $S_{mn}\in K_\varepsilon\,(|z-a|\leqslant\varepsilon)$. Следовательно, точка a является $(\overline{R},\ p,\ q)$-точкой последовательности S_{mn}.

Пусть бесконечно удаленная точка представляет собой частичный предел последовательности $S_{m_k k_k}$. Тогда найдется подпоследовательность

$$S_{m_{k_\nu} n_{k_\nu}}\to\infty\quad(\nu\to\infty).\tag{20}$$

Для $(m,\ n)\in\Delta_{k_\nu}$ $(\nu=1,\ 2,\ \ldots)$ имеет место соотношение

$$S_{mn}\in Q_\nu\,(|z-S_{m_{k_\nu} n_{k_\nu}}|\leqslant 1).$$

Отсюда и из (19) и (20) следует, что бесконечно удаленная точка является $(\overline{R},\ p,\ q)$-точкой последовательности S_{mn}.

Теорема 4. *Если ряд (1) суммируется $(\overline{R},\ p_m,\ q_n)$-методом к числу S и его частные суммы S_{mn} удовлетворяют одному из условий (11)—(14) при $r=0$, где m_k и n_k — заданные возрастающие последовательности натуральных чисел, то $\lim\limits_{k\to\infty} S_{m_k n_k}=S$.*

Теорема 4 следует из теоремы 3 и следствия 1 леммы 1.

Теорема 5. *Если ряд (1) суммируется $(\overline{R},\ p_m,\ q_n)$-методом к числу S и его частные суммы S_{mn} удовлетворяют условиям (18), то ряд (1) сходится к числу S.*

Теорема 5 следует из теоремы 2 и следствия 2 леммы 1.

Теорема 6. *Если ряд (1) суммируется $(\overline{R},\ p_m,\ q_n)$-методом к числу S и его члены удовлетворяют условию $a_{mn}=0$ для $(m,\ n)\neq(m_k,\ n_k)$, причем $\frac{P_{m_{k+1}}}{P_{m_k}}\geqslant\mu>1$, $\frac{Q_{n_{k+1}}}{Q_{n_k}}\geqslant\mu>1$ $(k=1,2,\ldots)$, где число $\mu>1$ и m_k и n_k — заданные возрастающие последовательности натуральных чисел, то ряд (1) сходится к числу S.*

Теорема 6 следует из теоремы 2 и леммы 2. Ряд (1) называется суммируемым к числу S методом логарифмических средних ([4], стр. 397), если

$$\lim_{m,\,n\to\infty}\frac{1}{\ln(m+1)\ln(n+1)}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\frac{S_{ij}}{(i+1)(j+1)}=S.$$

Если $p_m=\dfrac{1}{m+1}$, $q_n=\dfrac{1}{n+1}$ $(m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, то

$$\left(\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j+1}\right)^{-1}\sim\frac{1}{\ln(m+1)\ln(n+1)}\;(m,\;n\to\infty)$$

и, следовательно, $\left(\overline{R},\;\frac{1}{m+1},\;\frac{1}{n+1}\right)$-метод эквивалентен методу логарифмических средних суммирования двойных рядов. Условие (2) в этом случае в определении $(\overline{R},\;p,\;q)$-множества будет иметь вид

$$\frac{\ln m'_k}{\ln m_k}\geqslant\mu(\varepsilon)>1,\quad\frac{\ln n'_k}{\ln n_k}\geqslant\mu(\varepsilon)>1\quad(k=1,\;2,\;\ldots).$$

Отметим некоторые тауберовы теоремы для метода логарифмических средних суммирования двойных рядов.

Частным случаем теоремы 4 является

Теорема 7. *Если ряд (1) суммируется к числу S методом логарифмических средних и его частные суммы удовлетворяют условиям:*

$$\lim_{k,\,m,\,n\to\infty}(S_{mn}-S_{mn_k})=0,\quad\lim_{k,\,m,\,n\to\infty}(S_{mn}-S_{m_kn})=0,$$

$$1<\frac{\ln n}{\ln n_k}\to 1\qquad\qquad 1<\frac{\ln m}{\ln m_k}\to 1$$

или

$$\lim_{k,\,m,\,n\to\infty}(S_{m_kn}-S_{mn})=0,\quad\lim_{k,\,m,\,n\to\infty}(S_{mn_k}-S_{mn})=0,$$

$$1<\frac{\ln m_k}{\ln m}\to 1\qquad\qquad 1<\frac{\ln n_k}{\ln n}\to 1$$

или

$$\lim_{k,\,m,\,n\to\infty}(S_{mn}-S_{mn_k})=0,\quad\lim_{k,\,m,\,n\to\infty}(S_{m_kn}-S_{mn})=0,$$

$$1<\frac{\ln n}{\ln n_k}\to 1\qquad\qquad 1<\frac{\ln m_k}{\ln m}\to 1$$

или

$$\lim_{k,\,m,\,n\to\infty}(S_{mn}-S_{m_kn})=0,\quad\lim_{k,\,m,\,n\to\infty}(S_{mn_k}-S_{mn})=0,$$

$$1<\frac{\ln m}{\ln m_k}\to 1\qquad\qquad 1<\frac{\ln n_k}{\ln n}\to 1$$

где m_k и n_k — заданные возрастающие последовательности натуральных чисел, то $\lim\limits_{k\to\infty}S_{m_kn_k}=S$.

Частным случаем теоремы 5 является

Теорема 8. *Если ряд (1) суммируется методом логарифмических средних к числу S и его частные суммы S_{mn} удовлетворяют условиям*

$$\lim_{m,\,n,\,n'\to\infty}(S_{mn'}-S_{mn})=0,\quad\lim_{m,\,m',\,n\to\infty}(S_{m'n}-S_{mn})=0,\qquad(21)$$

$$1<\frac{\ln n'}{\ln n}\to 1\qquad\qquad 1<\frac{\ln m'}{\ln m}\to 1$$

то ряд (1) сходится к числу S.

Следствие. *Если ряд (1) суммируется методом логарифмических средних к числу S и члены ряда удовлетворяют условию*

$$|a_{mn}|\leqslant\frac{M}{(m+1)(n+1)[\ln^2(m+1)+\ln^2(n+1)]},\quad M>0,\qquad(22)$$

то ряд (1) сходится к числу S.

Доказательство. При выполнении условия (22) будут иметь место соотношения (21). Действительно,

$$| S_{mn'} - S_{mn} | = \left| \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=n+1}^{n'} a_{ij} \right| \leqslant M \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=n+1}^{n'} \times$$

$$\times \frac{1}{(i+1)(j+1)[\ln^2(i+1)+\ln^2(j+1)]} \leqslant$$

$$\leqslant M \left(\sum_{j=n+1}^{n'} \frac{1}{(j+1)\ln n} + \sum_{j=n+1}^{n'} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(i+1)(j+1)[\ln^2(i+1)+\ln^2(j+1)]} \right) \leqslant$$

$$\leqslant M \left(\sum_{j=n+1}^{n'} \frac{1}{(j+1)\ln n} + \sum_{j=n+1}^{n'} \frac{1}{j+1} \int_0^m \frac{1}{(x+1)[\ln^2(x+1)+\ln^2 n]} \right) \leqslant$$

$$\leqslant M \left(\sum_{j=n+1}^{n'} \frac{1}{(j+1)\ln n} + \sum_{j=n+1}^{n'} \frac{1}{(j+1)\ln n} \operatorname{arctg} \frac{\ln(x+1)}{\ln n} \Bigg|_0^m \right) <$$

$$< M\pi \frac{1}{\ln n} \sum_{j=n+1}^{n'} \frac{1}{j} = M\pi \frac{1}{\ln n} (\ln n' - \ln n + 0(1)) =$$

$$= M\pi \left(\frac{\ln n'}{\ln n} - 1 + 0(1) \right) \to 0 \text{ при } m, n \to \infty, 1 < \frac{\ln n'}{\ln n} \to 1$$

и первое из соотношений (21) выполнено. Аналогично доказывается выполнение второго из соотношений (21).

Частным случаем теоремы 6 является

Теорема 9. *Если ряд (1) суммируется методом логарифмических средних к числу S и его члены удовлетворяют условию $a_{mn} = 0$ для $(m, n) \neq (m_k n_k)$, причем*

$$\frac{\ln m_{k+1}}{\ln m_k} \geqslant \mu > 1, \quad \frac{\ln n_{k+1}}{\ln n_k} \geqslant \mu > 1 \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

где число $\mu > 1$ и m_k и n_k — заданные возрастающие последовательности натуральных чисел, то ряд (1) сходится к числу S.

В заключение выражаю благодарность профессору Н. А. Давыдову за руководство при написании данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ш. С. Пичхадзе. $R_{p,q}'$-суммируемость двойных рядов. Тр. груз. ин-та субтроп. х-ва, вып. 9—10, 1965, 496—499.

2. Н. А. Давыдов. Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов. «Матем. сб.», 38(40), 1956, 509—524.

3. Г. Полиа, Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа. Гостехиздат, 1937.

4. Ш. С. Пичхадзе. Взаимоотношение между методами суммирования двойных рядов (C, I, I) и L. Тр. груз. ин-та субтроп. х-ва, 7—8, 1963, 397—400.

Поступила 20 июля 1971 г.