

ІНСТИТУТ ЯДЕРНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ НАН УКРАЇНИ
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В.Н. КАРАЗІНА

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Тихий Антон Володимирович

УДК 533.9

ДИСЕРТАЦІЯ
ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ ТА ТРАНСПОРТ НАДТЕПЛОВИХ
ІОНІВ У КВАЗИІЗОДИНАМІЧНИХ СТЕЛАРАТОРАХ

01.04.08 — фізика плазми

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук.
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. _____ А. В. Тихий

Науковий керівник: **Колесниченко Ярослав Іванович**,
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2018

АНОТАЦІЯ

Тихий А. В. Хвильові процеси та транспорт надтеплових іонів у квазіізодинамічних стелараторах. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.08 «фізика плазми». — Інститут ядерних досліджень НАН України; Харківський Національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків, 2018.

У дисертації представлено результати теоретичних досліджень дифузійного транспорту надтеплових іонів та збудження і згасання альфвенових власних мод у стелараторах. Розвинену теорію застосовано до пояснення експериментальних даних, отриманих на стелараторах Wendelstein 7-X (Німеччина) та LHD (Японія), а також для прогнозних обчислень для реактора-сталаратора Helias (Німеччина).

Вперше показано можливість збудження альфвенових власних мод градієнтом температури іонів в неосесиметричних системах. Розвинено теорію, з якої випливає, що дестабілізуючий вплив просторової неоднорідності основної плазми з максвеловим розподілом швидкостей на альфвенові власні моди в тороїдальних системах може перебороти їх згасання через механізм Ландау. Якщо при цьому інші механізми згасання є слабкими, збуджуватиметься альфвенова нестійкість. Отримано необхідну умову дестабілізації моди та показано, що дестабілізуючий вплив зростає з ростом відношення резонансної швидкості до теплової, коли це відношення більше одиниці. Показано, що за певних умов збуджувані градієнтом температури іонів нестійкості можуть приводити до доцентрового просто-

рового каналювання енергії – потужність, поглинута модою у нестійкій області, нагріває плазму в стійкій області, розташованій при менших радіусах. Температурно-градієнтна нестійкість може впливати на робочі показники плазми у Wendelstein 7-X, а також може відігравати роль в інших стелараторах, зокрема у LHD, TJ-II, H-1, U-3M. Зокрема показано, що описаний механізм може приводити до збудження альфвенової моди з частотою $\omega \sim 200$ кГц на Wendelstein 7-X через резонанс на гвинтовій фур'є-гармонії рівноважного магнітного поля з модовими числами $\mu = \nu = 1$, яке супроводжуватиметься доцентровим просторовим каналюванням енергії іонів. Збудження такої моди може пояснити тривалі високочастотні осциляції, що спостерігалися в експерименті [Windisch et al., Plasma Phys. Control. Fusion. 59 (2017) 105002].

Виявлено властивості перенесення енергії поперек магнітного поля власними альфвеновими модами. Показано, що дестабілізація власних мод у плазмі обмеженого об'єму супроводжується генерацією радіального потоку енергії, який може бути спрямований не лише від центру до периферії, але і з периферії до центру плазми. Поперечний потік виникає внаслідок порушення балансу між доцентровим та відцентровим потоками енергії, пов'язаними із біжучими хвилями, з яких складається мода. Потік енергії можна розділити на дві частини, одна з яких постачає енергію, що переходить у зростання амплітуди моди в областях, де мода збуджується слабо або взагалі не збуджується, а інша нагріває плазму в областях, де домінує згасання, і відповідає за просторове каналювання. Знайдено, що густина потоку енергії сильно залежить від температури іонів: наприклад, для пов'язаної з еліптичністю альфвенової власної моди (EAE) у Wendelstein 7-X при незмінній амплітуді моди збільшення температури іонів у центрі плазми з 2 кеВ до 10 кеВ викликає збільшення потоку енергії через поверхню максимального інкременту нестійкості майже на два порядки.

Розвинено теорію стохастичної дифузії надтеплових іонів та запропоно-

вано метод послаблення її негативного впливу в оптимізованих стелараторах. Показано, що стохастична дифузія перехідних частинок у стелараторах типу Wendelstein є у кілька разів сильнішою, ніж передбачалося раніше [Beidler et al., Phys. Plasmas 8 (2001) 2731], завдяки створюваній магнітним полем асиметрії між локально пролітними частинками із протилежними знаками поздовжньої швидкості. Запропоновано метод послаблення негативного впливу стохастичної дифузії на утримання надтеплових іонів шляхом замикання сепаратрис між локально пролітними та локально захопленими орбітами всередині плазми: якщо для частинки з певним пітч-кутом дрейфові орбіти та сепаратриса замкнені всередині плазми, така частинка не втрачатиметься з плазми за час порядку часу стохастичної дифузії. Показано, що для стелараторів типу Wendelstein діамagnetизм плазми допомагає замкнути сепаратрис. Запропоновано використовувати замкнення сепаратрис всередині плазми у якості додаткового швидкого критерію оптимізації стелараторних конфігурацій.

Виявлено важливу роль електричного поля для утримання надтеплових іонів у стелараторах. Знайдено, що присутність від'ємного електричного поля сприяє утриманню локально захоплених іонів. Іони утримуються електричним полем, якщо їх енергія не перевищує певної величини. Електричне поле, локалізоване у кільці (тобто у певному інтервалі за радіусом) може відігравати роль транспортного бар'єра для надтеплових іонів. Додатне електричне поле погіршує утримання локально захоплених іонів, крім випадку дуже великих значень напруженості поля відносно енергії частинок. Шкідливий вплив додатнього електричного поля є особливо сильним, коли частота викликаного ним жорсткого обертання плазми близька до певних резонансних значень. Запропоновано використання додатнього радіального електричного поля із відповідно підібраним профілем для видалення гелієвого попелу у реакторі Helias. Для цього можуть підбиратися відповідні режими нагрівання плазми. Також показано, що від'ємне радіальне

електричне поле допомагає замкнути сепаратрисы перехідних надтеплових іонів, що зменшує їх втрати від стохастичної дифузії, а локалізовані потенціальні бар'єри поліпшують форму сепаратрис, коли область від'ємного поля лежить всередині області додатнього поля.

Вперше виявлено сильний стабілізуючий вплив на альфвенові моди у стелараторах механізму згасання Ландау, яке відіграє важливу роль завдяки існуванню у гвинтових пристроях неосесиметричних резонансів. При низькому тиску плазми, згасання Ландау має сильний стабілізуючий вплив на альфвенові власні моди, пов'язаних із тороїдальністю (ТАЕ) та на ізомонні моди у стелараторі Wendelstein 7-X. При високому тиску плазми, притаманному реактору Helias, згасання Ландау на іонах може домінувати не лише для ТАЕ, а й для альфвенових власних мод, пов'язаних із гвинтовими та дзеркальними гармоніками магнітного поля (НАЕ та МАЕ мод).

Ключові слова: стеларатор, надтеплові іони, стохастична дифузія, альфвенові власні моди, нестійкості плазми.

Tykhyy A. V. Wave processes and transport of suprathermal ions in quasi-isodynamic stellarators. — Qualification scientific work in the form of manuscript.

Thesis for candidate degree in physical and mathematical sciences, speciality 01.04.08 “Plasma physics”. — Institute for Nuclear Research; Vasyl Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, 2018.

This dissertation consists of the results of theoretical investigation of diffusional transport of suprathermal ions and of the destabilization and damping of Alfvén eigenmodes in stellarators. The developed theory is applied to experimental data from the stellarators Wendelstein 7-X (Germany) and LHD (Japan), and is also used to derive predictions for the Helias reactor (Germany).

It is demonstrated for the first time that Alfvén eigenmodes can be destabilized by ion temperature gradient in non-axisymmetrical systems. From the

developed theory it follows that the destabilizing influence of spatial inhomogeneity of bulk plasma with a Maxwellian velocity distribution on Alfvén eigenmodes in toroidal systems can overcome their damping via the Landau mechanism. If other damping mechanisms are weak, Alfvén modes may be destabilized. A necessary condition of mode destabilization is derived. It is shown that the destabilizing influence grows with the increase of the resonance velocity relative to the thermal velocity, when the former is larger than the latter. It is shown that in certain conditions instabilities driven by an ion temperature gradient may lead to inward spatial channeling of energy – energy absorbed by the mode in the unstable region heats plasma in the damped region located at smaller radii. Temperature gradient-driven instability may influence plasma parameters in Wendelstein 7-X, and can play a role in other stellarators, such as LHD, TJ-II, H-1, U-3M. In particular, it is shown that this mechanism may lead to the destabilization of an Alfvén eigenmode with frequency $\omega \sim 200$ kHz in Wendelstein 7-X through a resonance with the helical harmonic of the equilibrium magnetic field with mode numbers $\mu = \nu = 1$, accompanied by inward spatial channeling of ion energy. The destabilization of such a mode may explain long-lasting high-frequency oscillations which have been observed experimentally [Windisch et al., Plasma Phys. Control. Fusion. 59 (2017) 105002].

The properties of energy transfer across the magnetic field by Alfvén eigenmodes are elucidated. It is shown that destabilization of eigenmodes in a limited plasma is accompanied by the generation of a radial energy flux, which can be directed not only towards plasma periphery, but also from the periphery to the center of the plasma. The transverse flux appears due to a loss of balance between the inward and outward energy fluxes associated with the traveling waves that compose the mode. The energy flux may be split in two parts, one of which supplies the energy that is converted into growing mode amplitude and is more important in regions where the mode

is weakly driven or not driven at all, and the other part which heats the plasma in regions where damping dominates. This second part is responsible for spatial channeling. It is found that energy flux density strongly depends on ion temperature: for instance, for an ellipticity-induced EAE mode in Wendelstein 7-X with a fixed amplitude, an increase of ion temperature in plasma center from 2 keV to 10 keV leads to an almost two order of magnitude increase of energy flux through the surface of maximum instability drive.

A theory of stochastic diffusion of suprathermal ions is developed and a method of mitigation of its harmful influence in optimized stellarators is proposed. It is shown that stochastic diffusion of transitioning particles in Wendelstein-type stellarators is several times stronger than previously predicted [Beidler et al., *Phys. Plasmas* 8 (2001) 2731], due to the asymmetry between locally passing particles with opposite signs of parallel velocity created by the magnetic field. A method of mitigation of the harmful influence of stochastic diffusion on the confinement of suprathermal ions via the closure of separatrices between locally trapped and locally passing particles inside the plasma volume is proposed: if both the drift orbits for particles with a certain pitch angle and the separatrix are closed inside the plasma, such particles will not be lost from the plasma on the stochastic diffusion timescale. It is shown that in Wendelstein-type stellarators plasma diamagnetism helps to close the separatrices. The closure of the separatrices inside the plasma is proposed as an additional fast criterion in stellarator configuration optimization.

The importance of radial electric fields for suprathermal ion confinement in stellarators is elucidated. It is found that the presence of negative electric field improves the confinement of locally trapped ions, if their energy does not exceed a certain value. An electric field localized in a ring (i.e. between certain radii) can function as a transport barrier for suprathermal ions, Positive electric field degrades the confinement of locally trapped ions, unless the magnitude of the field is very large relative to ion energy. The harmful effects

of positive electric field is especially strong if the frequency of rigid plasma rotation corresponding to the field is close to certain resonance values. A method of using positive radial electric fields is proposed to remove helium ash in a Helias reactor. Appropriate plasma heating regimes may be selected to implement this suggestion. It is also shown that a negative radial electric field helps to close the separatrices of transitioning suprathermal ions, which reduces their losses from stochastic diffusion, and that localized potential barriers improve the shape of the separatrices if the negative field region lies closer to the center than the positive field region.

It is shown for the first time that the Landau damping mechanism exerts strong stabilizing influence on Alfvén modes in stellarators due to the existence of non-axisymmetric resonances specific to helical devices. When plasma pressure is low, Landau damping strongly stabilizes TAE modes and isomon modes in Wendelstein 7-X. At higher plasma pressures projected for the Helias reactor, Landau damping on bulk ions may dominate not only for TAE modes, but also for helicity- and mirror-induced Alfvén eigenmodes.

Key words: stellarator, suprathermal ions, stochastic diffusion, Alfvén eigenmodes, plasma instabilities.

Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації.

1. Tykhyy A., Yakovenko Y. V. Invariants of fast ion motion in stellarators // Ukrainian Journal of Physics. — 2006. — Vol. 51, no. 11-12. — P. 1077–1082.
2. Effects of the radial electric field on the confinement of trapped fast ions in the Wendelstein 7-X and Helias reactor / Ya I Kolesnichenko, VV Lutsenko, AV Tykhyy et al. // Physics of Plasmas. — 2006. — Vol. 13, no. 7. — P. 072504.

3. Mitigation of stochastic diffusion losses in optimized stellarators / AV Tykhyy, Ya I Kolesnichenko, Yu V Yakovenko et al. // Plasma Physics and Controlled Fusion. — 2007. — Vol. 49, no. 6. — P. 703.
4. Kolesnichenko Y. I., Tykhyy A. V. Landau damping of Alfvénic modes in stellarators // Plasma Phys. Control. Fusion. — 2018. — Vol. 60. — P. 125004.
5. Kolesnichenko Y. I., Tykhyy A. V. Temperature gradient driven Alfvén instability producing inward energy flux in stellarators // Physics Letters A. — 2018. — Vol. 382, no. 37. — P. 2689–2692.
6. Kolesnichenko Y. I., Tykhyy A. V. Radial energy flux during destabilized Alfvén eigenmodes // Physics of Plasmas. — 2018. — Vol. 25. — P. 102507.
7. Tykhyy A. Стохастична дифузія енергійних йонів у стелараторах типу Wendelstein // Ukrainian Journal of Physics. — 2018. — Т. 63, № 6. — С. 495–505.

Наукові праці, які засвідчують апробацію результатів дисертації.

8. Novel physics involved in interpretation of Alfvénic activity accompanied by thermal crashes in W7-AS / Ya I Kolesnichenko, VV Lutsenko, A Weller et al. // 15th International Stellarator Workshop. — 2005.
9. Analysis and interpretation of observations of Alfvénic activity in Wendelstein 7-AS / Ya I Kolesnichenko, VV Lutsenko, A Weller et al. // 32nd EPS Plasma Physics Conference combined with the 8th International Workshop on Fast Ignition of Fusion Targets / European Physical Society. — 2005.
10. Confinement of fast ions in the presence of the radial electric field in Wendelstein-line stellarators / Ya I Kolesnichenko, VV Lutsenko, AV Tykhyy et al. // 13th International Congress on Plasma Physics. — 2006.

11. Yakovenko Y. V., Tykhyy A., Werner A. Mitigation of stochastic diffusion losses in optimized stellarators // 13th International Congress on Plasma Physics. — 2006.
12. Effect of the radial electric field on the confinement of fast ions in optimized stellarators / VV Lutsenko, Ya I Kolesnichenko, A Weller et al. // 10th IAEA Technical Meeting on Energetic Particles in Magnetic Confinement Systems. — 2007.
13. Tykhyy A. Stochastic diffusion of energetic ions in Wendestein-type configurations // 11th IAEA Technical Meeting on Energetic Particles in Magnetic Confinement Systems. — 2009.
14. Tykhyy A. Stochastic diffusion of energetic ions in Wendelstein-type stellarators // 15th IAEA Technical Meeting on Energetic Particles in Magnetic Confinement Systems. — 2017.
15. Tykhyy A. V. Generation of inward energy flux by Alfvén eigenmodes // International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion. — Kharkiv, 2018.

ЗМІСТ

Вступ	14
Розділ 1. Безіткненнєвий транспорт надтеплових іонів у стелараторах	21
1.1. Адіабатичні інваріанти у аксіально-несиметричному магнітному полі	21
1.1.1. Вступ	21
1.1.2. Модель магнітного поля	24
1.1.3. Інваріанти пролітних частинок	27
1.1.4. Інваріанти захоплених частинок	28
1.1.5. Часова еволюція кутових змінних	31
1.1.6. Обговорення та висновки	32
1.2. Стохастична дифузія перехідних іонів	33
1.2.1. Вступ	33
1.2.2. Скорочений лагранжіан ведучого центру	35
1.2.3. Фазовий портрет руху захоплених іонів	36
1.2.4. Перетворення орбіт перехідних іонів	39
1.2.5. Перехід через сепаратрису у нелінійному маятнику .	42
1.2.6. Коефіцієнт дифузії	49
1.2.7. Стохастична дифузія у реакторі-стелараторі Helias .	54
1.2.8. Підсумки	55
Розділ 2. Вплив радіального електричного поля на надтеплові іони	56
2.1. Покращення утримання локально захоплених іонів	56
2.1.1. Вступ	56

2.1.2.	Баунс-усереднені рівняння та їх аналіз	58
2.1.3.	Орбіти надтеплових іонів у стелараторі Wendelstein 7-X	60
2.1.4.	Видалення попелу додатнім електричним полем у реакторі-стелараторі Helias	69
2.1.5.	Висновки	70
2.2.	Зменшення дифузійних втрат перехідних іонів	72
2.2.1.	Вступ	72
2.2.2.	Сепаратриси перехідних частинок за відсутності та наявності радіального електричного поля	72
2.2.3.	Замкнення сепаратрис перехідних частинок	74
2.2.4.	Зменшення області дифузійних втрат у стелараторі Wendelstein 7-X	79
2.2.5.	Висновки	82

Розділ 3. Ефекти неосесиметричних резонансів взаємодії частинка-хвиля у стелараторах 84

3.1.	Згасання Ландау альфвенових мод	84
3.1.1.	Вступ	84
3.1.2.	Аналіз резонансів між альфвеновими модами та пролітними частинками	86
3.1.3.	Виведення виразів для інкременту/декременту моди .	93
3.1.4.	Декременти згасання у стелараторі Wendelstein 7-X, реакторі-стелараторі Helias та стелараторі LHD . . .	104
3.1.5.	Підсумки та висновки	113
3.2.	Збудження температурно-градієнтної альфвенової нестійкості плазми	115
3.2.1.	Вступ	115
3.2.2.	Дестабілізація альфвенових власних мод градієнтом температури електронів та іонів	117

3.2.3.	Застосування теорії до експерименту з високочастотними коливаннями на стелараторі Wendelstein 7-X .	121
3.2.4.	Висновки	125
3.3.	Перенесення енергії МГД-модами поперек магнітного поля .	127
3.3.1.	Вступ	127
3.3.2.	Виведення та аналіз основних рівнянь	129
3.3.3.	Залежність потоку енергії від характеристик нестійкості плазми	134
3.3.4.	Висновки	139
	Висновки	142
	Список використаних джерел	147
	Додаток А. Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації	157
A.1.	Список публікацій здобувача за темою дисертації	157
A.2.	Відомості про апробацію результатів дисертації	159

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Останні роки позначилися прогресом на шляху до комерційного застосування термоядерної енергії. У 2015 році у Німеччині було завершено спорудження стеларатора Wendelstein 7-X – найбільшого у світі оптимізованого стеларатора. [1]

У Франції триває будівництво ITER, міжнародного реактора типу токамак. Кількома роками раніше було пройдено ключові рубежі на шляху до мети термоядерних досліджень. Зокрема, на токамаках JET (ЄС), TFTR (США), JT-60U (Японія) було досягнуто температуру плазми понад 100 мільйонів градусів, необхідну для комерційного застосування термоядерної енергії, та проведено експерименти зі справжнім термоядерним паливом – сумішшю дейтерію та тритію (JET, TFTR). [2]

Зростає роль міжнародної співпраці у термоядерних дослідженнях. Наразі зусилля термоядерних лабораторій ЄС об'єднані в рамках Консорціуму EUROfusion, до якого Україна нещодавно долучилась асоційованим членом. Опублікована Європейська дорожня карта до термоядерної електроенергії, згідно з якою термоядерні електростанції мають запрацювати на початку другої половини цього століття.

Перехід до термоядерної епохи дасть змогу забезпечити людство практично невичерпним джерелом енергії з мінімальним впливом на довкілля. З наближенням цієї епохи, проблема ціни виробленої енергії стає дедалі важливішою. Через це стають актуальними дослідження, спрямовані на оптимізацію реактора та поліпшення його характеристик.

Сучасний стан термоядерних досліджень характеризується проведенням широкого фронту робіт на термоядерних пристроях різних типів. Зокрема, крім токамаків, що лишаються лідерами з багатьох досягнутих пара-

метрів, значного прогресу досягнуто на стелараторах та сферичних торах (останні є рекордсменами з досягнутого параметра β (β – відношення тиску плазми до тиску магнітного поля)).

Останнім часом у термоядерних дослідженнях усе більша увага приділяється стелараторам — пристроям для магнітного утримання плазми, які, подібно до токамаків, мають тороїдальну топологію магнітного поля, але, на відміну від останніх, мають складну гвинтову форму. Основною перевагою стелараторів перед токамаками є те, що в них потрібна топологія магнітного поля утворюється без участі поздовжнього електричного струму плазми. Це, з одного боку, полегшує створення реактора, що працює неперервно, а з іншого боку, дає змогу подолати нестійкості, пов'язані з поздовжнім струмом плазми, включно з дуже небезпечною нестійкістю зриву.

В усіх названих системах плазма містить надтеплові іони, що утворюються внаслідок інжекції нейтральних атомів, прискорення при ВЧ нагріванні плазми, а також внаслідок термоядерних реакцій. Поведінка надтеплових іонів суттєво впливає на характеристики плазми в усіх без винятку термоядерних пристроях; більше того, погане утримання продуктів термоядерної реакції - альфа частинок у традиційних стелараторах унеможливає їх використання як термоядерних реакторів, що стимулювало розвиток новітніх концепцій стелараторних систем (оптимізовані стеларатори, стеларатори з квазігвинтовою симетрією, стеларатори з квазіосьовою симетрією і т.п.). Тому вивченню фізичних процесів у плазмі з надтепловими іонами приділяється велика увага як теоретиків, так і експериментаторів у багатьох лабораторіях світу.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами. Дослідження, що увійшли до дисертаційної роботи, виконувалися в рамках тем Національної Академії наук України № 0104U003882

“Нестійкості плазми та транспорт іонів високих енергій у стелараторах, сферичних торах та токамаках” (2004-2006 рр.), № 0106U011414 “Колективні явища та транспортні процеси в плазмі тороїдальних систем” (2007-2011 рр.) та № 0116U002923 “Багаточастинкові процеси в термоядерних системах” (2017-2021 рр.), партнерського проекту УНТЦ, Інституту фізики плазми Макса Планка (Німеччина) та Інституту ядерних досліджень НАН України № Р-034d “Високоенергетичні іони в тороїдальних термоядерних пристроях”, спільного проекту УНТЦ та НАН України № 6392 “Збільшення потужності термоядерного реактора нерівноважними процесами у плазмі” (2017-2018 рр.), проекту “Явища, пов’язані з енергійними йонами, у токамаках та стелараторах” Цільової комплексної програми “Перспективні дослідження з фізики плазми, керованого термоядерного синтезу та плазмових технологій” НАН України (2017-2019 рр.) та проекту з альфвенових мод в стелараторах в рамках пакету робіт S2 (Stellarator Optimization: Theory, Development, Modelling and Engineering) консорціуму EUROfusion (2017-2018 рр.).

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є з’ясування особливостей транспорту надтеплових іонів у стелараторах, зокрема в оптимізованих (квазіізодинамічних) стелараторах типу Wendelstein, отримання умов збудження та згасання альфвенових нестійкостей у плазмі таких стелараторів, а також дослідження пов’язаного з цими нестійкостями перенесення енергії поперек магнітного поля.

Об’єкт дослідження – плазма з надтепловим іонами в оптимізованих стелараторах.

Предмет дослідження – стохастична дифузія надтеплових іонів та альфвенові власні моди.

Методи дослідження. У дисертації застосовуються відомі аналітичні та числові методи: лагранжевий та гамільтоновий формалізми класи-

чної механіки для аналізу руху заряджених частинок у неосесиметричних магнітних полях; результати теорії спеціальних функцій для знаходження адіабатичних інваріантів іонів; фур'є-аналіз для дослідження альфвенових власних коливань; методи Рунге-Кутта четвертого-п'ятого порядку точності для числового інтегрування баунс-усереднених орбіт іонів, для обчислення інкрементів/декрементів альфвенових власних мод та потоків енергії, що переносяться модами поперек магнітного поля.

Наукова новизна отриманих результатів.

1. Вперше показано можливість збудження альфвенових власних мод градієнтом температури іонів в неосесиметричних системах.
2. Запропоновано інтерпретацію експерименту на стелараторі Wendelstein 7-X, в якому спостерігалися довготривалі високочастотні коливання.
3. Вперше показано, що величина, напрямок та радіальний розподіл потоку енергії, що переноситься збудженими модами, залежить від інкременту нестійкості і взаємного розташування областей, де мода збуджується та згасає.
4. Вперше обчислено коефіцієнти стохастичної дифузії перехідних частинок у оптимізованих стелараторах з використанням реалістичної геометрії фазового простору частинок.
5. Вперше виявлено ключову роль механізму згасання Ландау у стабілізації тороїдальних альфвенових власних мод та ізомонних мод у стелараторах.

Практичне значення отриманих результатів. Праці, на основі яких написана дисертація, включають як теоретичні дослідження, так і застосування розвиненої теорії до конкретних термоядерних систем – стеларатора Wendelstein 7-X, реактора-стеларатора Helias та гвинтового пристрою LHD (Японія). Нижче подано перелік результатів, що мають практичне значення.

Побудована теорія збудження альфвенових нестійкостей плазми градієнтом іонної температури знайшла застосування для інтерпретації одного з перших експериментів на стелараторі Wendelstein 7-X.

Показано, що стохастична дифузія перехідних частинок у стелараторах типу Wendelstein та реакторі-стелараторі Helias є у кілька разів сильнішою, ніж передбачалося раніше, завдяки створюваній магнітним полем асиметрії між локально пролітними частинками із протилежними знаками поздовжньої швидкості.

Запропоновано метод послаблення негативного впливу стохастичної дифузії на утримання надтеплових іонів шляхом замикання сепаратрис між локально пролітними та локально захопленими орбітами всередині плазми.

Показано можливість використання від'ємного радіального електричного поля для поліпшення утримання локально захоплених надтеплових іонів.

Результати, отримані в дисертації, можуть бути використані в дослідженнях, що проводяться у НЦ “Харківський фізико-технічний інститут” НАН України, Інституті ядерних досліджень НАН України, Інституті теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, Харківському національному університеті ім. В. Н. Каразіна. Вони також можуть бути використаними у Інституті фізики плазми Макса Планка (Німеччина) та Національному інституті термоядерних досліджень (Японія).

Особистий внесок здобувача. Частину робіт, покладених в основу дисертації, виконано в співавторстві. Конкретний особистий внесок здобувача є таким. Робота [3] виконана здобувачем одноосібно. В роботі [4] здобувачем виконано всі викладки і виведення адіабатичних інваріантів пролітних і захоплених частинок, а також написана частина тексту. В роботі [5] здобувачеві належать виведення усереднених рівнянь руху частинок, числові розрахунки ліній рівня поздовжнього адіабатичного інваріанту та

впливу електричного поля на орбіти локально захоплених частинок. В роботі [6] здобувачеві належить ідея та оцінки поліпшення утримання перехідних частинок за рахунок замкнення сепаратиси всередині плазми. В роботах [7, 8, 9] здобувачеві належить створення числових кодів та виконання всіх числових розрахунків інкрементів/декрементів та потоків енергії поперек магнітного поля, а також участь у виведенні рівнянь та написанні тексту.

Апробація матеріалів дисертації. Результати дисертації доповідалися на 15-ій Міжнародній стелараторній конференції (Мадрид, Іспанія, 2005), 32-ій Конференції ЄФТ з фізики плазми (Тарагона, Іспанія, 2005), 13-му Міжнародному конгресі з фізики плазми (Київ, 2006), 10-ій (Клостер Зеон, Німеччина, 2007), 11-ій (Київ, 2009) та 15-ій (Принстон, США, 2017) Технічних конференціях МАГАТЕ з енергійних частинок у системах магнітного утримання, Міжнародній конференції та школі з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу (Харків, 2018), а також на щорічних наукових конференціях ІЯД у 2006, 2007, 2017 та 2018 рр.

Публікації. Крім 11 публікацій в тезах наведених вище конференцій, конгресів та нарад, результати дисертації опубліковані у 7 статтях у фахових журналах, що відповідають перелікам ВАК та включені в наукометричні бази Scopus і Web of Science. Наведені публікації повно відображають зміст дисертації.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку літератури. Повний обсяг дисертації складає 159 сторінок і 17 рисунків, розміщених на цих сторінках. Список використаних літературних джерел налічує 92 найменування на 10 сторінках.

Подяки. Автор щиро вдячний науковому керівникові – професору, доктору фізико-математичних наук Я.І. Колесниченку – за всебічну під-

тримку та повсякчасну увагу до роботи. Автор також щиро дякує співавторам, з якими було виконано частину робіт, що увійшли до дисертації, особливо докторам фізико-математичних наук В.В. Луценку та Ю.В. Яковенку, та співробітникам відділу теорії ядерного синтезу Інституту ядерних досліджень (Київ) за корисні дискусії.

РОЗДІЛ 1

БЕЗІТКНЕННЄВИЙ ТРАНСПОРТ НАДТЕПЛОВИХ ІОНІВ У СТЕЛАРАТОРАХ

1.1. Адіабатичні інваріанти у аксіально-несиметричному магнітному полі

1.1.1. Вступ. Однією з найважливіших задач для створення реакторних систем на базі стелараторів є аналіз руху швидких (надтеплових) іонів у пристрої та забезпечення потрібних властивостей цього руху. Швидкі іони утворюються в термоядерних пристроях при нагріванні плазми інжекцією нейтральних пучків та високочастотними полями, а також є продуктами термоядерних реакцій. Параметри плазми у найбільших сучасних стелараторах (а також у майбутніх реакторах) є такими, що при розгляді руху швидких іонів у багатьох випадках можна нехтувати зіткненнями й вважати його гамільтоновим. Проте, через складну геометрію стеларатора рух заряджених частинок у такому пристрої є дуже складним і, взагалі кажучи, не інтегрується.

Ефективним способом аналізу гамільтонових систем є застосування адіабатичних інваріантів. Як добре відомо [10], існування адіабатичного інваріанту системи пов'язане з наближеною періодичністю її руху, яка може інтерпретуватися як наявність у системі наближеної симетрії. Зокрема, рух частинок, захоплених у локальних мінімумах магнітного поля стеларатора (“локально захоплених частинок”) описується добре відомим поздовжнім адіабатичним інваріантом

$$I_{\parallel} = \frac{1}{2\pi} \oint ds M v_{\parallel}, \quad (1.1)$$

де ds — елемент довжини, M — маса частинки, v_{\parallel} — її поздовжня швидкість, а інтеграл береться вздовж силової лінії поміж точками відбиття частинки (цей інваріант було вперше запропоновано не у зв'язку зі стелараторними дослідженнями, див. [11]). Отже, наближеним циклом руху системи у цьому випадку є рух частинки вздовж силової лінії поміж точками відбиття (“баунс-рух”), а умовою застосовності цього інваріанту є малість відхилення частинки від силової лінії за один баунс-період, що накладає певне обмеження на енергію частинки. Інший адіабатичний інваріант руху частинок у стелараторах, який є придатним також для локально пролітних частинок (тобто, частинок, що мають достатньо велику поздовжню швидкість, щоб проходити локальні максимуми магнітного поля на певній ділянці траєкторії) було запропоновано в [12]:

$$I_* = \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi M v_{\parallel} \frac{B_{\varphi}}{B} - \sigma \frac{e}{cN} \psi_p, \quad (1.2)$$

де e — заряд частинки, φ — тороїдальна координата, B — магнітна індукція, B_{φ} — її тороїдальна коваріантна компонента, N — кількість періодів стеларатора, ψ_p — полоїдальний магнітний потік, $\sigma = \text{sgn}(v_{\parallel})$ для пролітних частинок та $\sigma = 0$ — для захоплених. Наближеним циклом руху, вздовж якого виконується інтегрування в інваріанті (1.2), є відрізок лінії $\vartheta = \text{const}$ (де ϑ — полоїдальна координата) на магнітній поверхні; довжина цього відрізка складає один період пристрою для пролітної частинки та відстань між точками відбиття — для захопленої. Це означає, що, на додаток до малості дрейфового відхилення від силової лінії, умовою застосовності інваріанта (1.2) є малість відхилення частинки по ϑ на одному періоді стеларатора, звідки випливає, що $\iota/N \ll 1$, де ι — обертальне перетворення.

Метою цього підрозділу є отримання інших інваріантів дрейфового руху заряджених частинок у стелараторі. На відміну від інваріантів (1.1) та (1.2), при виведенні нових інваріантів у якості наближеного циклу бере-

ться двовимірний многовид у фазовому просторі — дрейфова поверхня, на якій лежать траєкторії руху частинки у спрощеному симетричному магнітному полі. Після цього різниця між справжнім та спрощеним магнітними полями розглядається як збурення, і знаходяться поправки до координат, які відновлюють симетрію системи у збуреному полі. Таким чином буде отримано інваріанти руху, що пов'язані з цією симетрією. Чинники, що можуть порушувати адіабатичність руху та обмежувати застосовність цих інваріантів, будуть обговорені нижче. Перевагою нових інваріантів є відсутність згаданих обмежень на енергію частинок та ι . До того ж, на відміну від інваріантів (1.1) та (1.2), які характеризують баунс-усереднений рух частинок, нові інваріанти враховують також дрейфовий рух частинки в межах одного баунс-коливання. Останнє є важливим, зокрема, для аналізу збудження частинками альфвенових нестійкостей.

Для обчислень буде використано варіант гамільтонової теорії збурень, викладеним Литлджоном у [13, 14]. Литлджон формально описує гамільтонову систему за допомогою лінійного по похідним лагранжіана у фазовому просторі, в якому узагальнені координати та імпульси вважаються незалежними змінними і варіюються окремо. При цьому рівняння Ейлера-Лагранжа для цього лагранжіана дають рівняння Гамільтона. Перевага такого підходу полягає у тому, що він дає змогу працювати в неканонічних змінних. Це дуже зручно в даному випадку, оскільки збурення магнітного поля змінює симплектичну структуру фазового простору, тобто канонічні змінні збуреної системи, взагалі кажучи, не є канонічними змінними незбуреної й навпаки. Наслідуючи Арнольда [15] та Литлджона [14], для обчислень буде використано диференціально-геометричний формалізм, але основні результати будуть представлені в координатній формі.

У цьому підрозділі розгляд обмежується двома випадками: частинок, що в своєму русі завжди залишаються пролітними, та частинок, що завжди залишаються локально захопленими (див., наприклад, обговорення типів

орбіт частинок у стелараторі в роботі [16]). Перехідні частинки, тобто частинки, що переходять з локально пролітного стану до локально захопленого й навпаки, тут не розглядаються.

Структура підрозділу є такою. У пункті 1.1.2 вводиться модель, що використовується в роботі для опису магнітного поля стеларатора та дрейфового руху зарядженої частинки. Рух пролітних частинок вивчається у пункті 1.1.3, рух локально захоплених — у пункті 1.1.4. У пункті 1.1.5 наведено громіздкі вирази для кутового руху частинки, які можуть бути корисними для обчислення резонансів частинок із хвилями. Пункт 1.1.6 містить обговорення отриманих результатів, включаючи обмеження на їх застосовність та порівняння з попередніми.

1.1.2. Модель магнітного поля. Надалі припускатиметься, що конфігурація має вкладені магнітні поверхні. Це дозволяє використовувати для опису руху частинки так звані бузерові (магнітні) координати $(X^\psi, X^\vartheta, X^\varphi) = (\psi, \vartheta, \varphi)$, де ψ — мітка магнітної поверхні (тороїдальний магнітний потік, охоплений поверхнею, поділений на 2π), а ϑ та φ — відповідно полоїдальна та тороїдальна кутові змінні [17]. Кутові змінні вибираються таким чином, щоб силові лінії магнітного поля були “прямими” (тобто $d\vartheta/d\varphi = \iota(\psi)$), а індукція магнітного поля мала вигляд

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{g}} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\iota(\psi)}{\sqrt{g}} \mathbf{e}_\vartheta = B_\psi(\psi, \vartheta, \varphi) \nabla \psi + B_\vartheta(\psi) \nabla \vartheta + B_\varphi(\psi) \nabla \varphi, \quad (1.3)$$

де g — визначник метричного тензора, нижні індекси позначають відповідні коваріантні компоненти, а \mathbf{e}_i , $i = \psi, \vartheta, \varphi$, — коваріантні базові вектори. У бузерових координатах векторний потенціал можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} A_\psi &= 0, \\ A_\vartheta &= \psi, \\ A_\varphi &= -\psi_p = -\int_0^\psi \iota d\psi. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Слід зазначити, що хоча використання бузерових координат передбачає існування вкладених магнітних поверхонь, у дійсності асиметрія магнітного поля приводить до розпаду частини раціональних поверхонь (поверхонь з раціональним ι) і утворення магнітних островів. Але оскільки для достатньо доброго утримання плазми ширина зон розпаду повинна бути малою, застосування бузерових координат для практично важливих конфігурацій є достатньо обгрунтованим.

Припущення, що циклотронна частота набагато більша за всі інші характерні частоти в системі, дозволяє скористатися наближенням ведучого центру. Для вибраного комбінованого гамільтоново-лагранжевого формалізму найкраще підходить варіант теорії ведучого центру, викладений у [13], бо в ньому в кожному порядку теорії збурень система є гамільтоновою, а динамічні змінні задовольняють співвідношенням на зразок $\mu = Mv_{\perp}^2/(2B)$ у всіх порядках по збуренню. Лагранжіан ведучого центру (L_{gc}) до першого порядку за дрейфами задається рівнянням

$$L_{gc} = \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{X}} - \mathcal{E} + \frac{Mc}{e} \mu \dot{\Theta} + \frac{Mv_{\parallel}}{B} \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{X}}, \quad (1.5)$$

де $\mathbf{X} = (X^{\psi}, X^{\vartheta}, X^{\varphi})$; кінетична енергія \mathcal{E} , магнітний момент μ та гірофаза Θ розглядаються як координати у фазовому просторі; $v_{\parallel} = \pm \sqrt{(2/M)(\mathcal{E} - \mu B)}$ — поздовжня швидкість; M та e — маса та заряд частинки. Останній член у цьому виразі відповідає за дрейфи першого порядку.

Вираз (1.5) має просту форму, але вживає неканонічні координати і незручний для застосування звичайних методів гамільтонової механіки. Тому в цьому та наступному підрозділах, слідуючи Литлджону [14], застосуватиметься формалізм, у якому зручно працювати з неканонічними координатами, а саме формалізм $(2n + 1)$ -вимірного розширеного фазового простору (див., напр., [15], ч. 9). У цьому формалізмі механічна система описується диференційною 1-формою γ , яка діє на розширеному фазовому просторі. Ця форма називається фундаментальною 1-формою або

інтегральним інваріантом Пуанкаре-Картана. Траєкторії частинок можна знайти, варіюючи $\int \gamma$, або, що те ж саме, обчисливши лінії вихору γ , тобто інтегральні криві нульового векторного поля Z зовнішньої похідної $d\gamma$, яке задовольняє $d\gamma(Z) = 0$. У канонічних координатах $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, γ набуває стандартного виду $\gamma = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)dt$, де H – гамільтоніан системи, а нульове векторне поле Z зводиться до рівнянь Гамільтона. Однією з переваг цього підходу є те, що координати у фазовому просторі можуть бути неканонічними, а час не є, взагалі кажучи, виділеною змінною.

У випадку руху ведучого центру, розширений фазовий простір – це $(\mathbf{X}, \mu, \Theta, \mathcal{E}, t)$, а фундаментальна 1-форма

$$\gamma \equiv L_{gc} dt = \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{X} - \mathcal{E} dt + \frac{Mc}{e} \mu d\Theta + \frac{Mv_{\parallel}}{B} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{X}. \quad (1.6)$$

Маючи на увазі застосування теорії збурень, B буде розділено на дві частини: частину B_0 , що має певну симетрію у бузерових координатах і розглядатиметься як “незбурене” поле, та “збурення” $\tilde{B} = B - B_0$. При цьому вважатиметься, що член лагранжевої форми (1.6), який містить B_{ψ} , є малим і може теж розглядатися як збурення. Тоді форма (1.6) розкладається на частину, що описує інтегровну систему, та частину, що порушує симетрію (збурення). Зважаючи на різний характер руху пролітних та захоплених частинок, в цих двох випадках таке розбиття слід виконувати по-різному.

Оскільки надалі “повна” величина B не знадобиться, індекс 0 опускатиметься, а в v_{\parallel} , ω_B і т.п. під B розумітиметься “незбурена” частина B_0 .

Надалі вважатиметься, що задовільняються нерівності

$$\frac{\Delta}{\iota} \frac{d\iota}{d\psi} \ll 1; \quad \frac{\Delta}{B} \frac{dB}{d\psi} \ll 1; \quad B_{\psi} \Delta \ll B_{\vartheta}, B_{\varphi}, \quad (1.7)$$

де Δ – характерна зміна ψ на орбіті частинки. Зокрема, в оптимізованих стелараторах типу Wendelstein, де шир магнітного поля є дуже малим,

$(\psi_a/\iota)d\iota/d\psi \ll 1$ ($\psi_a - \psi$ на границі плазми), ці співвідношення виконуються навіть для дуже широких орбіт ($\Delta \sim \psi_a$).

1.1.3. Інваріанти пролітних частинок. У цьому пункті розглядатимуться пролітні частинки. Для них жодна з гармонік не є достатньо великою, щоб привести до обмеження руху, тому всі гармоніки, що залежать від кутових змінних, розглядатимуться як збурення. Тоді $B = \bar{B}$, де \bar{B} — середня величина магнітного поля на осі. Виділяючи з повного лагранжіану (1.6) частину нульового порядку за збуренням магнітного поля,

$$\gamma = \frac{e}{c}(X^\psi dX^\vartheta - I dX^\varphi) - \mathcal{E}dt + \frac{Mc}{e}\mu d\Theta + \frac{Mv_{\parallel}}{B}(B_\vartheta dX^\vartheta + B_\varphi dX^\varphi),$$

де $I \equiv \int_0^\psi \iota d\psi$.

Легко побачити, що цей лагранжіан вже приведений до змінних дія-кут, причому діями є $\frac{e}{c}X^\psi + \frac{Mv_{\parallel}}{B}B_\vartheta$, $-\frac{e}{c}I + \frac{Mv_{\parallel}}{B}B_\varphi$ та μ , а спряженими кутами — ϑ , φ та Θ . Надалі еволюція гірофази не знадобиться, тому можна вважати магнітний момент такою ж заданою величиною, як і \mathcal{E} . Позначивши дії через I_ϑ та I_φ , лагранжіан набуде вигляду

$$\gamma = I_\vartheta dX^\vartheta + I_\varphi dX^\varphi - \mathcal{E}dt \quad (1.8)$$

Потрібно знайти таке перетворення координат, яке привело б суму незбуреного лагранжіана γ та збурення

$$\tilde{\gamma} = \frac{Mv_{\parallel}}{B} \left[B_\psi dX^\psi - \frac{\tilde{B}}{B} \frac{2\mathcal{E} - \mu B}{2\mathcal{E} - 2\mu B} (B_\vartheta dX^\vartheta + B_\varphi dX^\varphi) \right] \quad (1.9)$$

до вигляду, який би сходився з незбуреним лагранжіаном. Як вказано в [14], векторне поле \mathbf{H} , що є генератором такого перетворення, можна знайти з рівняння

$$\gamma = \gamma + \tilde{\gamma} + d\gamma(\mathbf{H}) - dS, \quad (1.10)$$

де S — невідомий скаляр (аналог твірної функції канонічної гамільтонової теорії збурень).

Шукаючи потрібне перетворення, можна обмежитись перетвореннями, які стосуватимуться лише просторових координат. Це одразу дасть орбіти частинок у збуреному полі: “виправлені” на збурення координатні функції у фазовому просторі знаходяться з рівняння

$$X_{1i} = X_i + \mathbf{H}(X_i). \quad (1.11)$$

через незбурені координати. Тому у збуреному полі замість інтеграла руху ψ інтегралом буде функція $\tilde{\psi} = \psi + H^\psi$. Простий розрахунок дає

$$\tilde{\psi} = \psi + \frac{v_{\parallel}}{\omega_B} \frac{2\mathcal{E} - \mu B}{2\mathcal{E} - 2\mu B} \sum_{m,n} \frac{\tilde{B}_{mn}}{B} \frac{mB_\varphi + nB_\vartheta}{m\iota - n} e^{im\vartheta - in\varphi}. \quad (1.12)$$

Поправки до кутів, H^φ та H^ϑ , також можна знайти з (1.10). Оскільки канонічні кути лінійно змінюються з часом при русі частинки, ці поправки дають змогу описати часову зміну бузерових кутів і є важливими для визначення резонансів частинки з хвилями. Оскільки отримані вирази для H^φ та H^ϑ є досить громіздкими, вони наведені окремо в пункті 1.1.5.

1.1.4. Інваріанти захоплених частинок. Нехай тепер частинка захоплена в магнітній ямі на певній гармоніці магнітного поля $B_* = B_{m_0 n_0} \cos(m_0 \vartheta - n_0 \varphi)$. Цю гармоніку не можна вважати збуренням, бо вона визначає структуру фазового простору. Зручно внести її до основного поля та ввести нові кути $\vartheta_1 = m_0 \vartheta - n_0 \varphi$ та $\varphi_1 = n_0 \vartheta + m_0 \varphi$. Завдяки цій заміні $B = \bar{B} + B_*$ є функцією лише ϑ_1 .

Рівняння (1.6) тепер запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} \gamma = & \left(\frac{e}{c} A_{\vartheta_1} + \frac{M v_{\parallel}}{B} B_{\vartheta_1} \right) dX^{\vartheta_1} + \\ & + \left(\frac{e}{c} A_{\varphi_1} + \frac{M v_{\parallel}}{B} B_{\varphi_1} \right) dX^{\varphi_1} - \mathcal{E} dt, \end{aligned} \quad (1.13)$$

звідки одразу можна виписати дію

$$I_2 = \frac{e}{c} A_\varphi + \frac{M v_{\parallel}}{B} B_\varphi \quad (1.14)$$

(індекс 1 при кутах ϑ та φ надалі опускатиметься).

Подальше аналітичне просування можливе завдяки розвиненню

$$I_2 \simeq \frac{e}{c} A_\varphi|_{\psi=\psi_b} + \frac{e}{c} A'_\varphi(\psi - \psi_b) + \frac{Mv_{\parallel}}{B} B_\varphi, \quad (1.15)$$

де ψ_b – координата точки повороту частинки, що визначається умовою $v_{\parallel} = 0$. Це розвинення в стелараторах з малим широм справедливе навіть для досить великих $\psi - \psi_b \sim \psi$. Дія I_1 знаходиться звичайним інтегруванням за кутом:

$$I_1 \approx \frac{B_\vartheta A'_\varphi - B_\varphi A'_\vartheta}{2\pi} \oint \frac{Mv_{\parallel}}{B} \frac{d\vartheta}{A'_\varphi}. \quad (1.16)$$

Нехтуючи залежністю B від кута в знаменнику, можна отримати

$$I_1 \approx \frac{B_\vartheta A'_\varphi - B_\varphi A'_\vartheta}{2\pi} \frac{Mv_{\parallel\max}}{B} \frac{8}{A'_\varphi} [\mathbf{E} - (1 - \kappa^2)\mathbf{K}], \quad (1.17)$$

де $v_{\parallel}^2 = v_{\parallel\max}^2(\sin^2(\vartheta/2) - \kappa^2)/(1 - \kappa^2)$, \mathbf{K} та \mathbf{E} – повні еліптичні інтеграли відповідно першого та другого роду, $\kappa^2 = (\mu\bar{B} + \mu B_{m_0 n_0} - \mathcal{E})/(2\mu B_{m_0 n_0})$. Спряжену кутову змінну ξ_1 можна знайти з

$$\kappa^{-1} \sin \frac{\vartheta}{2} = \operatorname{sn} \left(\frac{2\mathbf{K}}{\pi} \xi_1 \right) = \operatorname{sn} \xi, \quad (1.18)$$

а швидкість частинки – з $v_{\parallel} = v_{\parallel\max} \operatorname{cn} \xi$, де sn та cn – відповідно еліптичні синус та косинус. Для дії I_2 спряженим кутом ξ_2 є кут φ з періодичною добавкою χ , яка визначається з рівняння

$$\frac{\partial \chi}{\partial \xi_1} = \frac{2\kappa\mathbf{K}}{\pi} \frac{A'_\vartheta}{A'_\varphi} \operatorname{cn} \xi. \quad (1.19)$$

Переходячи до збуреного поля і розкладаючи збурення $\boldsymbol{\gamma}$ на компоненти за 1-формами координат – $\boldsymbol{\gamma}_1 = F_i dX^i$, підставляючи в (1.10) і прирівню-

ючи коефіцієнти, можна отримати систему

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial t} &= -\mu \left(\frac{\partial B}{\partial \psi_b} H^{\psi_b} + \frac{\partial B}{\partial \xi_1} H^{\xi_1} \right) \\
\frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}} &= -H^{\xi_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathcal{E}} \\
\frac{\partial S}{\partial \psi_b} &= -H^{\xi_2} \frac{dI_2}{d\psi_b} - H^{\xi_1} \frac{\partial I_1}{\partial \psi_b} \\
\frac{\partial S}{\partial \xi_1} &= H^{\psi_b} \frac{\partial I_1}{\partial \psi_b} + F_{\xi_1} \\
\frac{\partial S}{\partial \xi_2} &= H^{\psi_b} \frac{dI_2}{d\psi_b} + F_{\xi_2}.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Після фур'є-перетворення за канонічними кутами ξ_1 та ξ_2 і виключення S із (1.20) H^{ψ_b} запишеться у вигляді

$$H^{\psi_b}_{(mn)} = - \frac{mF_{\xi_2(mn)} - nF_{\xi_1(mn)}}{m \frac{dI_2}{d\psi_b} - n \frac{\partial I_1}{\partial \psi_b}}, \tag{1.21}$$

де (m, n) — номери фур'є-гармонік за канонічними кутами ξ_1 та ξ_2 відповідно, а потрібні компоненти збурення F_i — у вигляді

$$\begin{aligned}
F_{\xi_1} &= -\frac{Mv_{\parallel \max}}{B^2} \left(B_{\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_1} + B_{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \right) \tilde{B} \operatorname{cn} \xi \\
F_{\xi_2} &= -\frac{Mv_{\parallel \max}}{B^2} \left(B_{\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_2} + B_{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \right) \tilde{B} \operatorname{cn} \xi.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Для сильно захоплених частинок ($\kappa \ll 1$) можна привести (1.21) до вигляду

$$\begin{aligned}
H^{\psi_b} &= \frac{\omega_b}{\omega_B} \frac{v_{\parallel \max}}{A'_{\varphi}} \sum_{\mu, m, n} \frac{\tilde{B}_{\mu n}}{B} \exp(im\xi_1 - in\xi_2) \times \\
&\times \frac{m^2 B_{\varphi} J_m - n\kappa(2B_{\vartheta} - \iota_1 B_{\varphi}) \left(\frac{m^2}{x} J_m - J'_m\right)}{x(m\omega_b - n\omega_p)},
\end{aligned} \tag{1.23}$$

де $\iota_1 = A'_{\vartheta}/A'_{\varphi}$, $x = \kappa(2\mu + \iota_1 n)$, функція Беселя m -го порядку J_m та її похідна J'_m беруться від аргумента x , а

$$m\xi_1 - n\xi_2 \approx m \arcsin(\vartheta/2\kappa) - n(\varphi + \iota_1 \vartheta/2).$$

Користуючись рівнянням (1.15), щоб виразити ψ_b через ψ , можна отримати, що інтегралами руху у збуреному випадку будуть \mathcal{E} , μ та

$$\tilde{\psi}_b = \psi_b + H^{\psi_b} = \psi + \frac{v_{\parallel} B_{\varphi}}{\omega_{B0} A'_{\varphi}} + H^{\psi_b}. \quad (1.24)$$

Поправки до кутів, H^{ϑ} та H^{φ} , визначаються з тієї ж системи (1.20) і наведені в наступному пункті.

1.1.5. Часова еволюція кутових змінних. Для пролітних частинок поправки до кутових змінних даються виразами

$$\hat{H}^{\vartheta} = -\omega_{\vartheta} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \mathcal{E}} + J \frac{\partial I_{\varphi}}{\partial \mathcal{E}} \left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial \psi} - \frac{v_{\parallel}}{\omega_B} B_{\psi} \right) \quad (1.25)$$

$$\hat{H}^{\varphi} = -\omega_{\varphi} \frac{\partial \hat{S}}{\partial \mathcal{E}} - J \frac{\partial I_{\vartheta}}{\partial \mathcal{E}} \left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial \psi} - \frac{v_{\parallel}}{\omega_B} B_{\psi} \right), \quad (1.26)$$

де $\omega_{\vartheta} = J \frac{\partial I_{\varphi}}{\partial \psi}$ та $\omega_{\varphi} = -J \frac{\partial I_{\vartheta}}{\partial \psi}$ — частоти руху,

$$\hat{S} = i \frac{v_{\parallel}}{\omega_B} \frac{2\mathcal{E} - \mu B}{2\mathcal{E} - 2\mu B} \frac{\hat{B}}{B} \frac{\omega_{\vartheta} B_{\vartheta} - \omega_{\varphi} B_{\varphi}}{m\omega_{\vartheta} - n\omega_{\varphi}},$$

$$J^{-1} = \frac{\partial I_{\varphi}}{\partial \psi} \frac{\partial I_{\vartheta}}{\partial \mathcal{E}} - \frac{\partial I_{\vartheta}}{\partial \psi} \frac{\partial I_{\varphi}}{\partial \mathcal{E}}.$$

Для захоплених частинок

$$\begin{aligned} H^{\xi_1} = & - \left(\frac{\partial I_1}{\partial \mathcal{E}} \right)^{-1} Q \left[\frac{\partial \hat{F}_{\xi_1}}{\partial \mathcal{E}} \frac{dI_2}{d\psi_b} - \frac{\partial \hat{F}_{\xi_2}}{\partial \mathcal{E}} \frac{\partial I_1}{\partial \psi_b} - \right. \\ & \left. - \left(\hat{F}_{\xi_2} - in\hat{S} \right) \frac{\partial^2 I_1}{\partial \psi_b \partial \mathcal{E}} \right] \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} H^{\xi_2} = & - \left(\frac{dI_2}{d\psi_b} \right)^{-1} \left\{ Q \left[\frac{\partial \hat{F}_{\xi_1}}{\partial \psi_b} \frac{dI_2}{d\psi_b} - \right. \right. \\ & - \frac{\partial \hat{F}_{\xi_2}}{\partial \psi_b} \frac{\partial I_1}{\partial \psi_b} - \left(\hat{F}_{\xi_2} - in\hat{S} \right) \frac{\partial^2 I_1}{\partial^2 \psi_b} + \\ & \left. \left. + \left(\hat{F}_{\xi_1} - im\hat{S} \right) \frac{d^2 I_2}{d^2 \psi_b} \right] + \frac{\partial I_1}{\partial \psi_b} H^{\xi_1} \right\}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

де

$$\hat{S} = Q \left(\hat{F}_{\xi_1} \frac{dI_2}{d\psi_b} - \hat{F}_{\xi_2} \frac{\partial I_1}{\partial \psi_b} \right),$$

$$Q = m \frac{dI_2}{d\psi_b} - n \frac{\partial I_1}{\partial \psi_b}.$$

1.1.6. Обговорення та висновки. Отримані інваріанти, (1.12) та (1.24), дають змогу знайти орбіту ведучого центру частинки за відсутності зіткнень. Тому їх можна застосовувати для аналізу миттєвих втрат швидких іонів (продуктів термоядерних реакцій або популяцій надтеплових іонів, що утворюються при нагріванні плазми), тобто втрат за характерні часи орбітального руху, коли зіткнення зазвичай не відіграють суттєвої ролі для таких іонів. Крім того, ці інваріанти є “природними” змінними для запису дрейфового кінетичного рівняння, коли вивчається поведінка швидких іонів з урахуванням зіткнень на довших інтервалах часу. Проте, існують ще деякі обмеження на застосовність інваріантів (1.12) та (1.24), які є наслідком застосування методу збурень при їх отриманні.

По-перше, ці інваріанти не працюють поблизу резонансних дрейфових поверхонь, тобто дрейфових поверхонь, на яких відношення частот руху частинки в полоїдальному та тороїдальному напрямках є раціональним числом. Це відображають резонансні знаменники в рівняннях (1.12) та (1.24), які біля резонансних поверхонь прямують до нуля. Як зазначалося раніше, біля таких поверхонь збурення змінює топологію фазового простору, утворюючи магнітні острови та зони стохастичного руху.

По-друге, можна очікувати, що отримані вирази перестають працювати при наближенні до області перехідних частинок, де деякі з гармонік, що розглядалися в наших обчисленнях як збурення, починають впливати на топологію орбіти. Зокрема, інваріант (1.24) для захоплених частинок неможливо застосовувати в тому пристрої (або в тій зоні пристрою), де немає домінування однієї з фур'є-гармонік магнітного поля над рештою гармонік,

оскільки тоді майже всі захоплені частинки є перехідними.

Цікаво також порівняти отримані інваріанти (1.12) та (1.24) з відомими раніше інваріантами (1.2) та (1.1). Можна показати, що доданки з $n = 0$ в рівнянні (1.12) та $l = 0$ в рівнянні (1.23) (тобто, доданки, що описують рух, незалежний від баунс-фази) наближено відповідають рівнянням (1.2) та (1.1), відповідно. З рівняння (1.12) видно, що ці доданки типово домінують у пристроях з великою кількістю періодів, $N = 5 - 10$. Дійсно, оскільки n є кратним до N , а l типово не перевищує одиницю, знаменники доданків з $n \neq 0$ в цьому випадку є завжди великими. Навпаки, в компактних пристроях (з малим N) внесок доданків з $n \neq 0$ може бути значним. Отже, в таких пристроях нові інваріанти дають змогу визначити рух частинок зі значно більшою точністю. З іншого боку, перевагою адіабатичних інваріантів (1.2) та (1.1) є те, що вони є чинними, відповідно, в цілій області локально пролітних частинок та в цілій області локально захоплених частинок, включно з локально пролітним та локально захопленим станами перехідних частинок.

1.2. Стохастична дифузія перехідних іонів

1.2.1. Вступ. Відомо, що відсутність осьової симетрії у стелараторах приводить до існування різноманітних типів орбіт частинок (див. напр. [32]). Як правило, варіація індукції магнітного поля B вздовж магнітної силової лінії має два характерних масштаби по полоїдальному куту φ : $\Delta\varphi \sim 2\pi/N$, де N – число періодів магнітного поля, тобто число заходів стеларатора, визначає розмір локальних магнітних ям, та більший масштаб $\Delta\varphi \sim 2\pi/\iota$, де ι – обертальне перетворення, пов'язаний із тороїдальністю та з впливом гвинтових гармонік B). Внаслідок такої структури поля, частинки з малими магнітними моментами поведуться як пролітні, тобто не змінюють напрямку руху вздовж силових ліній. Певний відсоток ча-

стинок із великими магнітними моментами залишатимуться захопленими у локальні магнітні ями. Частинки з проміжними значеннями магнітного моменту переходять із локально захопленого стану до локально пролітного, у якому коли вони не утримуються локальними магнітними ямами, але залишаються захопленими тороїдальною неоднорідністю B .

Числове моделювання термоядерного реактора на основі стандартної концепції стеларатора [77] показало, що більшість захоплених надтеплових іонів втрачаються з плазми за час порядку баунс-часу, який набагато менший за час термалізації. Це приводило б до втрати значної частки термоядерних α -частинок і становило б серйозну перешкоду для створення практично придатного реактора.

В оптимізованих стелараторах типу Wendelstein миттєвим втратам надтеплових йонів з супербананових орбіт запобігають, модифікуючи магнітну конфігурацію високим β (відношення тиску плазми до тиску магнітного поля) у такий спосіб, щоб контури поздовжнього адіабатичного інваріанта локально захоплених частинок, $J = \oint v_{\parallel} dl$, замикалися всередині плазми [18, 19]. Тим не менше, магнітний дрейф призводить до перетворення деяких із цих частинок на локально пролітні і навпаки, тобто до утворення класу перехідних частинок. Перетворення орбіт відбувається тоді, коли частинки перетинають сепаратрису між локально захопленим та локально пролітними станами. Перетин сепаратриси супроводжується хаотичним стрибком J , що приводить до беззіткненневої стохастичної дифузії. Коефіцієнт стохастичної дифузії термоядерних α -частинок у реакторі Helias [20] – стелараторі типу Wendelstein – було обчислено в роботі [21]. За висновком [21], беззіткненнева стохастична дифузія є важливим механізмом втрат надтеплових йонів в оптимізованих стелараторах типу Wendelstein. Зокрема, у розглянутому реакторі вона приводить до втрати значної частки α -частинок на стінку до того, як вони передадуть свою енергію основній плазмі через кулонові зіткнення. Цей висновок узгоджувався з результа-

тами числового моделювання орбіт частинок. Проте в теоретичній частині роботи [21] було вжито вираз для неадіабатичного стрибка J для частинки у гармонічному електростатичному потенціалі, що повільно змінюється з часом [22, 23, 24]. Застосовність цього виразу до поведінки перехідних частинок у стелараторних магнітних конфігураціях не доводилася і не обговорювалася, що і мотивувало розглянути теорію стохастичної дифузії в оптимізованих стелараторах у даній роботі. На відміну від [21] вираз для стрибків J виводиться у стелараторному магнітному полі за методом роботи [24], враховуючи асиметрію між локально пролітними частинками з протилежними знаками v_{\parallel} , викликану наявністю магнітного поля.

Решта підрозділу складається з таких частин: у пункті 1.2.2 вводиться скорочений лагранжіан руху ведучого центру в фазовому просторі. У пункті 1.2.3 він застосовується до магнітної конфігурації стелараторів типу Wendelstein. У пункті 1.2.4 розглядаються переходи між локально захопленими та локально пролітними станами та виводиться вираз для імовірності такого переходу. У пункті 1.2.6 з використанням виведених у пункті 1.2.5 виразів для неадіабатичної зміни J при переході через сепаратрису отримується вираз для коефіцієнта стохастичної дифузії, і порівнюється із виразом, виведеним в [21]. У пункті 1.2.7 наведено оцінки коефіцієнта стохастичної дифузії для реактора Helias. У пункті 1.2.8 наведено підсумки та коротке обговорення отриманих результатів.

1.2.2. Скорочений лагранжіан ведучого центру. Як і у попередньому підрозділі, рух ведучого центру частинки у магнітному полі описуватиметься за допомогою фундаментальної 1-форми (1.6):

$$\gamma_{gc} = L_{gc} dt = \left(\frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{mv_{\parallel}}{B} \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{X} + \mu d\Theta - \mathcal{E} dt.$$

γ_{gc} не залежить від Θ та t , тому магнітний момент та енергія частинки є інтегралами руху, а Θ є циклічною змінною. Оскільки для опису стоха-

стичної дифузії гірофаза частинки неважлива, можна відділити спряжену пару μ, Θ і розглянути замість γ_{gc} 1-форму

$$\gamma'_{gc} = \left(\frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{mv_{\parallel}}{B} \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{X} - \mathcal{E} dt \quad (1.29)$$

що діє на скороченому фазовому просторі $(\mathbf{X}, \mathcal{E}, t)$, вважаючи тепер μ константою. (Більш формально, легко показати ([15], ч. 9, § 45Б) що проекції ліній вихору γ_{gc} при заданому сталому μ на гіперповерхню $\Theta = \text{const}$ є лініями вихору γ'_{gc} .)

Щоб мати змогу обчислити стрибки адіабатичних інваріантів при переходах через сепаратрису та відповідні зміщення в радіальному напрямку, достатньо знати форму траєкторій частинок у просторі. Тому можна скоротити фазовий простір ще раз, розглядаючи час t як циклічну змінну і відділяючи “спряжену пару” \mathcal{E}, t у той самий спосіб, як і μ, Θ . Траєкторії частинок можна отримати у параметричному виді із 1-форма

$$\gamma''_{gc} = \left(\frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{mv_{\parallel}}{B} \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{X}, \quad (1.30)$$

яка діє на тривимірному скороченому фазовому просторі, що складається з самого лише \mathbf{X} , причому і \mathcal{E} , і μ тепер розглядаються як константи.

1.2.3. Фазовий портрет руху захоплених іонів. У цьому підрозділі розгляється типова для стелараторів лінії Wendelstein магнітна конфігурація, у якій дзеркальна та гвинтова гармоніки домінують у B , а число заходів стеларатора N велике ($\iota/N \ll 1$). Відповідно вираз для B в бузевих координатах (див. підрозділ 1.1.2) має вигляд

$$\frac{B}{\bar{B}} = 1 + \epsilon_0 - \epsilon_t \cos \vartheta + \epsilon_m \cos N\varphi - \epsilon_h \cos(N\varphi - \vartheta), \quad (1.31)$$

де ϵ_h , ϵ_m та ϵ_t – відповідно амплітуди гвинтової, дзеркальної та тороїдальної гармонік, а так звана діамагнітна гармоніка ϵ_0 описує модифікацію вакуумної магнітної конфігурації за рахунок впливу скінченного тиску плазми.

Ці амплітуди, як і ϵ_0 , є $o(1)$ функціями ψ . Тоді рівняння (1.30) зводиться до

$$\gamma_{gc}'' = \frac{e}{c}(\psi d\vartheta - \psi_p d\varphi) - mv_{\parallel} R d\varphi = \frac{e}{c}\psi d\vartheta - p_{\varphi} d\varphi, \quad (1.32)$$

де $p_{\varphi} = (e/c)\psi_p + mv_{\parallel}R$. Формально, 1-форма (1.32) описує одновимірну гамільтонову систему із залежним від часу гамільтоніаном, де ϑ , φ та ψ , відповідно, грають роль часу, координати та енергії, а p_{φ} є канонічним моментом, спряженим до φ . Оскільки $N \gg 1$, залежність φ від ϑ розглядатиметься як збурення. З фізичної точки зору, розглядається рух частинок у локальних магнітних ямах, пов'язаних із дзеркальною та гвинтовою гармоніками B . Період цих гармонік має порядок $2\pi/N$, тоді як період то-роїдальної гармоніки – $2\pi/\iota$. Для зручності часто комбінують дзеркальну та гвинтову гармоніки B [21]:

$$\frac{B}{\bar{B}} = 1 + \epsilon_0 - \epsilon_t \cos \vartheta + \epsilon_{hm} \cos N(\varphi - \chi) \quad (1.33)$$

де ϵ_{hm} та χ – функції ψ та ϑ . Тоді для p_{φ} можна отримати

$$p_{\varphi} = -\frac{e}{c}\psi_p \mp m\omega_B \bar{\rho}_l R \sqrt{\epsilon_{hm} (\kappa^2 - \cos^2 N(\varphi - \chi)/2)}, \quad (1.34)$$

де $\omega_B = e\bar{B}/(mc)$, $\bar{\rho}_l$ – ларморовий радіус частинки на магнітній осі, R – великий радіус плазми, а

$$\kappa^2 = \frac{\alpha - (\epsilon_0 - \epsilon_t \cos \vartheta - \epsilon_{hm})}{2\epsilon_{hm}}, \quad (1.35)$$

де $\alpha = \mathcal{E}/\mu\bar{B} - 1$ – пітч-кутовий параметр. Після цих спрощень система, що описується (1.32), виявляється подібною до нелінійного маятника. Траєкторії локально захоплених частинок відповідають лібрації, а траєкторії локально пролітних частинок – обертанню маятника.

Фазовий портрет цієї системи (Рис. 1.1) – це фазовий портрет нелінійного маятника, зсунутий на $\frac{e}{c}\psi_p/N$. Змінна дії у цій системі – це стандартний адіабатичний інваріант J_{\parallel} . Для локально захоплених частинок, $\kappa^2 < 1$ і

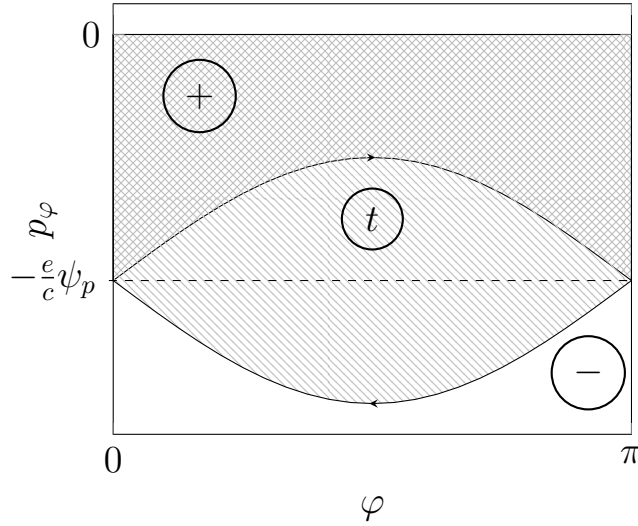


Рис. 1.1. Фазовий портрет “зсунутого” нелінійного маятника (1.32). (+) та (-)-локально пролітні стани займають області фазового простору, відповідно, над верхньою та під нижньою гілкою сепаратиси. Області фазового простору, що входять до S_+ і S_- , позначено похилою штриховкою. S_+ та S_- мають протилежний знак, бо контури, що обмежують ці області, обходяться у протилежних напрямках.

існує одна гілка

$$I_t = \frac{1}{2\pi} \oint p_\varphi d\varphi = I_s f(\kappa), \quad (1.36)$$

де

$$I_s = \frac{4}{\pi N} m \omega_B \bar{\rho}_l R \sqrt{\epsilon_{hm}},$$

$f(\kappa) = E(\kappa) - (1 - \kappa^2)K(\kappa)$, K та E – повні еліптичні інтеграли першого та другого роду, відповідно. Для локально пролітних частинок, інтегрування виконується по всьому періоду $2\pi/N$ і адіабатичний інваріант має дві гілки

$$I_\pm = \mp \frac{e \psi_p}{c N} + \frac{1}{2} I_s f(\kappa), \quad (1.37)$$

де $f(\kappa)$ – та ж сама функція, що і у (1.36), але з $\kappa^2 > 1$; стандартним перетворенням її можна звести до виду $f(\kappa) = \kappa E(\kappa^{-1})$. (1.36) та (1.37) співпадають із результатами [21]. Баунс-усереднені траєкторії частинок відповідають контурам сталого I_i у площині (ψ, ϑ) (Рис. 1.2). Індекс i має значення

+ чи – для двох знаків v_{\parallel} локально пролітних частинок та t для локально захоплених частинок.

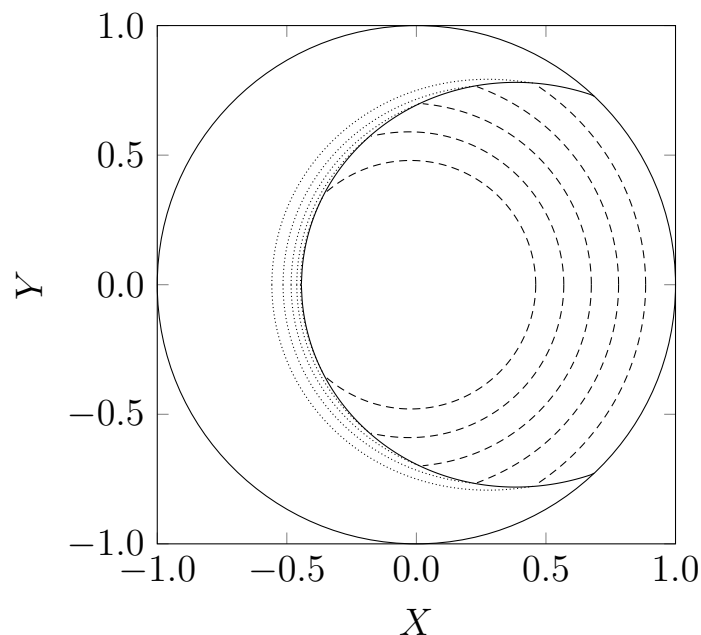


Рис. 1.2. Контури сталого J_{\parallel} для локально захоплених (крапками) та локально пролітних (пунктиром) частинок з $\alpha = 0.2$. Суцільною лінією позначена сепаратриса $\kappa^2 = 1$.

Контур $\kappa^2 = 1$ у цій площині є сепаратрисою між локально пролітними та локально захопленими частинками з даним пітч-кутом. Стохастична дифузія виникає внаслідок накопичення стрибків, що I_i зазнає при переході баунс-усередненої траєкторії частинки через сепаратрису, де адіабатичність I_i порушується.

1.2.4. Перетворення орбіт перехідних іонів. У магнітних конфігураціях Wendelstein-7X, у всьому діапазоні пітч-кутового параметра α , де існують перехідні орбіти, є дві точки переходу, розташовані симетрично відносно площини $\vartheta = 0$. (Це стає невірним, коли $\epsilon'_m > \epsilon'_h$ і одночасно $\epsilon'_0 < \epsilon_t$, але ця умова не виконується ні в одній із конфігурацій, наведених у [25].) Види та імовірності переходів, що відбуваються у системі, визначаються відносними змінами фазового об'єму, занятого кожним із станів.

Фазовий об'єм, зайнятий локально захопленими частинками – це площа всередині сепаратриси:

$$\frac{S_t(\vartheta)}{2\pi} = I_t|_{\kappa^2=1} = I_s.$$

Тут і далі, якщо не вказано інше, всі величини і похідні обчислюються при $\kappa^2 = 1$. Фазові об'єми, заняті локально пролітними станами, є необмеженими, бо $|v_{\parallel}|$ може набувати довільно великих значень. Проте для обчислення стрибків важлива не абсолютна величина, а зміна цих фазових об'ємів, викликана зміщенням положення сепаратриси з “часом” ϑ . Якщо, наслідуючи [24], позначити через S_{\pm} площі між відповідною гілкою сепаратриси та віссю φ , так, що $S_t = S_+ + S_-$:

$$\frac{S_{\pm}(\vartheta)}{2\pi} = I_{\pm}|_{\kappa^2=1} = \mp \frac{e\psi_p}{cN} + \frac{1}{2}I_s.$$

Зміни фазового об'єму даються виразами

$$\begin{aligned} \Theta_i = \frac{dS_i}{d\vartheta} &= \frac{\partial S_i}{\partial \vartheta} - \frac{\partial S_i}{\partial \psi} \frac{\partial \kappa^2}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial \kappa^2}{\partial \psi} \right)^{-1} = \\ &= \left(\frac{\partial \kappa^2}{\partial \psi} \right)^{-1} \{ \kappa^2, S_i \}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

де використано позначення

$$\{F, G\} \equiv \frac{\partial F}{\partial \psi} \frac{\partial G}{\partial \vartheta} - \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \frac{\partial G}{\partial \psi}.$$

Варто відзначити, що фазовий об'єм, зайнятий відповідним станом, зменшується, коли $\Theta_{\pm} > 0$. Для локально захоплених частинок

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_t}{2\pi} &= \left(\frac{\partial \kappa^2}{\partial \psi} \right)^{-1} \{ \kappa^2, I_s \} = \\ &= \left(\frac{\partial \kappa^2}{\partial \psi} \right)^{-1} \frac{I_s}{4\epsilon_{hm}^2} \{ \kappa^2, \epsilon_{hm}^2 \} = \frac{I_s}{2\epsilon_{hm}^2} \frac{\delta}{\delta_1} \sin \vartheta, \end{aligned}$$

де r – безрозмірна псевдо-радіальна координата, визначена з рівняння $\psi = \bar{B}a^2r^2/2$, a – малий радіус плазми, а

$$\begin{aligned} \delta &= \epsilon_h \epsilon_m (\epsilon'_0 - \epsilon'_t \cos \vartheta) - \epsilon_t (\epsilon_{hm}^2)' / 2 \\ \delta_1 &= \epsilon'_0 + \epsilon'_{hm} - \epsilon'_t \cos \vartheta, \end{aligned}$$

де похідні по r позначені штрихом. Для локально пролітних частинок,

$$\frac{\Theta_{\pm}}{2\pi} = \left(\frac{\partial \kappa^2}{\partial \psi} \right)^{-1} \left(\left\{ \kappa^2, \mp \frac{e \psi_p}{c N} \right\} + \frac{1}{2} \{ \kappa^2, I_s \} \right) = \frac{1}{2} \frac{\Theta_t}{2\pi} \pm \frac{e}{c} \frac{\iota}{N} \frac{d\psi}{d\vartheta} \Big|_{\kappa^2=1}.$$

Зручно ввести псевдо-імовірність переходу

$$\tilde{P} = \frac{2\Theta_t}{\Theta_+ - \Theta_-} = \frac{2}{\pi \iota r} \frac{\bar{\rho}_l R}{a^2} \frac{\delta}{\sqrt{\epsilon_{hm}} (\epsilon_h \epsilon_m + \epsilon_t \epsilon_{hm})}.$$

Числові оцінки показують, що для термоядерних α -частинок у реакторі Helias \tilde{P} додатня і менша за 0.1 у всьому об'ємі плазми, і ще менша для надтеплових йонів нейтральної інжекції у Wendelstein-7X. Відповідно, зміни фазового об'єму локально пролітних частинок завжди мають протилежний знак і близькі за абсолютним значенням:

$$\frac{\Theta_+}{\Theta_-} = \frac{(\Theta_+ - \Theta_-)/2 + \Theta_t/2}{(\Theta_- - \Theta_+)/2 + \Theta_t/2} = -\frac{1 - \tilde{P}}{1 + \tilde{P}} = O(1),$$

а фазовий потік локально захоплених частинок є $O(\tilde{P})$.

Знаки у (1.37) були визначені таким чином, що $\Theta_+ > 0$ у верхній точці переходу ($0 < \vartheta < \pi$). Оскільки у цій точці фазовий об'єм, зайнятий (+)-локально пролітними частинками, зменшується, а об'єм, зайнятий локально захопленими частинками – збільшується, (+)-локально пролітні частинки перетворюватимуться на локально захоплені із імовірністю $P = \Theta_t/\Theta_+ = \tilde{P}/(1 - \tilde{P}/2) \approx \tilde{P}$ (цей результат співпадає із (25) у [21], хоча тут він отриманий в дещо інший спосіб). Решта (+)-локально пролітних частинок змінюють напрямок дрейфу і перетворюються на (-)-локально пролітні. У нижній точці переходу, знаки Θ_i змінюються на протилежні: фазовий об'єм, зайнятий локально захопленими частинками, зменшується. Відповідно, вони “випадають” із локальних магнітних ям з імовірністю 1 та стають локально пролітними, тоді як (-)-локально пролітні частинки стають (+)-локально пролітними і дрейфують назад до верхньої точки переходу.

1.2.5. Перехід через сепаратрису у нелінійному маятнику. У цьому пункті методом, наведеним у [24], буде виведено вирази для зміни адіабатичних інваріантів при повільному переході через сепаратрису у гамільтоновій системі, фазовий портрет якої зображено на Рис. 1.1, гамільтоніан якої $H(p, q, \varepsilon t)$ повільно залежить від часу. Для зручності, гамільтоніан $H(p, q, \varepsilon t)$ покладено рівним нулю на сепаратрисі та від'ємним у захопленій області, як в звичайному нелінійному маятнику. Нехай $\Theta_+ \Theta_- < 0$ і, без втрати загальності, $\Theta_+ > 0$. (Випадок $\Theta_+ \Theta_- > 0$ у стелараторах типу Wendelstein не реалізується.) Тоді між трьома станами відбуватимуться такі переходи:

$$\begin{aligned} \Theta_t < 0 : & \begin{cases} (+) \rightarrow (-) & (a) \\ (t) \rightarrow (-) & (b) \end{cases} \\ \Theta_t > 0 : & \begin{cases} (+) \rightarrow (-) & (c) \\ (+) \rightarrow (t) & (d) \end{cases} \end{aligned}$$

Різниця між переходами (а) та (с) полягає у тому, що у випадку (а) всі (+)-пролітні траєкторії перетворюються на (-)-пролітні, а у випадку (с) деякі (+)-пролітні траєкторії стають захопленими.

Нехай a_i , b_i та S_i – ведучі коефіцієнти розвинення адіабатичних інваріантів I_i біля сепаратриси:

$$2\pi I_i = \oint pdq = S_i - a_i h \ln |h| + (b_i + a_i)h + O(h^2 \ln |h|), \quad (1.39)$$

де h – енергія системи на траєкторії. Відповідно,

$$\oint_{H=h} \frac{\partial H}{\partial t} dt = -2\pi \frac{\partial I_i}{\partial t} = -\Theta_i + O(h \ln |h|). \quad (1.40)$$

Період руху частинки по траєкторії біля сепаратриси дається виразом

$$T_i = 2\pi \left(\frac{\partial h}{\partial I_i} \right)^{-1} = b_i - a_i \ln |h| + O(h \ln |h|).$$

Якщо $\dot{H} \neq 0$, адіабатичні інваріанти не будуть константами і зазнаватимуть відхилень порядку $O(\varepsilon)$ від середнього значення на періоді. [24] використовує додатково усереднені адіабатичні інваріанти $J_i = I_i + u_i$, де

$$u_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{T_i} \left(\frac{T_i}{2} - t \right) \frac{\partial H}{\partial t} dt,$$

які відхиляються від середнього значення на періоді лише на величину порядку $O(\varepsilon^2)$. Поведінка поправок u_i біля сепаратриси залежить від того, скільки разів за період траєкторія наближається до гіперболічних точок. У випадку, що розглядається у цій роботі, як і у розглянутому в [24], пролітні траєкторії наближаються до єдиної гіперболічної точки один раз за період, і $2\pi u_{\pm} = d_{\pm} + O(\sqrt{h} \ln |h|)$ зі сталими d_{\pm} , а для захоплених траєкторій, що наближаються до неї двічі за період, $2\pi u_t = (T_+ \Theta_- - T_- \Theta_+)/2 + d_t + O(\sqrt{h} \ln |h|)$ з $d_t = d_+ + d_-$. У подальшому оцінки відкинутих членів, аналогічні [24], опускатимуться.

1.2.5.1. Перехід (а). Поки система знаходиться далеко від сепаратриси, $I_+ = I_{+\infty}$ та $J_+ = J_{+\infty}$ майже не змінюються. Час псевдоперетину [26] τ_* визначається як корінь рівняння $S_+(\tau_*) = 2\pi J_{+\infty}$. Це той час, який знадобився б траєкторії, щоб перетнути сепаратрису, якби адіабатичний інваріант лишався незмінним до самого перетину. Також можна визначити псевдо-кінцеве значення J_- після переходу: $2\pi J_{-*} = S_-(\tau_*)$.

З рівняння (1.40) видно, що з кожним періодом енергія системи зменшується на Θ_+ : $h_n = h_0 + n\Theta_+$, де послідовні точки максимального наближення траєкторії до гіперболічної точки нумеруються починаючи з останнього наближення перед перетином. Моменти часу, що відповідають цим моментам максимального наближення, будуть відноситися як $\tau_{+|n-1} = \tau_{+|n} + \frac{1}{2} (T_+(h_n) + T_+(h_{n-1}))$, бо кожен інтервал між послідовними наближеннями складається із повільного віддалення від гіперболічної точки, коли енергія системи близька до h_n , та повільного наближення до неї, коли енергія

системи близька до h_{n-1} ; в періоді руху $T_i(h)$ домінує час, потрібний траєкторії, щоб пройти повз гіперболічну точку при майже сталому значенні енергії h . За визначенням останнього перед перетином сепаратрисы максимального наближення, $0 < h_0 < \Theta_+$. Нехай $\xi_+ = h_0/\Theta_+$ – безрозмірний параметр переходу. Коли траєкторія перетинає сепаратрису і потрапляє в $(-)$ -область, вона спершу є близькою до гілки сепаратрисы, що відділяє $(+)$ - від (t) -області, потім наближається до гіперболічної точки і відходить від неї вздовж гілки сепаратрисы, що відділяє (t) - та $(-)$ -області. Відповідно, енергія системи біля гіперболічної точки в той момент, коли траєкторія наближається до неї всередині (t) -області, буде рівною $g_* = h_0 - \Theta_+$, а при наближенні до гіперболічної точки в $(-)$ -області – $g_0 = g_* - \Theta_- = h_0 - \Theta_t$. g_0 буде додатнім (як йому і слід бути в $(-)$ -пролітному стані), бо $\Theta_t < 0$. Параметр перетину в $(-)$ -області $\xi_- = -g_0/\Theta_-$ пов’язаний з ξ_+ очевидним співвідношенням $\Theta_+(1-\xi_+) = -\Theta_-(1-\xi_-)$. Слід зазначити, що, хоча $0 < \xi_+ < 1$, це, взагалі кажучи, несправедливо для ξ_- : частину фазового потоку в $(-)$ -область складають траєкторії, що переходять до неї власне із захопленого стану. Додаючи внески в час, потрібний траєкторії, щоб дістатися від h_0 до g_0 , і пригадуючи, що у (t) -стані траєкторія наближається до гіперболічної точки двічі за період, можна отримати $\tau_{-|0} = \tau_{+|0} + \frac{1}{2}T_+(h_0) + \frac{1}{2}T_t(g_*) + \frac{1}{2}T_-(g_0)$. Між наступними моментами максимального наближення до гіперболічної точки траєкторії, яка тепер віддаляється від сепаратрисы, енергія системи збільшуватиметься на Θ_- за період: $g_n = g_0 - n\Theta_-$. Аналогічні міркування показують, що часи цих послідовних моментів максимального наближення до гіперболічної точки в $(-)$ -області будуть пов’язані співвідношенням $\tau_{-|n} = \tau_{-|n-1} + \frac{1}{2}(T_-(g_{n-1}) + T_-(g_n))$. Підставляючи наближені вирази для T_i та I_i біля сепаратрисы та перетворюючи рекурентні співвідношення на суми, легко отримати, що

$$\tau_{+|0} \approx \tau_{+|n} + n(b_+ - a_+ \ln \Theta_+) - \frac{1}{2}a_+ \ln \frac{\xi_+ + n}{\xi_+} - a_+ \ln \frac{\Gamma(\xi_+ + n)}{\Gamma(\xi_+)}$$

а згідно (1.39),

$$2\pi(J_{+0} - J_{+n}) \approx \Theta_+(\tau_{+|0} - \tau_{+|n}) - (a_+ + b_+)n\Theta_+ - a_+(h_0 \ln h_0 - h_n \ln h_n).$$

Зміну J_+ при наближенні до сепаратриси від віддаленої від останньої точки з $n \gg 1$ можна знайти за допомогою розвинення Стірлінга для Γ -функції $\Gamma(x) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left(\frac{x}{e}\right)^x$ там, де її аргумент містить n , та переходячи до границі $n \rightarrow \infty$:

$$2\pi(J_{+0} - J_{+\infty}) \approx -a_+\Theta_+ \left[\xi_+ \ln \xi_+ - \xi_+ + \ln \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\xi_+}\Gamma(\xi_+)} \right]. \quad (1.41)$$

Слід зазначити, що насправді наближення до сепаратриси не займає нескінченного часу, але похибка наближення Стірлінга менша за 5% вже при $x = 2$.

Наближення до сепаратриси та віддалення від неї у випадку переходу $(+) \rightarrow (-)$ є симетричними, тому (1.41) з заміною індексів $+$ на $-$ справедливе для $J_{-\infty}$, значення J_- в пізніший момент часу, коли траєкторія вже віддалилася від сепаратриси:

$$2\pi(J_{-\infty} - J_{-0}) \approx -a_-\Theta_- \left[\xi_- \ln \xi_- - \xi_- + \ln \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\xi_-}\Gamma(\xi_-)} \right]. \quad (1.42)$$

Тепер потрібно зшити наближення до сепаратриси та віддалення від неї. Точний час переходу $\tau_{\pm|0}$ невідомий, але можна обчислити різницю $\tau_{-|0} - \tau_{+|0}$ і виразити $\tau_{-|0}$ через остаточне значення, якого набуває J_- після віддалення траєкторії від сепаратриси. Використовуючи час псевдо-переходу τ_* як відому точку відліку, незалежну від ξ_i , і виключаючи $\tau_{\pm|0}$ із наближених рівнянь

$$S_+(\tau_{+|0}) \approx S_+(\tau_*) + \Theta_+(\tau_{+|0} - \tau_*)$$

$$S_-(\tau_{-|0}) \approx S_-(\tau_*) + \Theta_-(\tau_{-|0} - \tau_*),$$

можна отримати

$$S_-(\tau_{-|0}) - S_-(\tau_*) \approx \Theta_-(\tau_{-|0} - \tau_{+|0}) + \frac{\Theta_-}{\Theta_+} (S_+(\tau_{+|0}) - S_+(\tau_*)). \quad (1.43)$$

Фазові об'єми $S_i(\tau_{i|0})$ можна виразити із J_{i0} та розвинень I_i та u_i біля сепаратриси. У свою чергу, J_{i0} співвідносяться з $J_{i\infty}$ через (1.41) та (1.42), зрештою з'єднуючи стан системи до наближення та після віддалення від сепаратриси. Поєднуючи ці міркування із визначенням J_{-*} , можна отримати

$$\begin{aligned} 2\pi\delta J_{+\rightarrow-} &= 2\pi(J_{-\infty} - J_{-*}) = 2\pi(J_{-\infty} - J_{-0}) + \\ &+ (2\pi J_{-0} - S_{-}(\tau_{-|0})) + \Theta_{-}(\tau_{-|0} - \tau_{+|0}) - \\ &- \frac{\Theta_{-}}{\Theta_{+}}(2\pi J_{+0} - S_{+}(\tau_{+|0})) + \frac{\Theta_{-}}{\Theta_{+}}2\pi(J_{+0} - J_{+\infty}). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Цей вираз поєднує неадіабатичну зміну J_{-} зі значенням J_{+} та є застосовним до будь-якого переходу між станами з відповідними замінами індексів.

Для нелінійного маятника $a_{+} = a_{-} = a$, $a_t = 2a$, і, підставляючи (1.41), (1.42), (1.43) та розвинення J_i в (1.44), після деяких спрощень можна отримати

$$\begin{aligned} 2\pi\delta J_{+\rightarrow-} &= -a\Theta_{-} \ln \frac{2\pi(1 - \xi_{+})}{\Gamma(\xi_{-})\Gamma(\xi_{+})} + (1 - \xi_{+})b'_{+}\Theta_{-} + \\ &+ \text{члени, що не містять } \xi_i, \end{aligned} \quad (1.45)$$

де $b'_i = b_i - a_i \ln |\Theta_i|$ і для компактності використано позначення $x_{[i}y_{j]} = x_i y_j - x_j y_i$. Члени, що не містять ξ_i , опущено, бо при обчисленні середньоквадратичного відхилення вони випадають. (Це рівняння відповідає (9) в [24].)

1.2.5.2. Перехід (с). Перехід (с) можна розглянути як обернений у часі перехід (а), де тепер $0 < \xi_{-} < 1$. Вводячи \tilde{P} як у попередньому пункті та покладаючи $\tilde{P} \ll 1$, можна записати

$$\ln \Gamma(\xi_{-}) = \ln \Gamma(\xi_{+}) - \tilde{P}(1 - \xi_{+}) \ln \xi_{+} + o(\tilde{P}).$$

Залишаючи ведучі члени за \tilde{P} , із (1.45) можна отримати

$$\begin{aligned} 2\pi\delta J_{+\rightarrow-} &= -a\Theta_{-} \ln \frac{2\pi(1 - \xi_{+})}{\Gamma(\xi_{+})^2} + (1 - \xi_{+})b'_{+}\Theta_{-} + \\ &+ \text{члени, що не містять } \xi_{+}. \end{aligned}$$

При послідовних переходах через сепаратрису, параметри переходу можна вважати рівномірно розподіленими випадковими величинами. Середня зміна адіабатичного інваріанту при переходах (а) та (с) має протилежний знак і скорочується, але J_{\pm} (разом із I_{\pm}) зазнаватиме випадкового блукання із середньоквадратичним кроком

$$\begin{aligned} \langle (2\pi(\delta J_{+\rightarrow-} - \langle \delta J_{+\rightarrow-} \rangle))^2 \rangle &= M_4(a\Theta_-)^2 + \\ + M_3a\Theta_-b'_{[+}\Theta_-] + \frac{1}{12}(b'_{[+}\Theta_-])^2, \end{aligned} \quad (1.46)$$

де

$$\begin{aligned} M_3 &= \int_0^1 dx \left(\ln \frac{1-x}{\Gamma(x)^2} - \gamma_2 \right) \left(x - \frac{1}{2} \right) \approx 0.25, \\ M_4 &= \int_0^1 dx \left(\ln \frac{1-x}{\Gamma(x)^2} - \gamma_2 \right)^2 \approx 2.6, \end{aligned}$$

та

$$\gamma_2 = \int_0^1 dx \ln \frac{1-x}{\Gamma(x)^2} = -1 - \ln 2\pi.$$

1.2.5.3. Перехід (d). Для розгляду переходу (d) потрібно розглянути віддалення від сепаратриси всередині (t)-області. Аналогічно до вищевикладеного, енергія системи при послідовних моментах максимального наближення до гіперболічної точки буде $f_n = f_0 - n\Theta_t$, а самі моменти часу співвідноситимуться, як $\tau_{t|n+1} = \tau_{t|n} + \frac{1}{4}T_t(f_n) + \frac{1}{2}T_t(f_n - \Theta_+) + \frac{1}{4}T_t(f_{n+1})$, бо повільні частини n -го витка траєкторії – це віддалення від гіперболічної точки при енергії f_n , прохід повз неї при $f_n - \Theta_+$ (на половині траєкторії, близькій до гілки сепаратриси між (t)- та (+)-областями, енергія системи зменшується на Θ_+) та наближення при f_{n+1} . Енергія в момент першого максимального наближення в (t)-області буде $f_0 = g_* - \Theta_- = h_0 - \Theta_t$, але траєкторія, що приходить з (+)-області, захопиться лише тоді, коли її енергія при останньому максимальному наближенні в (+)-області достатньо мала, тобто $h_0 < \Theta_t$; інакше траєкторія потрапить до (-)-області. Оскільки $h_0 = \xi_+\Theta_+$, параметр переходу $\xi_t = -f_0/\Theta_t$ буде відноситися до

параметру переходу траєкторії у (+)-області як $\Theta_t(1-\xi_t) = \Theta_+\xi_+$, причому перехід відбудеться за умови $0 < \xi_+ < \Theta_t/\Theta_+$. Час, потрібний траєкторії на перетин сепаратриси, буде $\tau_{t|0} = \tau_{+|0} + \frac{1}{2}T_+(h_0) + \frac{1}{2}T_t(g_*) + \frac{1}{4}T_t(f_0)$: траєкторія віддаляється від гіперболічної точки в (+)-області при енергії h_0 , проходить повз неї у (t)-області при g_* та, якщо її енергія недостатня, щоб досягти (-)-області, знову наближається до гіперболічної точки при f_0 .

Обчислення, аналогічні попередньому підпункту, дають

$$2\pi(J_{t0} - J_{t\infty}) = a_t\Theta_t \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\Gamma(\xi_t)\Gamma(\xi_t + \frac{\Theta_+}{\Theta_t})}{2\pi} + \xi_t - \left(\xi_t - \frac{1 - \Theta_+/\Theta_t}{2} \right) \ln |\xi_t| \right] \quad (1.47)$$

(це рівняння відповідає (4) в [24]).

Об'єднуючи (1.41), (1.47) та (1.44) з відповідними замінами індексів, можна отримати

$$2\pi\delta J_{+\rightarrow t} = a\Theta_t \ln \frac{\Gamma(\xi_t)\Gamma(\xi_t + \frac{\Theta_+}{\Theta_t})\Gamma(\xi_+)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \left| \xi_t - 1 + \frac{\Theta_+}{\Theta_t} \right|} + \frac{\Theta_t}{\Theta_+} b'_{[+}\Theta_t]\xi_t + \text{члени, що не містять } \xi_i. \quad (1.48)$$

Знову покладаючи $\tilde{P} \ll 1$, параметр переходу після перетину сепаратриси $\xi_+ = O(\tilde{P})$ і можна розвинути $\Gamma(\xi_+) = \xi_+^{-1} + O(1)$. Крім цього, оскільки $\Theta_+/\Theta_t = O(\tilde{P}^{-1})$, можна розвинути $\ln \Gamma(\xi_t + \Theta_+/\Theta_t) = \ln \Gamma(\Theta_+/\Theta_t) + \xi_t \ln(\Theta_+/\Theta_t) + O(\tilde{P})$. Залишаючи ведучі члени за \tilde{P} , із (1.48) можна отримати

$$2\pi\delta J_{+\rightarrow t} = a\Theta_t \left(\ln \frac{\Gamma(\xi_t)}{1 - \xi_t} + \xi_t \ln \frac{\Theta_+}{\Theta_t} \right) + \frac{\Theta_t}{\Theta_+} b'_{[+}\Theta_t]\xi_t + \text{члени, що не містять } \xi_i.$$

Середньоквадратичний крок у цьому випадку дорівнюватиме

$$\begin{aligned} \langle (2\pi(\delta J_{+ \rightarrow t} - \langle \delta J_{+ \rightarrow t} \rangle))^2 \rangle &= M_2(a\Theta_t)^2 + \\ &+ M_1 a \Theta_t \left(a \Theta_t \ln \frac{\Theta_+}{\Theta_t} + \frac{\Theta_t}{\Theta_+} b'_{[+} \Theta_t \right) + \\ &+ \frac{1}{12} \left(a \Theta_t \ln \frac{\Theta_+}{\Theta_t} + \frac{\Theta_t}{\Theta_+} b'_{[+} \Theta_t \right)^2, \end{aligned} \quad (1.49)$$

де

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_0^1 dx \left(\ln \frac{\Gamma(1-x)}{x} - \gamma_1 \right) \left(x - \frac{1}{2} \right) \approx 0.001, \\ M_2 &= \int_0^1 dx \left(\ln \frac{\Gamma(1-x)}{x} - \gamma_1 \right)^2 \approx 0.77, \end{aligned}$$

та

$$\gamma_1 = \int_0^1 dx \ln \frac{\Gamma(1-x)}{x} = 1 + \ln \sqrt{2\pi}.$$

1.2.6. Коефіцієнт дифузії. Щоб отримати вирази для стрибків адіабатичних інваріантів біля точок переходу, буде використано теорію переходу через сепаратрису, розроблену Нейштадтом [24]. Оскільки фазовий портрет нелінійного маятника відрізняється від фазового портрета системи, розглянутої в [24], виведені там вирази не можна прямо застосувати до даної задачі. Дещо громіздкі обчислення стрибків за методом [24], наведені у попередньому пункті, дають для стрибка адіабатичного інваріанта I_t при переході між локально захопленим і локально пролітним станами вираз

$$\begin{aligned} 2\pi\delta J_{+ \rightarrow t} &= \frac{\Theta_t}{\Theta_+} (b'_+ \Theta_t - b'_t \Theta_+) \xi + \\ &+ a \Theta_t \ln \frac{\Gamma(\xi) \Gamma(\xi + \frac{\Theta_+}{\Theta_t}) \Gamma(\frac{\Theta_t}{\Theta_+} (1 - \xi))}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \left| \xi - 1 + \frac{\Theta_+}{\Theta_t} \right|}, \end{aligned} \quad (1.50)$$

де a та b'_i – коефіцієнти, що визначаються із розвинення I_i біля сепаратриси, а $0 < \xi < 1$ – параметр переходу, що відповідає точній координаті частинки у момент перетину сепаратриси; члени, що не залежать від ξ , опущено, бо вони не дають внеску в коефіцієнт дифузії. При повторних переходах

через сепаратрису, ξ можна вважати рівномірно розподіленою випадковою величиною, і адіабатичний інваріант зазнаватиме випадкового блукання з середньоквадратичним кроком $\langle (2\pi(\delta J_{+\rightarrow t} - \langle \delta J_{+\rightarrow t} \rangle))^2 \rangle$, де кутові дужки позначають усереднення по ξ . Слід відзначити, що у спеціальному випадку, коли

$$\Theta_+ = \Theta_- = \Theta_t/2, b_+ = b_-, \quad (1.51)$$

вираз (1.50) зводиться до $a\Theta_t \ln \sin \xi$ і середньоквадратичний крок адіабатичного інваріанта дорівнюватиме

$$\langle (2\pi(\delta J_{+\rightarrow t} - \langle \delta J_{+\rightarrow t} \rangle))^2 \rangle = (a\Theta_t)^2 \pi^2 / 12. \quad (1.52)$$

Цей спеціальний випадок відповідає задачі про частинку у гармонічному електричному потенціалі, який повільно змінюється з часом [22, 23, 24]. Проте умови (1.51) означають, що, залежно від знаку Θ_t , пролітні частинки захоплюються потенціалом, а захоплені – перетворюються на пролітні з імовірністю 1, а між локально пролітними станами переходів немає. На противагу, у випадку перехідної частинки в стелараторі імовірність перетворення у верхній точці переходу $P \ll 1$, а у нижній точці переходу фазовий потік локально захоплених частинок, що перетворюються на локально пролітні, складає малу ($\sim P$) частку потоку локально пролітних частинок, що змінюють напрямок дрейфу на протилежний. Крім цього, умови (1.51) вимагають симетрії між локально пролітними станами, відсутньої в даному випадку через наявність у рівнянні (1.34) члена $-\frac{e}{c}\psi_p$. (Фізично, ця асиметрія означає, що та частина траєкторії локально захопленої частинки, яка є близькою до $(-)$ гілки сепаратриси, є “довшою” за ϑ , ніж та, що є близькою до $(+)$ гілки, і навпаки у нижній точці переходу.)

У випадку, що розглядається, $\tilde{P} \ll 1$ і середньоквадратичний крок дається (1.49). Нехтуючи малим кореляційним членом та наближаючи в ве-

дучому порядку за $\tilde{P} \Theta_t / \Theta_+ \approx \tilde{P}$,

$$\begin{aligned} \langle (2\pi(\delta J_{+\rightarrow t} - \langle \delta J_{+\rightarrow t} \rangle))^2 \rangle &\approx M_2(a\Theta_t)^2 + \\ &+ \frac{1}{12} \left(-a\Theta_t \ln \tilde{P} + \tilde{P}(b'_+ \Theta_t - b'_t \Theta_+) \right)^2, \end{aligned} \quad (1.53)$$

де $M_2 \approx 0.77$ – константа, що виникає з інтегралів з Γ -функціями.

Для подальшого просування потрібні вирази для коефіцієнтів a та b'_i . Наслідуючи [24], слід розкласти адіабатичні інваріанти за “енергетичною відстанню” від сепаратриси $h = \psi - \psi_s$ при фіксованому значенні “часу” ϑ . Тут ψ_s – положення сепаратриси, визначене із рівняння $\kappa^2(\psi_s, \vartheta) = 1$. Поблизу $\kappa^2 = 1$ для функції f справедлива оцінка

$$f(\kappa) = 1 - \frac{s}{4} \left(1 + \ln \frac{16}{|s|} \right) + O(s^2 \ln |s|),$$

де

$$s = 1 - \kappa^2 \approx -\frac{\partial \kappa^2}{\partial \psi} h$$

додатне для локально захоплених і від’ємне для локально пролітних частинок. Тоді для I_{\pm} можна отримати

$$\begin{aligned} I_{\pm} \approx \mp \frac{e\psi_p}{cN} \mp \frac{e\iota}{cN} h &+ \frac{1}{2} I_s + \frac{1}{2} \frac{\partial I_s}{\partial \psi} h - \\ &- \frac{1}{8} I_s \frac{\partial \kappa^2}{\partial \psi} h \ln \left| \frac{1}{16e} \frac{\partial \kappa^2}{\partial \psi} h \right| \end{aligned}$$

і коефіцієнти у (1.39) даються виразами

$$\begin{aligned} \frac{a_{\pm}}{2\pi} &\equiv \frac{a}{2\pi} = \frac{1}{8} I_s \frac{\partial \kappa^2}{\partial \psi} \\ \frac{b_{\pm}}{2\pi} &= \mp \frac{\iota}{N} + \frac{1}{2} \frac{\partial I_s}{\partial \psi} - \frac{1}{8} I_s \frac{\partial \kappa^2}{\partial \psi} \ln \left| \frac{1}{16} \frac{\partial \kappa^2}{\partial \psi} \right|, \end{aligned}$$

тоді як для локально захоплених частинок з $I_t = I_+ + I_-$ впливає $b_t = b_+ + b_-$, $a_t = 2a$. Позначаючи $b'_i = b_i - a_i \ln |\Theta_i|$ та залишаючи скрізь лише ведучі члени за \tilde{P} , після деяких перетворень можна отримати

$$\begin{aligned} b'_+ \Theta_t - b'_t \Theta_+ = b'_+ \Theta_- - b'_- \Theta_+ &= 2\pi \Theta_+ \left(\frac{\iota}{N} \tilde{P} - \frac{\partial I_s}{\partial \psi} + \right. \\ &\left. + \frac{I_s}{4} \frac{\partial \kappa^2}{\partial \psi} \ln \left| \frac{\pi}{8} \left\{ \kappa^2, \frac{\psi_p}{N} \right\} \right| \right). \end{aligned}$$

Крім цього, потрібно співвіднести зміну адіабатичного інваріанта із радіальним зміщенням точки, де дрейфова траєкторія частинки перетинає сепаратрису:

$$\delta\psi_{+\rightarrow t} = \left. \frac{d\psi}{dI_i} \right|_{\kappa^2=1} \delta J_{+\rightarrow t} \quad (1.54)$$

де

$$\left. \frac{d\psi}{dI_i} \right|_{\kappa^2=1} = \left. \frac{d\psi}{d\vartheta} \right|_{\kappa^2=1} \left(\frac{dI_i}{d\vartheta} \right)^{-1} = -\frac{\partial \kappa^2}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial \kappa^2}{\partial \psi} \right)^{-1} \frac{2\pi}{\Theta_i}.$$

Комбінуючи наведені вище формули, для середньоквадратичного радіального зміщення частинки при переході між локально пролітним та локально захопленим станами можна отримати

$$\langle (\delta\psi_{+\rightarrow t} - \langle \delta\psi_{+\rightarrow t} \rangle)^2 \rangle = \left(\frac{\pi I_s}{4} \frac{\partial \kappa^2}{\partial \vartheta} \right)^2 \left(M_2 - \frac{Q^2}{12} \right), \quad (1.55)$$

де

$$Q = \ln \tilde{P} + 2 \ln \left| \frac{\pi}{8} \left\{ \kappa^2, \frac{\psi_p}{N} \right\} \right| + 8 \frac{1}{I_s} \frac{\partial I_s}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial \kappa^2}{\partial \vartheta} \right)^{-1}.$$

Коефіцієнт стохастичної дифузії, що виникає внаслідок стрибків адіабатичних інваріантів при цих переходах, можна оцінити виразом

$$D = \left(\frac{dr}{d\psi} \right)^2 \langle (\delta\psi_{+\rightarrow t} - \langle \delta\psi_{+\rightarrow t} \rangle)^2 \rangle \frac{2P}{\tau}, \quad (1.56)$$

де τ – середній час між перетвореннями частинки у верхній точці переходу. Множник $2P$ враховує, що кожного разу, коли частинка з імовірністю P перетворюється на локально захоплену, відбувається два переходи між локально пролітним та локально захопленим станами. Використовуючи оцінку для τ з [21], (1.56) запишеться у вигляді

$$D = D^{(0)} \left(\frac{\pi^2}{12} \right)^{-1} \left(M_2 - \frac{Q^2}{12} \right), \quad (1.57)$$

де

$$D^{(0)} = \frac{\pi^3 R^2 \omega_B \bar{\rho}_l^4}{3N^2 a^4 r^3} \epsilon_{hm} \left(\frac{\partial \kappa^2}{\partial \vartheta} \right)^2 \frac{\delta}{\epsilon_h \epsilon_m + \epsilon_{hm} \epsilon_t + \delta / \delta_1}$$

– коефіцієнт стохастичної дифузії, що дається формулою (36) у [21]. Його можна отримати, підставивши в (1.54) вираз (1.52) замість (1.53).

Отриманий тут вираз для коефіцієнта стохастичної дифузії враховує лише внесок від переходів між локально захопленим та локально пролітними станами і нехтує можливим внеском в стохастичну дифузію від перетворення частинок між двома локально пролітними станами, тобто від зміни напрямку дрейфу локально пролітних частинок на протилежний. Цей внесок дається виразом

$$D_{\pm} = \left(\frac{dr}{d\psi} \right)^2 \langle (\delta\psi_{+\rightarrow-} - \langle \delta\psi_{+\rightarrow-} \rangle)^2 \rangle \frac{2}{\tau},$$

де середньоквадратичний крок адіабатичного інваріанта дається рівнянням (1.46). Цей внесок не враховується, бо неясно, чи можна вважати параметр переходу при кожному наступному переході між (+) та (-)-пролітними станами рівномірно розподіленою випадковою величиною. Крім цього, D_{\pm} має той самий порядок величини, що й $D^{(0)}$, і навряд чи вплине на будь-які висновки щодо наслідків стохастичної дифузії в даному випадку.

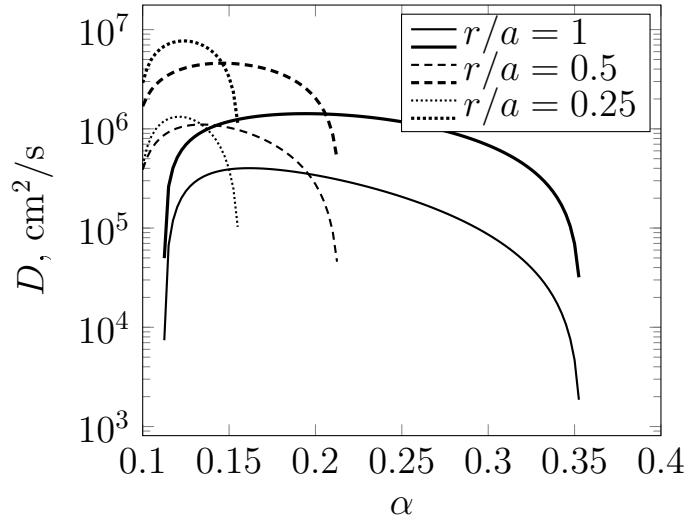


Рис. 1.3. Залежність коефіцієнта дифузії від пітч-кутового параметра $\alpha = \mathcal{E}/\mu\bar{B} - 1$ для різних r/a . Товсті лінії: D , тонкі лінії: $D^{(0)}$.

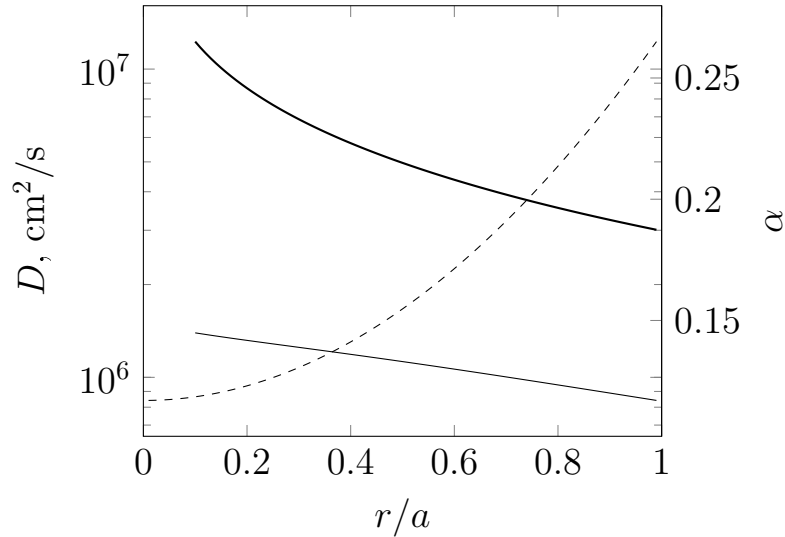


Рис. 1.4. Залежність коефіцієнтів дифузії від радіусу при $\alpha = (\alpha_{min} + \alpha_{max})/2$. Товсті лінії: D , тонкі лінії: $D^{(0)}$. Пунктирна лінія дає значення середнього α при кожному значенні радіусу.

1.2.7. Стохастична дифузія у реакторі-стелараторі Helias. Щоб порівняти D та $D^{(0)}$, було обраховано числові значення обох коефіцієнтів для тієї ж самої магнітної конфігурації та параметрів частинок, які були використані в роботі [21], а саме для термоядерних α -частинок у реакторі Helias з $\langle\beta\rangle = 4.7\%$, $B = 4.75T$ та $a/\bar{\rho}_l = 30$. Результати обчислень представлені на Рис. 1.3, 1.4. Загальний вигляд залежності D від r та α залишається тим самим, але значення, обчислені за формулою (1.57), перевищують попередні оцінки у кілька разів, особливо поблизу α_{max} , тобто для слабо перехідних частинок.

Вираз $D^{(0)}$ дає якісно правильні результати через те, що стрибки адіабатичного інваріанта є добутком фазового потоку частинок через сепаратрису та безрозмірного множника, що враховує інтервали, в яких розподілені параметри переходу, та структуру фазового простору біля сепаратриси (зокрема кількість і порядок наближень траєкторії частинки до гіперболічних точок). Фазові потоки між станами не залежать ні від параметрів переходу окремих частинок, ні від структури фазового простору

біля сепаратриси, і визначаються прямо із виразів для адіабатичних інваріантів (1.38). Імовірності переходів також залежать лише від цих потоків, тому виведений у цій роботі вираз для імовірності переходу співпадає з обчисленим у [21] іншим методом.

1.2.8. Підсумки. Виведено коефіцієнт стохастичної дифузії перехідних частинок у стелараторах типу Wendelstein, заснований на виразі для стрибків адіабатичного інваріанта в стелараторному магнітному полі, що враховує створювану магнітним полем асиметрію між локально пролітними частинками із протилежними знаками v_{\parallel} . Показано, що висновки роботи [21] залишаються якісно вірними незважаючи на використання виразу для стрибків адіабатичного інваріанта частинки у гармонічному електричному потенціалі, що повільно змінюється з часом [22, 23, 24], але коефіцієнт дифузії, обчислений за новою формулою, в кілька разів перевищує попередні оцінки. Перевищення особливо помітне для слабо перехідних частинок.

Результати досліджень здобувача у цьому розділі відображено в публікаціях [4, 3].

РОЗДІЛ 2

ВПЛИВ РАДІАЛЬНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ НА НАДТЕПЛОВІ ІОНИ

2.1. Покращення утримання локально захоплених іонів

2.1.1. Вступ. На стелараторі Wendelstein 7-X є кілька джерел надтеплових іонів, за допомогою яких нагрівається плазма [27]: інжекція нейтральних пучків (Neutral Beam Injection, NBI) і нагрівання на іонному циклотронному резонансі (Ion Cyclotron Resonance Heating, ICRH), також у проекті інжекція нейтральних пучків, утворених від’ємними іонами (Negative-ion-based Neutral Beam Injection, NNBI) [28]. Крім цього, інжекція нейтральних пучків використовується для діагностики. У реакторних плазмах, зокрема у реакторі-стелараторі Helias [20], важливим джерелом надтеплових іонів будуть термоядерні реакції, в яких утворюватимуться і пролітні, і захоплені іони. На противагу до цього, на W7-X інжектори утворюють здебільшого слабкопролітні частинки. Тим не менше, коли температура $T > 2$ кеВ і ефективне зарядове число $z_{eff} > 1$, у плазмі W7-X існує помітна популяція захоплених надтеплових іонів, бо за цих умов енергія інжекттованих іонів $\mathcal{E}_b \lesssim 60$ кеВ близька до критичної енергії $\mathcal{E}_* \propto (M_i/M_e)^{1/3}T$, для якої характерний час пітч-кутового розсіяння та характерний час заповільнення через кулонові зіткнення співпадають. Крім цього, діагностична інжекція та ICRH прямо утворюють захоплені частинки. Таким чином, і на W7-X, і на реакторі Helias у плазмі будуть присутні надтеплові іони з різними енергіями та пітч-кутами.

Основний засіб, за допомогою якого у стелараторах типу Wendelstein забезпечується добре утримання захоплених надтеплових іонів, це створе-

ння достатньо великого відношення тиску плазми до тиску магнітного поля $\beta \sim 5\%$. [29] За цієї умови діамagnetизм плазми запобігає утворенню незамкнених супербананових орбіт, замикаючи лінії рівня поздовжнього адіабатичного інваріанта та зменшуючи їх відхилення від магнітних поверхонь. Радіальне електричне поле E_r також впливає на утримання частинок, але на протигагу до діамagnetизму плазми, вплив електричного поля важливий лише для частинок із енергією меншою за певну порогову енергію, а саме таку енергію, для якої електрична дрейфова швидкість приблизно рівна магнітній дрейфовій швидкості. Крім цього, вплив електричного поля залежить від його знаку.

Радіальне електричне поле завжди існує у стелараторній плазмі. Його напруженість просто оцінити, припустивши, що $e\Phi \sim T = 2 - 10$ кеВ; у плазмі з малим радіусом $a = 0.5$ це дає $E_r \sim 4 - 20$ кВ/м. Насправді електричне поле може бути ще сильнішим, залежно від таких чинників, як транспортні властивості основної плазми, величини та радіальні профілі параметрів плазми, утримання надтеплових іонів тощо. Під час експериментів із поперечною інжекцією нейтральних пучків на Wendelstein 7-AS спостерігалось електричне поле з напруженістю $|E_r| = 20$ кВ/м [30]. Неокласичні обчислення у Wendelstein 7-X дають значення $E_r \lesssim 18$ кВ/м в центрі плазми (т.зв. електронний корінь) та $|E_r| \lesssim 5$ кВ/м ($E_r < 0$) на периферії плазми (іонний корінь). [31]

Метою цього підрозділу є дослідження впливу електричного поля на утримання захоплених надтеплових іонів у стелараторах типу Wendelstein, а саме у W7-X та у реакторі Helias. У пункті 2.1.2 виводяться баунс-усереднені рівняння руху локально захоплених частинок та дається їх якісний аналіз у наближенні, що розглядає лише найбільші фур'є-гармоніки магнітного поля стелараторів цього типу. У пункті 2.1.4 розглядається можливість використання радіального електричного поля для видалення попелу у реакторі Helias, а у пункті 2.1.5 наведені підсумки.

2.1.2. Баунс-усереднені рівняння та їх аналіз. Відомо, що рух ведучого центру частинки у стаціонарному магнітному полі \mathbf{B} та потенціальному електричному полі з потенціалом Φ , $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, описується рівняннями

$$\dot{\mathbf{r}}_{gc} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_E, \quad (2.1)$$

$$\dot{\rho}_{\parallel} = (\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_E) \cdot \nabla \rho_{\parallel}, \quad (2.2)$$

де $\dot{\mathbf{r}}_{gc} = d\mathbf{r}_{gc}/dt$, $\dot{\rho}_{\parallel} = d\rho_{\parallel}/dt$, \mathbf{r}_{gc} – радіус-вектор ведучого центру частинки, $\rho_{\parallel} = v_{\parallel}/\omega_B$, $v_{\parallel} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}$ швидкість руху вздовж силових ліній магнітного поля, $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$, $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}(\mathbf{r}_{gc})$,

$$v_{\parallel} = \sigma \sqrt{\frac{2}{m}[W - e\Phi - \mu_p B]}, \quad W = \mathcal{E} + e\Phi, \quad \frac{dW}{dt} = 0, \quad (2.3)$$

μ_p – магнітний момент частинки, $\mathcal{E} = mv^2/2$ – її кінетична енергія, e – заряд, $\sigma = v_{\parallel}/|v_{\parallel}|$, \mathbf{v}_D та \mathbf{v}_E – дрейфові швидкості, що даються виразами

$$\mathbf{v}_D = \frac{1}{\omega_B} \mathbf{b} \times \left(\frac{\mu_p}{m} \nabla B + v_{\parallel}^2 \mathcal{K} \right), \quad \mathbf{v}_E = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad (2.4)$$

$\mathcal{K} = B^{-2}(B\nabla_{\perp}B + 4\pi\nabla_{\perp}p)$ – кривина силових ліній магнітного поля, p – тиск плазми, а ω_B – циклотронна частота частинки.

Оскільки $\nabla v_{\parallel} = (e\mathbf{E} - \mu_p \nabla B)/mv_{\parallel}$, легко показати, що члени з електричним полем у правій частині рівняння (2.2) (позначені індексом “E”) можна записати у вигляді

$$(\dot{\rho}_{\parallel})^E = (\dot{\mathbf{r}}_{gc} \cdot \nabla \rho_{\parallel})^E = \frac{cE_{\parallel}}{B} + \frac{4\pi c v_{\parallel}}{\omega_B |B|^4} \mathbf{E} \cdot [\mathbf{B} \times \nabla p]. \quad (2.5)$$

Припустимо, що $\Phi = \Phi(r)$, де r – радіальна потокова координата. Тоді з рівняння (2.5) випливає, що $(\dot{\mathbf{r}}_{gc} \cdot \nabla \rho_{\parallel})^E = 0$, тобто рівняння для ρ_{\parallel} в присутності радіального електричного поля має таку саму форму, як і у відсутності електричного поля, на відміну від рівняння для v_{\parallel} , у яке електричне поле входить явним чином.

Приймаючи, що $\beta \ll 1$ та $N\iota r^2/R^2 \ll 1$, рівняння (2.1), (2.2) в бузерових координатах мають вигляд

$$\dot{r} = -\frac{v_d}{\epsilon} \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \vartheta}, \quad (2.6)$$

$$\dot{\vartheta} = v_{\parallel} \iota b^3 + \frac{v_d}{\epsilon} \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} + \Omega_E, \quad (2.7)$$

$$\dot{\varphi} = v_{\parallel} b^3, \quad (2.8)$$

$$\dot{\rho}_{\parallel} = -\frac{v_d}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial \varphi} + \iota \frac{\partial B}{\partial \vartheta} \right), \quad (2.9)$$

де $v_{\parallel} = \rho_{\parallel} \omega_{B0} B / \bar{B}$, $\omega_{B0} = e\bar{B}/(mc)$, $\Omega_E = -cE_1/(\bar{B}r)$ – частота викликаного електричним полем обертання в полоїдальному напрямку, обертальне перетворення $\iota = B^2/\bar{B}^3$, верхні та нижні індекси “1, 2, 3” позначають відповідно контраваріантні та коваріантні компоненти векторів, $\epsilon = r/R$, v_d – “токамачна” дрейфова швидкість, що дається рівнянням

$$v_d = \frac{v^2 + v_{\parallel}^2}{2\omega_{B0}R} = \left(\rho_{\parallel}^2 + \frac{\lambda \mathcal{E}_0 \bar{B}}{m\omega_{B0}^2 B} \right) \frac{\omega_{B0} |B|^2}{R |\bar{B}|^2}, \quad (2.10)$$

$\lambda = \mu_p \bar{B} / \mathcal{E}_0$ – пітч-кутовий параметр, $\mathcal{E}_0 \equiv \mathcal{E}(t=0)$, а $b^3 \approx B/(\bar{B}R)$. У рівняннях (2.6)-(2.8) знехтувано впливом малих компонентів вектора індукції магнітного поля B_1 та B_2 на дрейфовий рух частинки.

Якщо розкласти індукцію магнітного поля в ряд Фур’є за тороїдальним та полоїдальним кутами

$$B = \bar{B} \left[1 + \sum_{\mu \geq 0, \nu} \epsilon_B^{(\mu\nu)}(r) \cos(\mu\vartheta - \nu N\varphi) \right], \quad (2.11)$$

то рівняння (2.6)-(2.9) набувають вигляду

$$\dot{r} = \frac{v_d R \bar{B}}{r B} \sum_{\mu\nu \neq 0} \mu \epsilon_B^{(\mu\nu)} \sin(\mu\vartheta - \nu N\varphi), \quad (2.12)$$

$$\dot{\vartheta} = \iota \omega_{B0} \frac{\rho_{\parallel}}{R} \left(\frac{B}{\bar{B}} \right)^2 + \frac{v_d R \bar{B}}{r B} \sum_{\mu \geq 0, \nu} \frac{d\epsilon_B^{(\mu\nu)}}{dr} \cos(\mu\vartheta - \nu N\varphi) + \Omega_E, \quad (2.13)$$

$$\dot{\varphi} = \omega_{B0} \frac{\rho_{\parallel}}{R} \left(\frac{B}{\bar{B}} \right)^2, \quad (2.14)$$

$$\dot{\rho}_{\parallel} = v_d \frac{\bar{B}}{B} \sum_{\mu\nu \neq 0} (\mu - \nu N) \epsilon_B^{(\mu\nu)} \sin(\mu\vartheta - \nu N\varphi). \quad (2.15)$$

Ці рівняння інтегрує числовий код ORBIS [5]. Проте у багатьох випадках їх аналітичний та якісний аналіз також є корисним. Для цього нижче буде виведено усереднені рівняння дрейфового руху частинки. Усереднення можливе завдяки тому, що $N \gg 1$, тоді як для важливих фур'є-компонент магнітного поля $\mu \leq 1$ та $\nu \leq 1$, що приводить до існування двох масштабів модуляції B вздовж силової лінії, $\Delta\varphi \sim \pi/N$ та $\Delta\varphi \sim \pi$. Тому рух частинки можна представити як суперпозицію швидкого баунс-руху і повільного дрейфу, і усереднити рівняння (2.12)-(2.15) по швидкому руху.

2.1.3. Орбіти надтеплових іонів у стелараторі Wendelstein 7-

X. У багатьох стелараторах домінуючі гармоніки магнітного поля мають спільне $\nu \neq 0$, зокрема у стелараторах типу Wendelstein це значення $\nu = 1$. Тоді розвинення (2.11) зводиться до рівняння (1.33) (див. пункт 1.2.3), і усереднення рівнянь (2.12)-(2.15) руху локально захоплених частинок дає

$$\langle \dot{r} \rangle = \frac{\bar{v}_d}{\epsilon} \left[\frac{\partial \epsilon_{hm}}{\partial \vartheta} \left(\frac{2E(\kappa)}{K(\kappa)} - 1 \right) - \epsilon_t \sin \vartheta \right], \quad (2.16)$$

$$\langle \dot{\vartheta} \rangle = \frac{\bar{v}_d}{\epsilon} \left[-\frac{\partial \epsilon_{hm}}{\partial r} \left(\frac{2E(\kappa)}{K(\kappa)} - 1 \right) - \frac{\partial \epsilon_t}{\partial r} \cos \vartheta + \frac{\partial \epsilon_0}{\partial r} \right] + \Omega_E, \quad (2.17)$$

$$\langle \dot{\varphi} \rangle = \frac{1}{N} \frac{\partial \chi}{\partial \vartheta} \langle \dot{\vartheta} \rangle + \frac{1}{N} \frac{\partial \chi}{\partial r} \langle \dot{r} \rangle, \quad (2.18)$$

де $\bar{v}_d = v_d(v_{\parallel} = 0)$, $K = K(\kappa)$ та $E = E(\kappa)$ – повні еліптичні інтеграли відповідно першого і другого роду, κ дається рівнянням (1.35) з урахуванням електричного потенціалу

$$\kappa^2 = \frac{1}{2} + \frac{\alpha - e\Phi/(\mu_p \bar{B}) - \epsilon_0 + \epsilon_t \cos \vartheta}{2|\epsilon_{hm}|}, \quad \alpha = \frac{W}{\mu_p \bar{B}} - 1, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \epsilon_{hm}}{\partial r} = \frac{\epsilon_h - \epsilon_m \cos \vartheta}{\epsilon_{hm}} \frac{\partial \epsilon_h}{\partial r} + \frac{\epsilon_m - \epsilon_h \cos \vartheta}{\epsilon_{hm}} \frac{\partial \epsilon_m}{\partial r}, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \epsilon_{hm}}{\partial \vartheta} = \frac{\epsilon_m \epsilon_h}{\epsilon_{hm}} \sin \vartheta. \quad (2.21)$$

Рівняння (2.16) та (2.17) не містять тороїдальний кут φ і достатні для опису орбіт у площині (r, ϑ) . Рівняння (2.18) для $\langle \dot{\varphi} \rangle$ виведено у припущенні $N\varphi - \chi = \text{const}$, справедливому за умови $\epsilon_t \ll \max(\epsilon_m, \epsilon_h)$.

Локально захоплені частинки та повністю пролітні частинки мають відповідно $\kappa_{\max} < 1$ та $\kappa_{\min} > 1$, де $\kappa_{\max/\min}$ – найбільше/найменше значення $\kappa(r, \vartheta)$ на орбіті частинки $[\kappa(r, \vartheta)]$ не є інтегралом руху]. Частинки, що перетинають сепаратрису $\kappa = 1$, є перехідними (див. попередній підрозділ). Припускаючи, що ширина орбіт частинок (Δr) мала, з рівняння (2.19) можна отримати умови на пітч-кутовий параметр α для різних груп частинок:

$$\alpha_{\min} < \alpha^{loc} < \epsilon_0 + \epsilon_m - \epsilon_h - \epsilon_t, \quad (2.22)$$

$$\epsilon_0 + \epsilon_m - \epsilon_h - \epsilon_t < \alpha^{tran} < \epsilon_0 + \epsilon_m + \epsilon_h + \epsilon_t, \quad (2.23)$$

$$\alpha^{pass} > \epsilon_0 + \epsilon_m + \epsilon_h + \epsilon_t, \quad (2.24)$$

де α^{loc} , α^{tran} та α^{pass} – відповідно пітч-кутові параметри локалізованих, перехідних та пролітних частинок, а α_{\min} визначається з рівняння $\kappa(r, \vartheta) = 0$. Зокрема при $\vartheta = 0$ $\alpha_{\min} = \epsilon_0 - \epsilon_m + \epsilon_h - \epsilon_t$ і $\vartheta = \pi$ при $\alpha_{\min} = \epsilon_0 - \epsilon_m - \epsilon_h + \epsilon_t$. Потенціалом електричного поля Φ у рівняннях (2.22)-(2.24) знехтувано, що виправдано завдяки припущенню, що ширина орбіт частинок Δr мала. Коли $eE_r \Delta r / \mathcal{E} \gtrsim \epsilon_t$, електричне поле починає істотно впливати на умови (2.22)-(2.24).

Взявши до уваги, що ϵ_h та ϵ_t наближено пропорційні до r , та знехтувавши членами з ϵ'_m у рівнянні (2.20), можна побачити, що останній член у рівнянні (2.20) малий завдяки нерівності $d \ln \epsilon_m / d \ln r \ll 1$, тоді як передостанній член нехтовний за умови $r \epsilon_m d \epsilon_m / dr \ll \epsilon_h^2$, що має місце лише при

малих β (похідна ϵ_m зростає з β). Тим не менше, цей наближений аналіз непогано узгоджується із прямим числовим інтегруванням кодом ORBIS [5], і має ту перевагу, що дозволяє отримати загальну якісну картину впливу радіального електричного поля на утримання надтеплових іонів.

З урахуванням наведених вище наближень, рівняння (2.16), (2.17) спрощуються до

$$\langle \dot{r} \rangle = u \sin \vartheta, \quad (2.25)$$

$$r \langle \dot{\vartheta} \rangle = u \cos \vartheta + w, \quad (2.26)$$

де

$$u = \frac{\bar{v}_d}{\epsilon} \left[\frac{\epsilon_m \epsilon_h}{\epsilon_{hm}} \left(\frac{2E(\kappa)}{K(\kappa)} - 1 \right) - \epsilon_t \right], \quad (2.27)$$

$$w = \frac{\bar{v}_d}{\epsilon} \left[r \epsilon'_0 - \frac{\epsilon_h^2}{\epsilon_{hm}} \left(\frac{2E(\kappa)}{K(\kappa)} - 1 \right) \right] + v_E, \quad (2.28)$$

штрихом позначено похідну за радіусом, $v_E = r \Omega_E$, і, взагалі кажучи, $u = u(r, \vartheta)$, $w = w(r, \vartheta)$.

Легко побачити, що, коли

$$\delta \equiv \left| \frac{w}{u} \right| \ll 1, \quad (2.29)$$

рівняння (2.25), (2.26) дають $x \equiv r \cos \vartheta \approx \text{const}$, тобто частинки не утримуються. У протилежному випадку $\delta \gg 1$ частинки добре утримуються, принаймні якщо u та w слабо залежать від ϑ . Для утримання частинок достатньо, щоб нерівність $\delta \gg 1$ виконувалася лише на периферії плазми. Крім того, видно, що $\delta \rightarrow \infty$ за умови $u \rightarrow 0$, тобто коли радіальний дрейф частинок зануляється. Зокрема у стелараторах із $\epsilon_m \gg \epsilon_h$ радіальний дрейф глибоко захоплених частинок мінімальний за умови

$$\epsilon_h = \epsilon_t. \quad (2.30)$$

Припускаючи спершу, що радіальне електричне поле відсутнє, а тиск плазми нехтовно малий ($\epsilon'_0 \approx 0$), можна отримати

$$\delta = \left| \frac{\frac{\epsilon_h^2}{\epsilon_{hm}} \left(\frac{2E(\kappa)}{K(\kappa)} - 1 \right)}{\frac{\epsilon_m \epsilon_h}{\epsilon_{hm}} \left(\frac{2E(\kappa)}{K(\kappa)} - 1 \right) - \epsilon_t} \right|. \quad (2.31)$$

З рівняння (2.31) випливає, що $\delta \ll 1$ для слабо захоплених частинок з $\kappa \sim 0.9$. Проте $\kappa = \kappa(r, \vartheta)$ змінюється в ході орбітального руху, і частинки з $\kappa \sim 0.9$ не обов'язково втрачатимуться. Якщо κ зростає далі, орбіта перетворюється на локально пролітну і може зазнавати стохастичної дифузії (див. попередній підрозділ). Поведінка глибоко захоплених частинок ($\kappa \ll 1$) та частинок, близьких до перехідних ($\kappa \rightarrow 1$) залежить від співвідношень між гармоніками магнітного поля. Зокрема, у конфігураціях з високою дзеркальною гармонікою [$\epsilon_m \gg \max(\epsilon_h, \epsilon_t)$] з рівняння (2.31) випливає, що $|\delta| \sim \epsilon_h/\epsilon_m \ll 1$, тобто частинки не утримуються. У протилежному випадку, коли дзеркальна гармоніка мала, $\delta \sim (\epsilon_h/\epsilon_t)|2E(\kappa)/K(\kappa) - 1|$, $\delta > 1$ при $\epsilon_h > \epsilon_t$ та $\kappa \lesssim 0.9$, тобто частинка рухається по супербанановій орбіті шириною $\Delta r \sim r\sqrt{\epsilon_t/\epsilon_h}$. [32]

Скінченний тиск плазми допомагає утримувати локалізовані частинки у конфігураціях із великою дзеркальною гармонікою. Якщо $\kappa \rightarrow 0$, це матиме місце за умови $r\epsilon'_0/\epsilon_h \gg 1$ (тоді $\delta \gg 1$). Для утримання частинок із ненульовим κ такої жорсткої умови не потрібно: беручи $\epsilon_h \propto \epsilon_t \propto \epsilon$ та $\epsilon_0 \propto r^2$, можна висувати, що $u \approx \text{const}$ та $\delta \propto r$ для глибоко захоплених частинок. Орбіти частинок, що даються рівняннями (2.25), (2.26) матимуть вигляд

$$x - x_0 = \frac{\delta_1}{2a}(r_0^2 - r^2), \quad (2.32)$$

де δ_1 визначається із $\delta = \delta_1 r/a$, а (r_0, ϑ_0) – точка на орбіті частинки. Це дає орбіту із шириною $\Delta r/a = 2/\delta_1$. Хоча рівняння (2.32) було отрима-

но у припущенні $E_r = 0$, воно справедливе і у присутності електричного поля, якщо $E_r \propto r$. На якісному рівні його можна використовувати для довільного електричного поля [коли E_r мале, ним можна знехтувати; коли E_r настільки велике, що $\delta \gg 1$, рівняння (2.32) дає рух частинок по поверхням $r = \text{const}$, незалежно від радіального профілю E_r].

Переходячи до аналізу впливу електричного поля, перш за все слід відзначити, що знаки члена із ϵ'_0 та члена з електричним полем у рівнянні (2.26) однакові при $E_r < 0$. Отже, від'ємне радіальне електричне поле може утримувати локально захоплені частинки у конфігурації з великою дзеркальною гармонікою навіть коли β недостатньо велике, щоб утримувати їх при $E_r = 0$. Потрібну для цього величину електричного поля можна оцінити із умови $|v_E|/u \gg 1$, що дає

$$|E_r(r_*)| \gg \mathcal{E} \frac{\epsilon_h - \epsilon_t}{er} \Big|_{r=r_*}, \quad (2.33)$$

де r_* – радіус, на якому електричне поле досягає максимуму, і $\epsilon_h \neq \epsilon_t$. Обмеження $\epsilon_h \neq \epsilon_t$ є наслідком використаного при виведенні рівняння (2.33) наближення $\epsilon_{hm} \approx \epsilon_m$ та припущення, що $\kappa = 0$. Разом це дає $u \propto \epsilon_h - \epsilon_t$, що невірно, коли $\epsilon_h = \epsilon_t$. Коли $e\Phi \sim T$, рівняння (2.33) можна записати як умову на енергію частинки:

$$\mathcal{E} \ll \frac{T}{\epsilon_h - \epsilon_t}. \quad (2.34)$$

Слід відзначити, що коли у рівнянні (2.28) домінує член з електричним полем, рівняння (2.34) дає умову утримання частинки незалежно від знака електричного поля.

Нижче буде показано, що присутності радіального електричного поля у вузькому інтервалі радіусів може бути достатньо, щоб запобігти втраті частинок із плазми, тобто що локалізоване по радіусу від'ємне електричне поле може відігравати роль бар'єру для надтеплових іонів. Таке еле-

ктричне поле часто утворюється в турбулентних плазмах із транспортними бар'єрами, та/або коли іонний корінь неокласичного транспорту домінує у частині об'єму плазми.

Щоб частинки утримувались, ширина області локалізації електричного поля, Δ_E , має перевищувати радіальне відхилення частинки $(\Delta r)_E$ всередині цієї області локалізації. Припустивши, що електричний бар'єр локалізовано на периферії плазми, а частинка підходить до нього з центру плазми, радіальне відхилення частинки всередині бар'єру буде меншим за Δr . Беручи $(\Delta r)_E \sim \Delta r/2$ з $\Delta r = 2a/\delta_1$ і припускаючи, що $\delta_E \sim \delta$, можна записати умову $\Delta_E > (\Delta r)_E$ у вигляді

$$e|E_r(r_*)|\Delta_E > \mathcal{E}(\epsilon_h - \epsilon_t)|_{r=r_*}. \quad (2.35)$$

де знову $\epsilon_h \neq \epsilon_t$. Можна сказати, що рівняння (2.35) дає умову для електричного транспортного бар'єру для захоплених надтеплових іонів.

На відміну від від'ємного електричного поля, додатне електричне поле конкурує із сприятливим впливом скінченного тиску плазми на утримання захоплених частинок у конфігураціях із великою дзеркальною гармонікою. Повна компенсація відбувається при певному значенні електричного поля, а саме

$$E_r \sim \bar{B} \frac{\bar{v}_d}{c} R \epsilon'_0. \quad (2.36)$$

Коли $E_r \sim \Phi/r \sim T/(er)$, енергію частинок, які не утримуються внаслідок такої компенсації діамagnetизму плазми, можна оцінити як $\mathcal{E} \sim T/(r\epsilon'_0)$.

Згідно (2.32), утримання частинок найгірше, коли $\delta = 0$ і частинки рухаються вздовж ліній $x = \text{const}$, що відповідає орбітам із шириною $\Delta r = \infty$. Тому має сенс ввести поняття резонансного електричного поля E_r^{res} , яке визначається умовою $\delta = 0$. Для глибоко захоплених частинок воно дається виразом

$$E_r^{res} \approx \bar{B} \frac{\bar{v}_d}{c\epsilon} \left[r\epsilon'_0 - \frac{\epsilon_h^2}{\epsilon_{hm}} \right]. \quad (2.37)$$

Оскільки E_r не залежить від ϑ , це рівняння може виконуватися або при $\epsilon_m \gg \epsilon_h$, або при $\epsilon_m \ll \epsilon_h$. Коли другий член у рівнянні (2.37) перевищує перший, утриманню частинок буде шкодити не додатне, а від'ємне електричне поле. Але в системах з домінуючою дзеркальною гармонікою це має місце лише тоді, коли захоплені надтеплові іони не утримуються і у відсутності електричного поля. Слід відзначити, що, коли $\epsilon_0 = \epsilon_m = 0$, рівняння (2.37) зводиться до резонансного електричного поля $E_r^{res} \sim -\epsilon_h \mathcal{E}/(er) < 0$, отриманого у роботі [33].

Коли дзеркальна гармоніка магнітного поля домінує, а радіальна залежність діамагнітної компоненти від радіуса наближено описується $\epsilon_0 \propto r^2$, електричне поле (2.37) пропорційне до r , тобто це поле відповідає жорсткому обертанню плазми із частотою

$$\Omega_E^{res}(r) = -\omega_B \frac{\rho^2 \epsilon_0}{r^2} \left(1 - \frac{\epsilon_h^2}{2\epsilon_0 \epsilon_m} \right) = const, \quad (2.38)$$

де $\rho = v/\omega_B$. Ширину резонансу можна оцінити, взявши до уваги, що частинки не утримуються при малих δ . Приймаючи $\delta < \delta_*$ з $\delta_* > 2$ на периферії плазми, для інтервалу частот обертання, де частинки не утримуються, можна отримати

$$\Omega_{min} < |\Omega_E| < \Omega_{max}, \quad (2.39)$$

де

$$\Omega_{max/min} = \omega_B \frac{\rho^2}{r^2} \left[\epsilon_0 - \frac{\epsilon_h^2}{2\epsilon_m} \pm \frac{\delta_*}{2} (\epsilon_h - \epsilon_t) \right], \quad (2.40)$$

і знову $\epsilon_h \neq \epsilon_t$. Додатково вимагаючи, щоб $\Omega_E(r) = const$, можна отримати $\delta_* = \delta_{*1} r/a$, де δ_{*1} – параметр.

Варто зазначити, що відносна ширина резонансу не залежить від енергії частинки:

$$\frac{\Delta\Omega_E}{\Omega_E^{res}} = \frac{\delta_*(\epsilon_h - \epsilon_t)}{\epsilon_0 - \frac{\epsilon_h^2}{2\epsilon_m}}, \quad (2.41)$$

де $\Delta\Omega_E = \Omega_{max} - \Omega_{min}$.

Рівняння (2.38)-(2.40) записані для частинок із заданою енергією. Якщо заданою вважати частоту обертання плазми, ці рівняння визначають резонансну енергію \mathcal{E}^{res} та енергетичну ширину резонансу, $\Delta\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}^{res} = -\frac{m\omega_B\Omega_E r^2}{2\left(\epsilon_0 - \frac{\epsilon_h^2}{2\epsilon_m}\right)}, \quad (2.42)$$

$$\frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}^{res}} = \frac{\delta_{*1}(\epsilon_h - \epsilon_t) \left(\epsilon_0 - \frac{\epsilon_h^2}{2\epsilon_m}\right) \frac{r}{a}}{\left(\epsilon_0 - \frac{\epsilon_h^2}{2\epsilon_m}\right)^2 - \frac{\delta_{*1}^2}{4}(\epsilon_h - \epsilon_t)^2}, \quad (2.43)$$

де $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_{max} - \mathcal{E}_{min}$, $\mathcal{E}_{max/min}$ – максимальна/мінімальна енергія частинок, які потрапляють у резонанс. З рівнянь (2.41), (2.43) видно, що ширина резонансу пропорційна до $\epsilon_h - \epsilon_t$. Проте вона не зануляється при $\epsilon_h \rightarrow \epsilon_t$, бо в цьому випадку стають важливими скінченність κ та різниця між ϵ_{hm} і ϵ_m . Резонанс не симетричний відносно \mathcal{E}^{res} : $\mathcal{E}_{max} - \mathcal{E}^{res} > |\mathcal{E}_{min} - \mathcal{E}^{res}|$. Це видно з рівнянь

$$\frac{\mathcal{E}_{max/min}}{\mathcal{E}^{res}} = \frac{\epsilon_0 - \frac{\epsilon_h^2}{2\epsilon_m}}{\epsilon_0 - \frac{\epsilon_h^2}{2\epsilon_m} \mp 0.5\delta_{*1}(\epsilon_h - \epsilon_t)\frac{r}{a}}. \quad (2.44)$$

З рівняння (2.44) випливає, що $\mathcal{E}_{max} = \infty$ при $(\epsilon_0 - 0.5\epsilon_h^2/\epsilon_m) = 0.5\delta_{*1}(\epsilon_h - \epsilon_t)r/a$. Це знову вказує на те, що в такому випадку потрібно враховувати скінченність κ та різницю між ϵ_{hm} і ϵ_m , щоб отримати правильну величину \mathcal{E}_{max} .

Основні рівняння цього пункту (2.16), (2.17) також можна вивести, починаючи з поздовжнього адіабатичного інваріанту локально захоплених частинок (1.36).

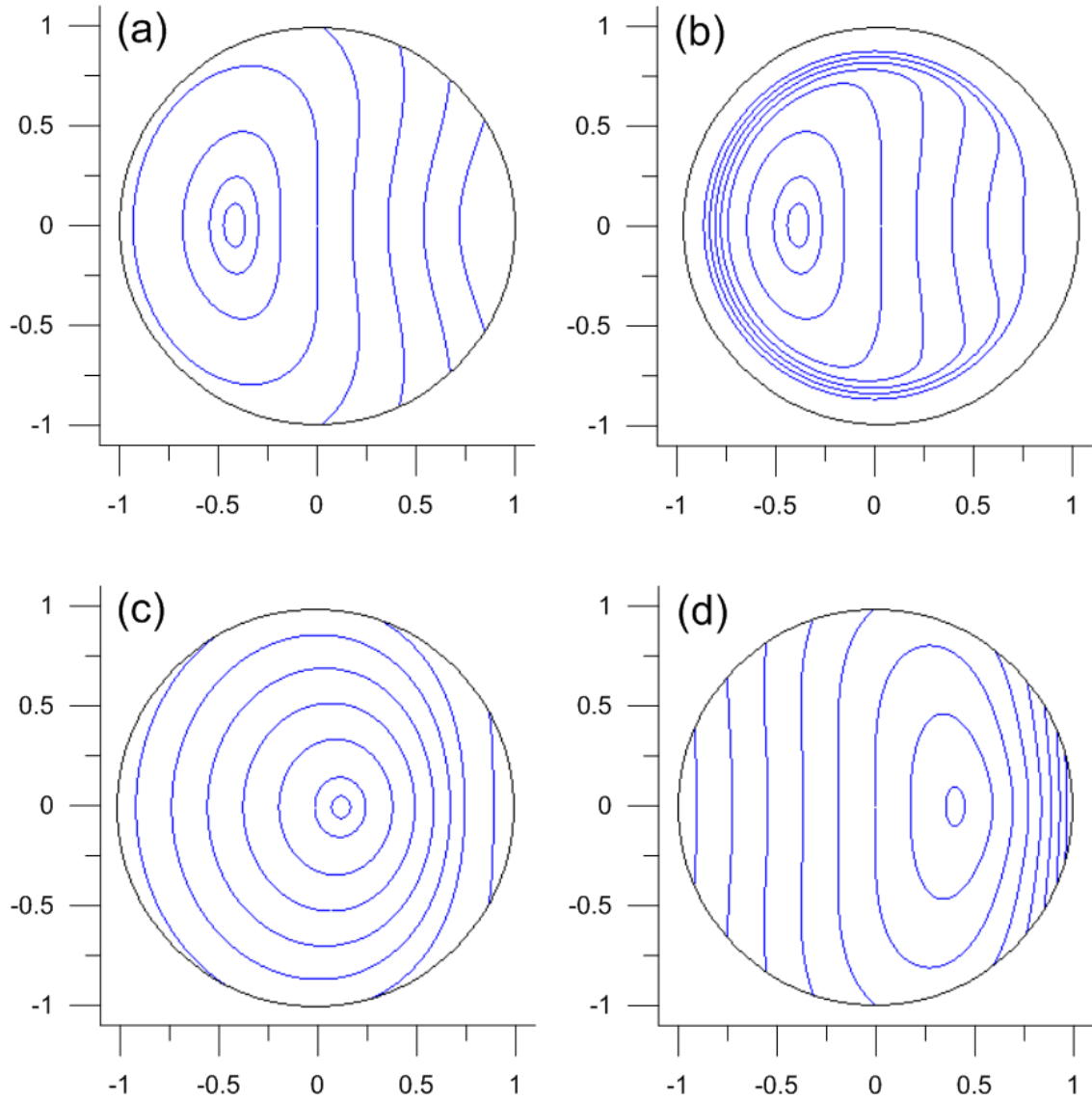


Рис. 2.1. Контури $J_{\parallel} = \text{const}$ для протонів з енергією $\mathcal{E} = 50$ кеВ у W7-X: (а), глибоко захоплені частинки з $\alpha = -0.05$ при $E_r = 0$; (б), ті ж самі частинки у присутності електричного транспортного бар'єру $E(r) = -E_*e^{-(r-r_*)^2/\Delta_E^2}$ з $E_* = 5.8$ кВ/м, $r_*/a = 0.9$ та шириною $\Delta_E = 0.1$ м; (с), помірно захоплені частинки з $\alpha = 0$ при $E_r = 0$; (д), ті ж самі частинки, що у (с), але у присутності резонансного поля з $|\Omega_E| = 8 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $E_r > 0$. Розрахунки базуються на рівнянні (1.36).

Цікаво розглянути вплив електричного поля за допомогою позовжнього адіабатичного інваріанту (1.36). На рис. 2.1 показані контури $J_{\parallel} = \text{const}$ для локально захоплених частинок у конфігурації W7-X з великою дзеркальною гармонікою. З графіка (а) видно, що значний відсоток глибоко захоплених частинок не утримується. Неоднорідне від'ємне електричне поле, локалізоване при $r_* = 0.9a$, замикає контури J поблизу r_* , тому частинки будуть утримуватися (б). Помірно захоплені частинки утримуються у відсутності електричного поля (с), а у присутності додатнього електричного поля, що відповідає частоті обертання плазми Ω_E^{res} , вони утримуються значно гірше (d).

2.1.4. Видалення попелу додатнім електричним полем у реакторі-стелараторі Helias. Існування резонансного електричного поля не обов'язково приносить шкоду: таке поле може допомогти видаляти попіл (термалізовані чи частково термалізовані α -частинки) у термоядерному реакторі. Для цього електричне поле має задовольняти певним вимогам. Оскільки вплив електричного поля на утримання мало залежить від сорту частинок, слід підбирати електричне поле такої величини, щоб воно видаляло частково термалізовані α -частинки і не заторкувало іони основної плазми. Величину такого електричного поля можна оцінити із рівняння (2.42), підставляючи енергію частинок в діапазоні $T \ll \mathcal{E} \ll 3.5 \text{ MeV}$. Резонанс також має бути не надмірно широким, щоб не заторкнути гарячі MeV-ні α -частинки і не погіршити їх утримання.

У реакторі Helias з $N = 5$, середнім магнітним полем $\bar{B} = 5 \text{ тл}$ та малим радіусом плазми $a = 2 \text{ м}$ основні гармоніки магнітного поля можна наближено описати функціями $\epsilon_0 = 0.08r^2/a^2$, $\epsilon_m = 0.1 + 0.02r^2/a^2$, $\epsilon_h = 0.08r/a$ та $\epsilon_t = 0.043r/a$. Тоді з рівняння (2.42) можна отримати $\Omega_E \approx -240 \text{ с}^{-1}$ для $\mathcal{E}^{\text{res}} = 100 \text{ кеВ}$. Мінімальну енергію частинок, які втрачатимуться за наявності резонансного електричного поля, можна оцінити з рівняння (2.44);

при $\delta_{*1} \sim 3$ вона складе $\mathcal{E}_{min} \sim 50$ кеВ. Знаменник у рівнянні (2.44) наближається до нуля при $\delta_{*1} \gtrsim 3$, тому слід очікувати, що значення \mathcal{E}_{max} , яке воно дає, буде завищеним.

Ці оцінки узгоджуються з результатами прямого числового інтегрування рівнянь руху частинок кодом ORBIS [5]. На рис. 8 у цій роботі показані полоїдальні проекції орбіт сильно захоплених частинок, орбіти яких починаються на магнітній поверхні $r = 0.3a$: частинки з енергіями $60 \lesssim \mathcal{E} \lesssim 170$ кеВ втрачаються за час порядку часу прецесії, а частинки з енергіями $\mathcal{E} \gtrsim 200$ кеВ, як і відносно холодні частинки з енергіями $\mathcal{E} \lesssim 50$ кеВ, утримуються.

Слід відзначити, що ці оцінки та розрахунки не показують, який відсоток частково термалізованих частинок видалятиметься з реактора. Крім цього, вони проводилися у припущенні параболічного профілю електричного потенціалу, що давало $\Omega_E(r) = const$. Для остаточної відповіді на питання, чи може електричне поле справді вирішити проблему видалення попелу, потрібне набагато більш детальне та реалістичне моделювання. З іншого боку, завдяки тому, що резонанс досить широкий, вплив електричного поля на утримання слабо залежить від радіального профілю електричного поля.

2.1.5. Висновки. У цьому підрозділі баунс-усереднені рівняння руху ведучого центру частинок використані для якісного аналізу впливу електричного поля на орбіти захоплених частинок у системах, де дзеркальна гармоніка магнітного поля домінує або є порівняною з найбільшими гармоніками, що має місце у стелараторах типу Wendelstein. Результати, отримані за допомогою аналізу усереднених рівнянь для Wendelstein 7-X та реактора Helias, узгоджуються з результатами числового моделювання за допомогою коду ORBIS [5].

Показано, що присутність від'ємного електричного поля сприяє утри-

манню локально захоплених іонів. Іони утримуються електричним полем, якщо їх енергія не перевищує певної величини. Електричне поле, локалізоване у кільці (тобто у певному інтервалі за радіусом) може грати роль транспортного бар'єра для надтеплових іонів.

Додатне електричне поле погіршує утримання локально захоплених іонів, крім випадку дуже великих значень напруженості поля відносно енергії частинок. Шкідливий вплив додатного електричного поля особливо сильний, коли частота викликаного ним жорсткого обертання плазми близька до певних резонансних значень. Резонансна швидкість обертання, Ω_E^{res} , є функцією енергії частинки, \mathcal{E} . Коли $\Omega_E = \Omega_E^{res}$, сильно захоплені частинки з відповідною енергією втрачаються з плазми. Резонанс може бути досить широким – ширина інтервалу частот $\Delta\Omega_E^{res}$, в якому частинки із заданою енергією втрачаються з плазми, досить велика – тому цей ефект є досить “грубим”. Якщо ж розглядати вплив заданого додатного електричного поля, велика ширина резонансу означає, що електричне поле може приводити до втрат частинок у досить широкому інтервалі енергій $\Delta\mathcal{E}$.

Додатне електричне поле, яке задовільняє резонансній умові для частинок з енергіями $T \ll \mathcal{E} \ll 3.5 \text{ MeV}$, може бути корисним для видалення частково термалізованих α -частинок (попелу) із плазми реактора Helias. У присутності такого поля на функції розподілу α -частинок в резонансній області утвориться конус втрат. Якщо характерний час пітч-кутового розсіяння від кулонових зіткнень буде порівняний із часом заповільнення, що має місце при $\mathcal{E}^{res} \lesssim (M_i/M_e)^{1/3}T$, з плазми видалятимуться не тільки локально захоплені, а і заповільнені пролітні α -частинки. Крім цього, завдяки анізотропії функції розподілу можуть збуджуватися плазмові нестійкості, які також сприятимуть видаленню попелу. Таким чином, радіальне електричне поле може допомогти розв'язати проблему видалення попелу у реакторі Helias.

Електричне поле впливатиме також на утримання перехідних частинок,

чому присвячено наступний підрозділ 2.2.

2.2. Зменшення дифузійних втрат перехідних іонів

2.2.1. Вступ. У цьому підрозділі запропоновано метод зменшення наслідків стохастичної дифузії, викликаной переходами частинок, описаними у підрозділ 1.2. А саме, пропонується модифікувати магнітну конфігурацію таким чином, щоб сепаратриси, які розділяють області локально пролітних та локально захоплених орбіт, були замкнені всередині плазми. Нижче буде показано, що це зменшує втрати частинок від стохастичної дифузії, хоча сама дифузія продовжує відбуватися. Хоча розглядається магнітна конфігурація, характерна для стелараторів типу Wendelstein (а саме стандартна конфігурація W7-X), основна ідея застосовна і до інших магнітних конфігурацій.

Підрозділ складається з трьох пунктів та висновків. У пункті 2.2.2 описані прийняті наближення щодо магнітного поля та рівняння сепаратрис. У пункті 2.2.3 подається головна ідея методу зменшення наслідків стохастичної дифузії. У пункті 2.2.4 зроблені числові оцінки для стандартної конфігурації W-7X, а у пункті 2.2.5 даються висновки.

2.2.2. Сепаратриси перехідних частинок за відсутності та наявності радіального електричного поля. У цьому підрозділі розглядатиметься модель магнітного поля, в якій не дорівнюють нулю лише то-роїдальна ($\mu = 1, \nu = 0$), дзеркальна ($\mu = 0, \nu = 1$), гвинтова ($\mu = \nu = 1$) та діамагнітна ($\mu = \nu = 0$) гармоніки. Саме ці гармоніки є найбільшими у стелараторі W7-X та реакторах типу Helias. У конфігураціях W7-X ці чотири гармоніки у кілька разів більші, ніж найбільша з решти гармонік [25], тому вони домінують у розділенні фазового простору на області пролітних та захоплених частинок. Щоб спростити подальші обчислення, для цих гармонік приймаються наближені розвинення у вигляді лінійних та ква-

дратичних функцій x : $\epsilon_{10} \equiv -\epsilon_t = -c_t x$, $\epsilon_{11} \equiv -\epsilon_h = -c_h x$, $\epsilon_{00} \equiv \epsilon_0 = c_0 x^2$ and $\epsilon_{01} \equiv \epsilon_m = \epsilon_{m0} + c_m x^2$, де c_m , c_h , c_t , c_0 та ϵ_{m0} – додатні константи, які визначаються вибраною магнітною конфігурацією. У W7-X з відповідним підбором коефіцієнтів ці вирази дають похибку менше 5 відсотків. Тоді індукцію магнітного поля в бузерових координатах (див. підрозділ 1.1.2) можна записати у вигляді

$$\frac{B}{\bar{B}} = 1 + c_0 x^2 - c_t x \cos \theta + \epsilon_{hm}(x, \theta) \cos[N\varphi + \chi(x, \theta)], \quad (2.45)$$

де $\epsilon_{hm}^2 = \epsilon_m^2 - 2\epsilon_m c_h x \cos \theta + c_h^2 x^2$, $\chi(x, \theta) = \cos^{-1}[(\epsilon_m - c_h x \cos \theta)/\epsilon_{hm}]$, безрозмірна радіальна координата $0 < x < 1$ визначається із $\psi = \psi_a x^2$, а ψ_a – тороїдальний магнітний потік на границі плазми.

У наближенні ведучих центрів, швидкість частинки з масою M , зарядом e , повною енергією W та магнітним моментом μ_p вздовж силової лінії магнітного поля дається виразом $v_{\parallel}^2 = 2(W - \mu_p B - e\Phi)/M$, де Φ – потенціал електричного поля; надалі для зручності приймається, що він дорівнює нулю в центрі плазми, тобто при $x = 0$ повна енергія частинки W співпадає з її кінетичною енергією $Mv_{\parallel}^2/2 + \mu_p B$. У модельному магнітному полі вираз для v_{\parallel} спрощується до

$$v_{\parallel}^2 = 2\mu_p \bar{B} \epsilon_{hm} \{\kappa^2 - \sin^2[(\varphi - \chi)/2]\}/M, \quad (2.46)$$

де

$$\kappa^2 = \frac{\alpha - \phi - (c_0 x^2 - c_t x \cos \theta)}{2|\epsilon_{hm}|} + \frac{1}{2}, \quad (2.47)$$

$\alpha = W/(\mu_p \bar{B}) - 1$ – пітч-кутовий параметр, а $\phi = e\Phi/(\mu_p \bar{B})$ – нормалізований потенціал електричного поля. Якщо дрейф частинки поперек силових ліній достатньо повільний порівняно із її поздовжнім рухом та $\iota/N \ll 1$, координати x та θ мало змінюватимуться на одному періоді баунс/пролітного руху. Тоді можна вивчати рух частинки по φ з фіксованими x та θ , розглядаючи φ як “швидку” змінну, а x та θ – як “повільні” змінні. З точки

зору швидкого руху за φ , вираз (2.46) є швидкістю нелінійного маятника, а сепаратриса між його “обертанням” (локально пролітним рухом) та “лібрацією” (локально захопленим рухом) дається рівнянням $\kappa^2(x, \theta) = 1$. Адіабатичний інваріант, пов’язаний зі швидким поздовжнім рухом, дається виразами [12]:

$$J^* = \begin{cases} \sigma \frac{e}{Nc} \Psi_p + \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi/N} d\varphi \frac{B_\varphi}{B} v_{\parallel} & \text{для пролітних частинок,} \\ \frac{M}{2\pi} \oint d\varphi \frac{B_\varphi}{B} v_{\parallel} & \text{для захоплених частинок,} \end{cases} \quad (2.48)$$

де $\sigma = \text{sgn}(v_{\parallel})$, Ψ_p – полоїдальний магнітний потік, а B_φ – коваріантна компонента \mathbf{B} . Інтеграли тут беруться при сталих x та θ , для захоплених частинок – між їх точками повороту.

2.2.3. Замкнення сепаратрис перехідних частинок. Щоразу, коли внаслідок прецесії по x та θ перехідні частинки перетинають сепаратрису $\kappa^2(x, \theta) = 1$, вони перетворюються з локально пролітних на локально захоплені і навпаки. Адіабатичність поздовжнього інваріанту J^* біля сепаратрис порушується, він зазнає випадкових стрибків, які і приводять до стохастичної дифузії. Проте форма сепаратрис не залежить від значення адіабатичного інваріанту, а визначається лише W та μ_p ; у відсутності електричного поля, ці два параметра входять до (2.47) лише через пітч-кутовий параметр α . У наближенні ведучих центрів усі три величини W , μ_p та α є інтегралами руху, і порушення адіабатичності J^* на них не впливає. Тому під час стохастичної дифузії дана частинка завжди перетинатиме одну й ту ж саму сепаратрису, хоча її орбіта (яка на додачу до W та μ_p визначається ще й J^*) змінюватиметься після кожного перетину. Точка перетину орбіти сепаратрисою, звичайно, блукатиме вздовж сепаратрис.

Це спостереження дає підстави виснувати, що не кожна частинка, яка зазнає стохастичної дифузії, обов’язково втрачатиметься з плазми. Схематично це зображено на рис. 2.2, де показані усереднені по баунс/пролітному

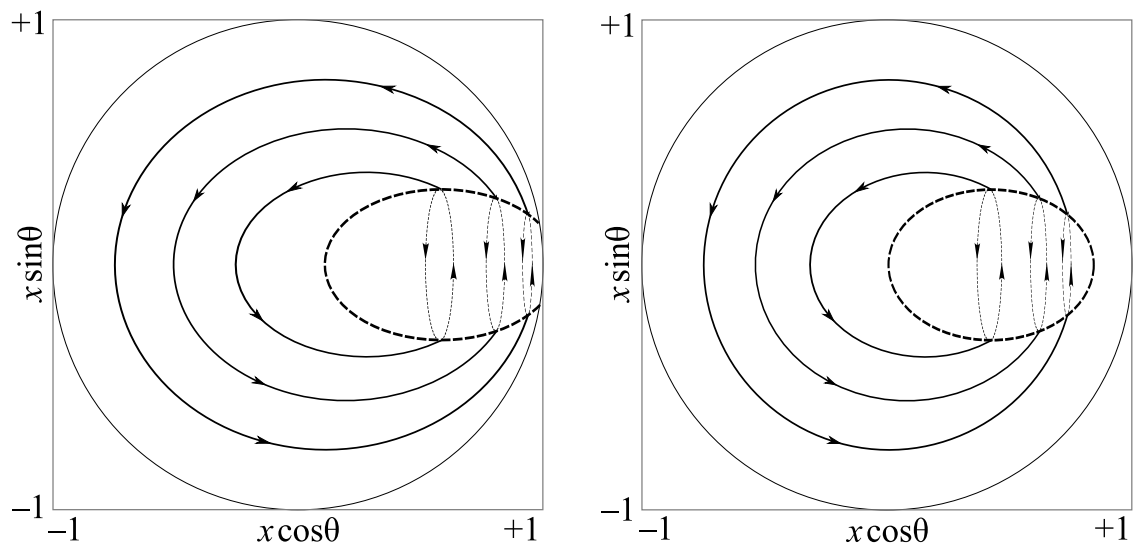


Рис. 2.2. Схематичне зображення двох типів сепаратрис. Зліва: частинка втрачається з плазми, коли точка перетину випадково блукає вздовж сепаратрис. Справа: “орбіта” точки перетину замкнена всередині плазми. Тонкою лінією позначено границю плазми, товстою штрихованою – сепаратриса, лінії зі стрілками позначають різні орбіти заданої частинки під час стохастичної дифузії (рух в локально пролітному стані між точками відбиття показано всередині, а прецесію у локально захопленому стані – зовні сепаратрис).

періоду траєкторії руху частинок у полоїдальній площині. Якщо сепаратриса даної частинки замкнена всередині плазми, а її баунс-усереднені орбіти в локально захопленому стані достатньо близькі до $x = \text{const}$ (рис. 2.2, справа), незважаючи на стохастичну дифузію, частинка не може вийти з плазми. Навпаки, якщо сепаратриса перетинає границю плазми (рис. 2.2, зліва), частинка, найімовірніше, буде втрачена з плазми за час порядку часового масштабу стохастичної дифузії, хіба що характерний час заповільнення менший. Варто відзначити, що у тому випадку, коли баунс-усереднена орбіта частинки не замкнена всередині плазми, частинка втрачається набагато швидше, а саме за час порядку часу прецесії. Розглядати стохастичну дифузію в такому випадку не має сенсу.

Щоб отримати більш конкретні результати, можна розглянути локально захоплені частинки, нехтуючи шириною орбіт, тобто $x = \text{const}$. Таке наближення виправдане в оптимізованих стелараторах. Частинка із заданими x та α буде перехідною, якщо для неї $\kappa^2 = 1$ при деякому θ . З рівняння (2.47) випливає, що ця умова може задовільнятися лише для частинок, пітч-кутовий параметр яких лежить у певному інтервалі:

$$\alpha_{\min}(x) < \alpha < \alpha_{\max}(x). \quad (2.49)$$

У вибраному модельному магнітному полі величини α_{\min} та α_{\max} є коренями рівняння $\kappa(x, \theta, \alpha) = 1$ відповідно при $\theta = 0$ та $\theta = \pi$, і даються виразами

$$\begin{aligned} \alpha_{\max}(x) &= c_0 x^2 + \phi(x) + c_t x + \epsilon_m + c_h x, \\ \alpha_{\min}(x) &= c_0 x^2 + \phi(x) - c_t x + |\epsilon_m - c_h x|. \end{aligned} \quad (2.50)$$

На рис. 2.3 показані графіки $\alpha_{\min}(x)$ та $\alpha_{\max}(x)$ у стандартній конфігурації W-7X з високим β та у тій самій конфігурації, модифікованій шляхом зменшення дзеркальної гармоніки до $c_m = 0.03$ та $\epsilon_m(0) = 0$. У модифікованій конфігурації втрати від стохастичної дифузії помітно менші. Дій-

сно, частинки втрачаються лише з тих сепаратрис, які перетинають границю плазми $x = 1$. На площині (α, x) сепаратриса частинок із заданим α виглядає як горизонтальний відрізок $x \in [x_{\min}(\alpha), x_{\max}(\alpha)]$, де функції $x_{\min}(\alpha)$ та $x_{\max}(\alpha)$ – обернені відповідно до функцій $\alpha_{\max}(x)$ та $\alpha_{\min}(x)$, тобто $\alpha_{\max}(x_{\min}(\alpha)) \equiv \alpha$ і $\alpha_{\min}(x_{\max}(\alpha)) \equiv \alpha$. Гранична сепаратриса має $\alpha = \alpha_{\min}(1)$. Вона розділяє “фазову площину” перехідних частинок (α, x) , обмежену рівнянням (2.49) та нерівністю $x < 1$, на дві області, причому частинки можуть втрачатися лише з верхньої області. Відповідно відсоток частинок, які можуть втрачатися внаслідок стохастичної дифузії, зростає разом із площею верхньої області відносно нижньої.

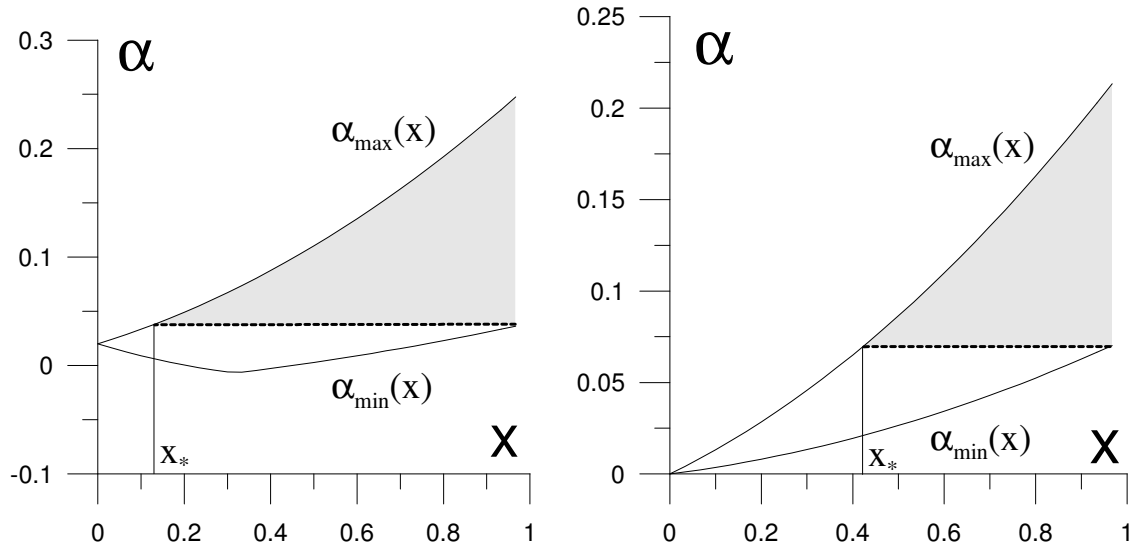


Рис. 2.3. Залежність α_{\min} та α_{\max} від x . Зліва: для стандартної конфігурації W-7X з великим β ($c_0 = 0.072$, $c_m = 0.046$, $\epsilon_m(0) = 0.02$, $c_t = 0.041$, $c_h = 0.077$, $\beta_0 = 0.094$, де β_0 – відношення тиску плазми до тиску магнітного поля на магнітній осі $x = 0$) у відсутності електричного поля ($\Phi = 0$). Справа: для тієї ж конфігурації зі зниженою дзеркальною гармонікою ($c_m = 0.03$, $\epsilon_m(0) = 0$). Гранична сепаратриса з $\alpha = \alpha_{\min}(1)$ показана товстою штрихованою лінією. Стохастична дифузія приводить до втрат частинок лише із заштрихованих областей.

Слід відзначити, що для будь-якого вибору констант у модельному ма-

гнітному полі та для будь-якого профілю $\phi(x)$ $\alpha_{\max}(x)$ строго більше за $\alpha_{\min}(x)$ при всіх $x \in (0, 1)$. Тому завжди знаходяться сепаратрисы, які перетинають границю плазми, і відповідно неможливо повністю запобігти втратам через стохастичну дифузію.

Якщо для частинки з даним α найбільший корінь x_r рівняння $\alpha_{\min}(x_r) = \alpha$ менший за одиницю, така частинка не втрачатиметься через стохастичну дифузію. Відповідно, можна сказати, що всі частинки всередині певного радіуса x_* , який визначається рівнянням

$$\alpha_{\max}(x_*) = \alpha_{\min}(1) \quad (2.51)$$

теж не можуть втрачатися: або вони не є перехідними і не зазнають стохастичної дифузії, або їхня сепаратриса замкнена всередині плазми.

Щоб отримати розв'язок рівняння (2.51), можна наближено представити нормалізований потенціал електричного поля у вигляді суми квадратичного потенціалу, який відповідає жорсткому обертанню надтеплових іонів, та потенціального бар'єру висотою $\delta\phi_b$ з максимумом при $x = 1$, локалізованого зовні радіусу x_* :

$$\phi(x) = c_\phi x^2 + \delta\phi_b f(x), \quad (2.52)$$

де $f(x)$ описує форму бар'єру, $f(1) = 1$. Точний вигляд цієї функції у вибраній моделі не має значення, поки $f(x_*) \ll 1$, бо потенціал електричного поля додається і до α_{\min} , і до α_{\max} . Якщо бар'єр локалізований при меншому радіусі $x_b < 1$, він впливатиме на x_* лише за умови $\alpha_{\min}(x_b) + \delta\phi_b > \alpha_{\min}(1)$. Тоді x_* можна знайти, підставляючи x_b замість одиниці у правій частині (2.51).

Використовуючи (2.52), розв'язок (2.51) матиме вигляд

$$x_* = -y + [(y - 1)^2 + \delta]^{1/2}, \quad (2.53)$$

де $y = (c_h + c_t)/2(c_0 + c_m + c_\phi)$, а

$$\delta = \frac{|\epsilon_h(1) - \epsilon_m(1)| + \epsilon_h(1) - \epsilon_m(1) + \delta\phi_b}{c_0 + c_m + c_\phi}. \quad (2.54)$$

Коли $\epsilon_h(1) < \epsilon_m(1)$ та $\delta\phi_b = 0$, як, наприклад, у конфігураціях W-7X з великою дзеркальною гармонікою, цей вираз спрощується до

$$x_* = 1 - \frac{c_t + c_h}{c_0 + c_m + c_\phi}. \quad (2.55)$$

Видно, що в цьому випадку збільшення c_0 та параболічної компоненти дзеркальної гармоніки c_m (наприклад, через збільшення тиску плазми) та від'ємне радіальне електричне поле збільшують x_* і відповідно зменшують втрати від стохастичної дифузії; тим часом збільшення константної компоненти дзеркальної гармоніки $\epsilon_m(0)$ не поліпшує x_* . У протилежному випадку, тобто коли $\epsilon_h(1) > \epsilon_m(1)$, вплив дзеркальної та гвинтової гармонік залежить від співвідношення величин всіх гармонік модельного магнітного поля, але більші значення $\epsilon_m(0)$ завжди зменшують x_* .

2.2.4. Зменшення області дифузійних втрат у стелараторі Wendelstein 7-X. У конфігурації W-7X з великою дзеркальною гармонікою тм $\beta_0 = 0.068$ (див. рис. 2.4), для якої коефіцієнти гармонік магнітного поля складають $c_t = 0.043$, $c_h = 0.08$, $c_0 = 0.05$, $c_m = 0.03$ та $\epsilon_m(1) = 0.125$, для x_* працює простий вираз (2.55) і можна отримати $x_* < 0$, тобто замкнених сепаратрис немає взагалі. Окремі орбіти частинок у таких конфігураціях теж погано утримуються. Щоб отримати $x_* = 0.5$, знаменник (2.55) потрібно потроїти. Якщо зробити правдоподібне припущення, що c_0 та c_m лінійно зростають з β_0 (значенням β при $r = 0$), і оцінити цю залежність із даних по конфігураціях з різними β_0 , можна зробити висновок, що для $x_* = 0.5$ потрібно $\beta_0 > 0.2$, що навряд чи має практичне значення на W-7X, але може мати місце у реакторі Helias. Можна також оцінити величину радіального електричного поля, потрібну, щоб досягти того самого значення $x_* = 0.5$.

Якщо поле безбар'єрне ($\delta f_b = 0$), рівняння (2.52) дає $c_\phi \sim eE_r' a^2 / 2W$. З цієї оцінки видно, що у тій же конфігурації з великою дзеркальною гармонікою для 50-кеВних частинок знадобиться електричне поле порядку 30 кВ/м, що відповідає частоті обертання плазми $1.2 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$. Це набагато перевищує типові значення. Навіть об'єднаного впливу від'ємного електричного поля та тиску плазми недостатньо, щоб істотно поліпшити ситуацію. Крім цього, зі збільшенням β_0 профіль β стає більш пікованим. Відповідно, наближення квадратичної залежності дзеркальної та діамагнітної гармонік від x стає непридатним, і рівняння (2.53) перестає працювати.

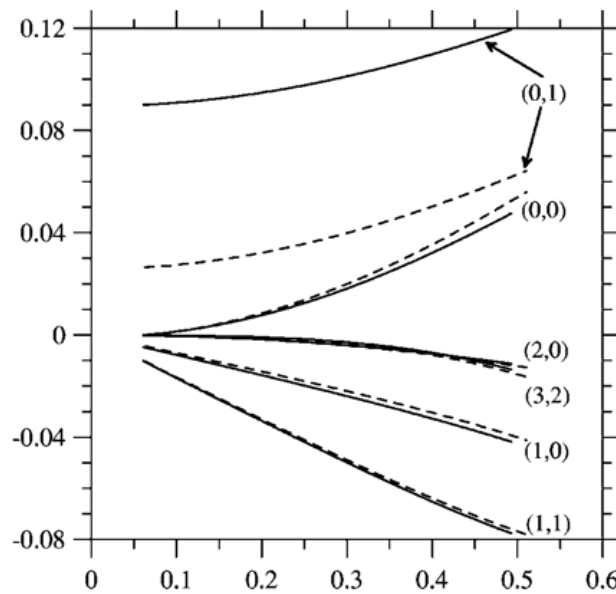


Рис. 2.4. Найбільші фур'є-гармоніки магнітного поля, $\epsilon_B^{(\mu\nu)}$, у конфігурації W7-X з великою дзеркальною гармонікою та $\beta(0) = 6.8\%$ (суцільні лінії) та у стандартній конфігурації W7-X з тим же $\beta(0)$ (штриховані лінії)..

У стандартній конфігурації W-7X виконується нерівність $\epsilon_h(1) > \epsilon_m(1)$, тому потрібно використовувати рівняння (2.53). Для стандартної конфігурації з $\beta_0 = 0.068$ це рівняння дає $x_* \approx 0$, але вже у варіанті з високим $\beta_0 = 0.094$ ситуація покращується до $x_* = 0.17$, тобто частинки з самого центру плазми не втрачатимуться через стохастичну дифузію. Якщо модифікувати цю конфігурацію, зменшивши дзеркальну гармоніку на третину –

до $c_m = 0.03$ та $\epsilon_m(1) = 0.03$, див. рис. 2.3 – x_* зростає до 0.46, тобто втрати від стохастичної дифузії можна зменшити зміною дзеркальної гармоніки, чого у W7-X легко досягти, варіюючи струм у кругових котушках.

Вплив локалізованих електричних полів теж потрібно оцінювати за допомогою (2.53). У тій же стандартній конфігурації W-7X з високим β для частинки з енергією 50 кеВ, бар'єр висотою у 3 кВ підніме x_* до 0.5. Дія цього “електричного дифузійного бар'єру” добре сполучається зі сприятливим впливом від'ємного електричного поля на орбіти окремих частинок, описаним у підрозділі 2.1.

Вплив електричного поля зменшується зі зростанням енергії частинок. Для відносно повільних частинок з енергією 50 кеВ він сильніший за вплив зміни магнітної конфігурації, але значення напруженості електричного поля, потрібні, щоб істотно вплинути на дрейфовий рух термоядерних α -частинок, виходять далеко за межі практично можливого. Це наводить на думку, що додатне електричне поле може допомагати видаляти гелієвий “попіл” з реактора. У попередньому підрозділі з цією метою було запропоновано за допомогою електричного поля розімкнути орбіти локально захоплених частинок певної енергії. Коли час стохастичної дифузії менший за час заповільнення для холодних α -частинок, розімкнення сепаратрис перехідних частинок низької енергії може виконувати ту ж роль.

З іншого боку, зміни магнітної конфігурації впливають на утримання частинок незалежно від їх енергії. Зокрема великі значення β_0 сприяють доброму утриманню. У реакторі, це вдало сполучається із потребою мати велике β_0 для підвищення густини термоядерної потужності.

Оскільки введений в цьому підрозділі формалізм не розглядає окремі дрейфові орбіти частинок, існує потенційна небезпека, що, в той час як сепаратриси замкнені всередині плазми, лінії рівня поздовжнього адіабатичного інваріанта, які перетинають сепаратрису, не будуть замкнені. Щоб оцінити, наскільки цей ефект важливий, були проведені числові розрахун-

ки, в яких порівнювались інтервали значень адіабатичного інваріанта на сепаратрисі та на границі плазми. Якщо ці інтервали не перетинаються, дрейфові орбіти не втрачатимуться з сепаратриси. Результати цих розрахунків показують, що випадки, коли сепаратриси замкнені, а дрейфові орбіти – ні, трапляються рідко.

2.2.5. Висновки. У цьому підрозділі запропоновано метод зменшення втрат від стохастичної дифузії за рахунок замикання сепаратрис між локально пролітними та локально захопленими орбітами всередині плазми. Якщо для частинки з певним пітч-кутом дрейфові орбіти та сепаратриса замкнені всередині плазми, така частинка не втрачатиметься з плазми за час порядку часу стохастичної дифузії. Якщо орбіти частинок не замкнені, форма сепаратриси не має значення для їх утримання, але у стелараторах типу Wendelstein орбіти майже завжди замкнені, якщо замкнена відповідна сепаратриса. У розгляді було знехтувано пітч-кутовим розсіюванням та заповільненням частинок, тому він придатний у тих випадках, коли характерні часи цих процесів істотно перевищують характерний час стохастичної дифузії, але навіть коли ці часи одного порядку, замкнення сепаратрис дає позитивний ефект на утримання.

Показано, що для стелараторів типу Wendelstein діамagnetизм плазми допомагає замкнути сепаратриси, а тороїдальна гармоніка магнітного поля шкодить цьому. Ролі дзеркальної та гвинтової гармонік залежать від їх співвідношення між собою. Зокрема у випадку, коли гвинтова гармоніка перевищує дзеркальну на границі плазми, зменшення дзеркальної гармоніки, якою на W7-X можна керувати за допомогою кругових обмоток, може запобігти втраті надтеплових іонів через стохастичну дифузію із центральної області плазми майже до половини її радіуса.

На зменшення втрат можуть також вплинути зміни радіального електричного поля (які можуть утворюватися, наприклад, від переходу між

електронним та іонним коренями чи під час формування внутрішніх транспортних бар'єрів). Зокрема, від'ємне радіальне електричне поле допомагає замкнути сепаратрис. Локалізовані потенціальні бар'єри поліпшують форму сепаратрис, коли область від'ємного поля лежить всередині області додатного поля. У стандартній конфігурації W-7X з високим β , потенціальний бар'єр висотою 3 кВ замикає всі сепаратрис 50-кеВних частинок, що перетинають поверхню з радіусом $r = 0.5a$, внаслідок чого перехідні частинки не втрачатимуться з області всередині цієї поверхні.

В деяких конфігураціях, додатні електричні поля, які збільшують втрати від стохастичної дифузії, можуть бути корисними, наприклад для видалення гелієвого “попелу” у реакторі. Оскільки вплив електричного поля зменшується з ростом енергії частинок, погіршення утримання електричним полем слабо впливатиме на високоенергійні частинки.

У більш широкому контексті, модифікації магнітних конфігурацій, сприятливі для замкнення сепаратрис усередині плазми, можуть виявитися несприятливими з точки зору інших критеріїв якості конфігурації (максимальне досяжне β , квазіізодинамічність тощо). Тому замкнення сепаратрис всередині плазми може бути додатковим критерієм оптимізації стелаторних конфігурацій. Слід наголосити, що замкнення форми сепаратрис всередині плазми – це не те ж саме, що квазіізодинамічність (узгодження дрейфових орбіт частинок з магнітними поверхнями). Мінімізація втрат надтеплових частинок, розрахована за допомогою методу Монте-Карло, часто включається до набору критеріїв оптимізації [34]. Замкненість форми сепаратрис всередині плазми можна оцінити набагато швидше, ніж моделювати втрати методом Монте-Карло, хоча варто зазначити, що таке моделювання враховує інші канали втрат, крім дифузії перехідних частинок.

Результати досліджень здобувача у цьому розділі відображено в публікаціях [5, 6].

РОЗДІЛ 3

ЕФЕКТИ НЕОСЕСИМЕТРИЧНИХ РЕЗОНАНСІВ ВЗАЄМОДІЇ ЧАСТИНКА-ХВИЛЯ У СТЕЛАРАТОРАХ

3.1. Згасання Ландау альфвенових мод

3.1.1. Вступ. Вплив надтеплових іонів на стійкість плазми визначається конкуренцією між передачею енергії цих іонів плазмовим хвилям і поглинанням енергії хвиль частинками основної плазми [35, 36, 37]. Існує кілька механізмів поглинання енергії хвиль: згасання Ландау, континуумне згасання, згасання через випромінювання та згасання через зіткнення. Короткий огляд цих процесів у стелараторах міститься, наприклад, у [38], а також у новішій роботі [39]. Фізика згасання у токамаках і стелараторах схожа. Важливі відмінності між ними випливають із різниці у структурі магнітного поля в цих тороїдальних системах. По-перше, завдяки наявності багатьох фур'є-гармонік одного порядку величини у розвиненні індукції магнітного поля за кутами та періодичній варіації форми поперечного перерізу плазми вздовж тора у стелараторах утворюється більше щілин у альфвеновому континуумі, що дозволяє існувати різноманітним характерним для стелараторів альфвеновим власним модам [40, 41, 42], див. також огляд [38]. На додачу до альфвенових власних мод, викликаних тороїдальністю (Toroidicity-induced Alfvén eigenmodes, TAE), еліптичністю (Ellipticity-induced Alfvén Eigenmodes, EAE) та некруглим трикутним перерізом плазми (noncircular triangularity-induced Alfvén Eigenmodes, NAE), які існують в токамаках, у стелараторах до них додаються альфвенові власні моди, викликані дзеркальними (Mirror-induced Alfvén eigenmodes, MAE) та гвинтовими (Helicity-induced Alfvén eigenmodes, HAE) гармоніками ма-

гнітного поля. По-друге, у стелараторах існують так звані неосесиметричні резонанси, завдяки яким розширюються можливості для взаємодії між хвилями та частинками [43]. Також у стелараторах можуть збуджуватися моди із частотами, що лежать в альфвеновому континуумі - глобальні альфвенові власні моди (Global Alfvén eigenmodes, GAE) та нестандартні глобальні альфвенові власні моди (Non-conventional Global Alfvén eigenmodes, NGAЕ) [44, 45, 46] - а присутність перехідних частинок суттєво впливає на процеси згасання альфвенових власних мод через зіткнення [47]. Нещодавно у стелараторах із малим широм та обертальним перетворенням, близьким до одиниці, подібним до Wendelstein 7-X, були теоретично відкриті так звані ізомонні моди (Isomon Modes, IM) - альфвенові моди з рівними полоїдальними та тороїдальними модовими числами, $m = n$, для існування яких істотна стисливість плазми [48]. Ці моди мають широку радіальну структуру і охоплюють велику частину перерізу плазми. Дестабілізація цих мод пролітними надтепловими іонами з максимальною енергією 55 - 60 кев, які утворюються при інжекції нейтральних пучків (Neutral Beam Injection, NBI) була розглянута у роботі [48]. Було показано, що інкремент нестійкості цих мод у перших планованих на W-7X експериментах з інжекцією нейтральних пучків може бути досить великим. Однак єдиним взятим до уваги в [48] механізмом взаємодії частинок з хвилею був резонанс між модами та інжекттованими іонами. Ніякі механізми згасання не розглядалися: взаємодією мод із частинками основної плазми, яка може приводити до поглинання енергії мод, було знехтувано. Тому з цієї роботи не можна було зробити висновок щодо того, чи справді інжекція нейтральних пучків може приводити до нестійкості ізомонних мод.

У цьому підрозділі буде розглянуто згасання Ландау ізомонних та щілинних альфвенових мод у стелараторах, в першу чергу у Wendelstein 7-X. Важливість ролі цього механізму згасання у стелараторах було передбачено ще у [38]: ця робота привернула увагу до того факту, що, як було

показано в ранішій роботі [43], в неосесиметричних резонансах резонансні швидкості частинок можуть бути настільки малими, що теплові частинки зможуть поглинати енергію хвиль. Тим не менше, детально згасання Ландау в стелараторах досі не вивчалось, хоча деякі кроки в цьому напрямку були зроблені в роботах [39, 49].

У пункті 3.1.2 на основі рівнянь, що описують резонанси пролітних частинок з хвилями [43], розглянуті резонанси взаємодії хвиля-частинка для ізомонних та щілинних мод у стелараторі Wendelstein 7-X. У пункті 3.1.3 виводяться загальні вирази для інкрементів/декрементів альфвенових мод, включаючи моди у стисливих плазмах, придатні для вивчення впливу на моди і електронів, і іонів як теплової плазми, так і надтеплових компонент. У пункті 3.1.4 із допомогою виведених рівнянь обчислюються інкременти та декременти ізомонних та щілинних альфвенових мод, як у локальному наближенні, так і з урахуванням радіальної структури мод. Конкретні приклади стосуються Wendelstein 7-X, реактора Helias, а також пристрою LHD. В останньому пункті наведені підсумки отриманих результатів.

3.1.2. Аналіз резонансів між альфвеновими модами та пролітними частинками. Резонансна взаємодія між альфвеновими модами та частинками може не лише приводити до дестабілізації цих мод, а й грати важливу роль у їх згасанні, зокрема через механізм Ландау. Як буде показано нижче, цей механізм особливо важливий у стелараторах.

3.1.2.1. Рівняння резонансу. Розкладемо індукцію магнітного поля, кривину силової лінії (\mathcal{K}) та збурені величини (відмічені тильдою) в ряд Фур'є [42, 38, 43]:

$$B = \bar{B} \left(1 + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} \epsilon_{\mu\nu}(r) e^{i\mu\vartheta - i\nu N\varphi} \right), \quad (3.1)$$

$$\mathcal{K} = \sum_{\mu, \nu} \mathcal{K}_{\mu, \nu}(r) e^{i\mu\vartheta - i\nu N\varphi}, \quad (3.2)$$

$$\tilde{X} = \sum_{m,n} X_{m,n}(r) e^{im\vartheta - in\varphi - i\omega t}, \quad (3.3)$$

де \bar{B} – середня індукція магнітного поля на магнітній осі, радіальна координата r визначається із $\psi = \bar{B}r^2/2$, ψ – тороїдальний магнітний потік, ϑ та φ – відповідно полоїдальний і тороїдальний бузерові кути, N – число періодів рівноважного магнітного поля. Фур'є-гармоніки $\epsilon_{\mu\nu}$ є монотонними функціями радіусу магнітної поверхні. Зокрема у конфігурації W7-X з великою дзеркальною гармонікою, яка використовується в цьому підрозділі, найбільші гармоніки $\epsilon_{\mu\nu}$ показані на 3.1.

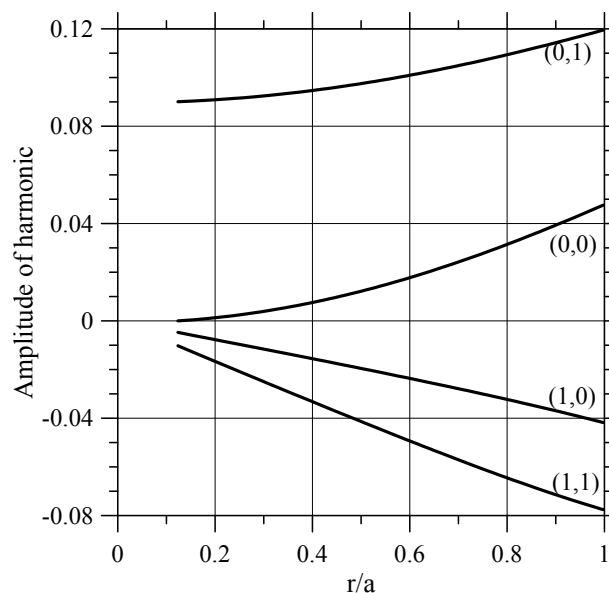


Рис. 3.1. Фур'є-гармоніки рівноважного магнітного поля у конфігурації W7-X з великою дзеркальною гармонікою при $\beta(0) = 0.037$. r – потокова радіальна координата, a – малий радіус плазми.

У цих позначеннях, резонанс між хвилями та більшістю пролітних частинок у стелараторах описується рівнянням [43]

$$\omega = k_{res} v_{\parallel}^{res}, \quad (3.4)$$

де v_{\parallel}^{res} – резонансна швидкість частинки вздовж магнітного поля, $k_{res} \equiv k_{m+\mu, n+\nu N} = [(m+\mu)\iota - (n+\nu N)]/R$, ι – обертальне перетворення, $\iota = 1/q$, q – фактор безпеки, який прийнято використовувати в токамаках, а

R – великий радіус тора. Рівняння (3.4) отримано із теорії дестабілізації альфвенових власних мод швидкими іонами, але його також можна вивести із рівнянь

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\mathbf{v}_D \cdot \tilde{\mathbf{E}}, \quad (3.5)$$

$$\vartheta(t) = \omega_\vartheta t + \vartheta_0, \quad \varphi(t) = \omega_\varphi t + \varphi_0, \quad (3.6)$$

де \mathcal{E} – енергія частинки, \mathbf{v}_D – швидкість дрейфу частинки у стелараторно-му магнітному полі, $\tilde{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}}_\perp(r) \exp(-i\omega t + im\vartheta - in\varphi)$ – електричне поле хвилі, а ω_ϑ та ω_φ – відповідно частоти руху частинки в полоїдальному та тороїдальному напрямках [38]. Рівняння дрейфової теорії (3.5) описує обмін енергією між електричним полем хвилі $\tilde{\mathbf{E}}$ та зарядженою частинкою, що рухається поперек магнітного поля з дрейфовою швидкістю \mathbf{v}_D . Рівняння (3.6) описує рух частинки вздовж силових ліній магнітного поля. В цьому рівнянні опущені дрейфові члени, тобто в ньому знехтувано ефектами скінченної ширини орбіт. Це виправдано для частинок основної плазми, але може бути недостатньо для опису надтеплових іонів. Ці рівняння придатні і для іонів, і для електронів; коли у подальшому ці рівняння застосовуватимуться до електронів чи іонів, використовуватимуться відповідні індекси (e або i).

Для заданої частоти моди та модових чисел рівняння (3.4) визначає нескінченне число резонансних значень швидкості v_\parallel^{res} , за яких частинки можуть взаємодіяти з модами. Проте лише декілька із цих значень грають хоч би яку важливу роль, бо навіть у стелараторах великих фур'є-гармонік магнітного поля не надто багато. Слід відзначити, що із співвідношень, які буде виведено в подальшому, випливає, що дзеркальна гармоніка магнітного поля, хоч вона і найсильніша у центрі плазми в Wendelstein 7-X (особливо в конфігурації, що використовується в цьому підрозділі), мало впливає на згасання хвиль.

3.1.2.2. Резонанси між частинками та щілинними альфвеновими модами. У цьому підпункті аналізуються резонанси для власних мод з частотами, що лежать у щілинах альфвенового континууму.

Коли у фур'є-розвиненні індукції магнітного поля та/або метричного тензора присутня гармоніка з числами (μ_0, ν_0) , в альфвеновому континуумі з'являється щілина на радіусі r_* , де перетинаються дві циліндричні гілки континууму з модовими числами m, n та $m + \mu_0, n + \nu_0$. Прирівнюючи частоти цих гілок $\omega_1 = |k_{mn}|v_A(r)$ та $\omega_2 = |k_{m+\mu_0, n+\nu_0}|v_A(r)$, де v_A – альфвенова швидкість, можна отримати [42]

$$\iota_* = \frac{2n + \nu_0 N}{2m + \mu_0}. \quad (3.7)$$

Числа (μ_0, ν_0) нумерують фур'є-гармоніки, які стосуються альфвенового континууму та альфвенових власних мод, на противагу до чисел (μ, ν) , які стосуються резонансу. Частоту цих двох гілок в точці перетину $\iota = \iota_*$ можна записати у вигляді

$$\hat{\omega} = |k_{mn}^\omega|v_{A*} = 0.5|k_{\mu_0\nu_0}^\omega|v_{A*}, \quad (3.8)$$

причому $k_{mn}^\omega = -0.5k_{\mu_0\nu_0}^\omega$, $k_{mn}^\omega = (m\iota_* - n)/R_\omega$, $k_{\mu_0\nu_0}^\omega = (\mu_0\iota_* - \nu_0 N)/R_\omega$, $v_{A*} = v_A(\iota_*)$, а $R_\omega = R$ в точці перетину у просторі (r, ω) . В цих позначеннях, резонансна умова (3.4) при $\iota = \iota_*$ набуває вигляду $\omega = [-0.5k_{\mu_0\nu_0} + k_{\mu\nu}]v_\parallel^{res}$, де $k_{\mu\nu} = k_{\mu\nu}^\omega$ з $R_\omega = R$. Рівняння (3.8) отримане без введення якоїсь фіксованої величини великого радіусу тора. Тому радіус R_ω можна використовувати як підгоночний параметр, який дозволяє рівнянню (3.8) описувати не лише континуумні частоти циліндричних гілок, а й модові частоти в реалістичних магнітних конфігураціях.

Частота щілинної власної моди, взагалі кажучи, не дорівнює $\hat{\omega}$, але вона близька до цієї частоти, коли щілина вузька. Однак у стелараторах існують широкі щілини, які до того ж можуть бути зміщені внаслідок взаємодії щілин. Зокрема ТАЕ-щілина у альфвеновому континуумі стелараторів ти-

пу Wendelstein зміщена донизу через взаємодію головно із дуже широкою щілиною, утвореною гвинтовою $\mu_0/\nu_0 = 2/1$ компонентою форми перерізу плазми, див. напр. рис. 2 у роботі [38]). Цей ефект можна врахувати, приймаючи $R_\omega > R$. З іншого боку, стисливість плазми, завдяки якій утворюється низькочастотна щілина, пов'язана з β ($\beta = 8\pi p/B^2$ – відношення тиску плазми p до тиску магнітного поля), зміщує щілини у альфвеновому континуумі вгору. Цей ефект слабкий у стелараторах, але у сферичних токамаках та у звичайних токамаках із порожнистим профілем струму, коли $\beta > \iota^2$ він може бути дуже сильним [50].

Сполучаючи рівняння (3.4) та рівняння (3.8), можна отримати

$$v_{\parallel}^{res} = \frac{R}{R_\omega} \left(\text{sgn } k_{mn} + 2 \frac{\mu\iota_* - \nu N}{|\mu_0\iota_* - \nu_0 N|} \right)^{-1} v_{A*}. \quad (3.9)$$

Варто відзначити, що $|v_{\parallel}^{res}| = v_{A*}$ та $|v_{\parallel}^{res}| = v_{A*}/3$ при $\mu = \mu_0$, $\nu = \nu_0$ та $R = R_\omega$ в точці перетину, де $\iota = \iota_*$. Це означає, що резонансні швидкості для всіх щілинних мод однакові, достатньо лише, щоб існували відповідні фур'є-гармоніки магнітного поля (це не завжди так, бо деякі щілини в альфвеновому континуумі утворюються завдяки варіаціям форми перерізу плазми – тобто метричного тензора – а не завдяки варіаціям індукції магнітного поля). З іншого боку, коли $\mu \neq \mu_0$ або $\nu \neq \nu_0$, навіть при $R = R_\omega$ існує цілий набір резонансних швидкостей.

Розглянемо кілька прикладів.

Для доброго утримання надтеплових іонів потрібна плазма з високим β , зокрема у реакторі Helias передбачається $\beta(0) = 13 - 14\%$ [51]. Беручи $\beta_i \equiv 8\pi n_i T_i / B^2 = 6.5\%$ для іонів основної плазми, можна побачити, що зазначена вище резонансна швидкість $v_{\parallel}^{res} = v_A/3$ надається до ефективної взаємодії щілинних альфвенових мод з іонами основної плазми, бо за такого β ця швидкість близька до теплової швидкості іонів, $v_{\parallel}^{res}/v_{Ti} = 1.3$. Проте подальший розгляд обмежуватиметься плазмовими параметрами, характерними для існуючих експериментів, а також параметрами, які пе-

редбачаються на першому етапі експериментальної кампанії з інжекцією нейтральних пучків на Wendelstein 7-X. Якщо припустити, що в області локалізації моди

$$\beta_i \sim \frac{1}{4N^2}, \quad (3.10)$$

то з рівняння (3.9) для ТАЕ-моди, що взаємодіє з іонами основної плазми через гвинтовий резонанс $\mu/\nu = 1/1$, при $N \gg 1$ впливає оцінка $v_{\parallel}^{res} \sim v_{Ti}$, де $v_{Ti} = \sqrt{2T_i/M_i}$ – теплова швидкість іонів основної плазми. Плазми, що задовільняють (3.10), далі у підрозділі називатимуться плазмами з низьким β .

Зокрема у Wendelstein 7-X, де $N = 5$ та $\iota_* \approx 0.9$, резонанс $\mu = \nu = 1$ при $\iota = \iota_*$ дає $(R_{\omega}/R)|v_{\parallel}^{res}|/v_{A*} = 1/10.1$ і $1/8.1$. Тому

$$\frac{|v_{\parallel}^{res}|}{v_{Ti}} = \frac{R}{10R_{\omega}\sqrt{\beta_i}}. \quad (3.11)$$

Як і очікувалось, ця резонансна швидкість близька до теплової швидкості іонів основної плазми при $\beta_i = 0.01$. Гвинтова гармоніка з $\mu = \nu = 1$ у Wendelstein 7-X досить велика, тому можна очікувати, що гвинтові резонанси справлятимуть сильний стабілізуючий вплив на ТАЕ-нестійкості на цьому пристрої.

Високочастотні моди (НАЕ₁₁, НАЕ₂₁ та МАЕ) можуть згасати на відомому в токамаках сайдбенд-резонансі, $\mu/\nu = 1/0$. Використовуючи те саме оберতальне перетворення, $N = 5$, і покладаючи $R = R_{\omega}$, можна отримати $|v_{\parallel}^{res}|/v_{A*} = 0.735$ і 1.56 для МАЕ, $|v_{\parallel}^{res}|/v_{A*} = 0.69$ і 1.78 для НАЕ₁₁, $|v_{\parallel}^{res}|/v_{A*} = 0.64$ і 2.28 для НАЕ₂₁. Всі ці значення резонансної швидкості значно перевищують теплову швидкість іонів, з чого випливає, що згасання на іонах для цих мод буде експоненційно малим. На противагу, оскільки теплова швидкість електронів v_{Te} зазвичай перевищує альфвенову швидкість, згасання на електронах може бути істотним:

$$\frac{|v_{\parallel}^{res}|}{v_{Te}} = \frac{|v_{\parallel}^{res}|}{v_{A*}} \sqrt{\frac{M_e n_{i*}}{M_i n_{e*}}} \frac{1}{\sqrt{\beta_e}} \frac{R}{R_{\omega}}, \quad (3.12)$$

де $\beta_e = 8\pi n_{e*} T_{e*} / B^2$.

У водневій плазмі величини відношення $R_\omega |v_{\parallel}^{res}| / (R v_{Te})$ для різних випадків такі: 0.17 і 0.36 для МАЕ, 0.16 і 0.41 для НАЕ₁₁, 0.14 і 0.52 для НАЕ₂₁. Можна зробити висновок, що згасання цих мод на електронах буде не таким сильним, як згасання ТАЕ-мод на іонах, спричинене гвинтовим резонансом $\mu/\nu = 1/1$. Справді, відношення $|v_{\parallel}^{res}|/v_{Te}$ для НАЕ та МАЕ набагато менше одиниці (хіба що $R \gg R_\omega$), тоді як для ТАЕ $|v_{\parallel}^{res}|/v_{Ti} \sim 1$. Крім цього, тороїдальна фур'є-гармоніка ϵ_{10} у W7-X вдвічі менша за гвинтову ϵ_{11} (нижче буде показано, що декремент згасання пропорційний до $\epsilon_{\mu\nu}^2$).

Наведені вище приклади стосуються водневої плазми. З рівняння (3.12) видно, що у плазмах з більш важкими іонами відношення $|v_{\parallel}^{res}|/v_{Te}$ буде меншим. Відповідно слабшим буде і згасання на електронах.

На згасання МАЕ-моди у W7-X також впливає гвинтова гармоніка ϵ_{11} .

3.1.2.3. Резонанс між частинками та ізомонними модами. З рівняння (3.4) випливає, що ізомонні моди взаємодіють з частинками через гвинтовий резонанс, якому відповідає поздовжня швидкість

$$v_{\parallel}^{res} = \frac{R\omega}{-m\Delta\iota + \mu\iota - \nu N}, \quad (3.13)$$

де $\Delta\iota = 1 - \iota$. Частоти ізомонних мод лежать трохи вище за частоту $\omega = m|\Delta\iota|v_{Am}/R$ (принаймні коли $m > 1$), де v_{Am} – альфвенова швидкість на радіусі, де амплітуда моди максимальна. Тому відношення резонансної швидкості іонів до теплової швидкості

$$\left| \frac{v_{\parallel}^{res}}{v_{Ti}} \right| = \frac{|m|\Delta\iota}{|-m\Delta\iota + \mu\iota - \nu N|\sqrt{\beta_i}}. \quad (3.14)$$

Приймаючи $\mu = \nu = 1$ (гвинтовий резонанс), $\Delta\iota = 0.1$ та $\beta_i = 0.01$, рівняння (3.14) дає $v_{\parallel}^{res}/v_{Ti} \lesssim 1$ для $m = 2 - 4$. Частота моди з $m = 1$ перевищує величину $m\Delta\iota v_A/R$ у 2.4 рази завдяки стисливості плазми [48].

Тому v_{\parallel}^{res} для моди з $m = 1$ теж близька до теплової швидкості іонів. Отже, можна очікувати значного згасання ізомонних мод на іонах.

З іншого боку, ізомонні моди дестабілізуються пролітними інжектованими іонами через резонанс (3.13) з $\nu = 0$, якому відповідає поздовжня резонансна швидкість іонів

$$v_{\parallel}^{res} \approx v_A \frac{m\Delta\iota}{\pm\iota - m\Delta\iota}. \quad (3.15)$$

У W7-X швидкість інжектованих іонів $v_b < v_A$. Тому рівняння (3.15) задовільняється при $m\Delta\iota \ll 1$, що виправдовує обмеження наведеного вище розгляду модовими числами $m = 1 - 4$, які вивчалися у роботі [48].

Рівняння (3.14) та (3.15) визначають, яка група іонів буде взаємодіяти з модами, але їх недостатньо, щоб передбачити залежність інкременту нестійкості від модових чисел, бо і інкремент збудження, і декремент згасання залежать від функції розподілу частинок у фазовому просторі. Зокрема, як буде показано у підпункті 3.1.4.1, відсутність пролітних інжектованих іонів на периферії плазми у планованих експериментах з інжекцією на W7-X істотно обмежує силу збудження нестійкості, хоча цей ефект залежить від модових чисел. Крім цього, є резонанси, які існують завдяки скінченній ширині орбіт частинок [52], і ці резонанси також можуть впливати на залежність інкрементів нестійкості від модових чисел.

3.1.3. Виведення виразів для інкременту/декременту моди.

3.1.3.1. Вирази для альфвенових мод. У цьому підпункті методом теорії збурень виводяться загальні вирази для інкрементів/декрементів альфвенових власних мод у плазмі, що містить надтеплові іони.

Рівняння квазінейтральності плазми –

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{j}} = 0, \quad (3.16)$$

де $\tilde{\mathbf{j}}$ – струм плазми, тильдою позначені збурені величини. Домноживши

рівняння (3.16) на збурений скалярний потенціал електромагнітного поля $\tilde{\Phi}$ та інтегруючи добуток по об'єму плазми, можна отримати

$$\int d^3x \tilde{\mathbf{j}} \cdot \nabla \tilde{\Phi} = 0 \quad (3.17)$$

за умови, що $\tilde{\Phi}$ задовільняє $\int d\mathbf{s} \cdot \tilde{\mathbf{j}} \tilde{\Phi} = 0$, де інтеграл береться по границі плазми.

Струм $\tilde{\mathbf{j}}$, що входить в підінтегральний вираз рівняння (3.17), зручно записати у виді $\tilde{\mathbf{j}} = \tilde{\mathbf{j}}_{\parallel} + \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}$, де індекси \parallel та \perp відповідно позначають величини вздовж і поперек магнітного поля. Поздовжній струм можна визначити із рівнянь Максвелла: для поздовжнього струму справедливо $c\nabla \times \tilde{\mathbf{B}} = 4\pi\tilde{\mathbf{j}}$ та $\tilde{\mathbf{B}} = \nabla \times \tilde{\mathbf{A}}$, де \mathbf{B} – магнітне поле, а \mathbf{A} – векторний потенціал електромагнітного поля. Поперечний струм в присутності надтеплових частинок визначається рівняннями $\tilde{\mathbf{j}}_{\perp} = \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}^{MHD} + \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}^{kin} + \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}^{\alpha}$, де $\tilde{\mathbf{j}}_{\perp}^{MHD}$ – струм плазми в ідеальному МГД-наближенні, $\tilde{\mathbf{j}}_{\perp}^{kin}$ – кінетичний струм основної плазми, а $\tilde{\mathbf{j}}_{\perp}^{\alpha}$ – струм надтеплових іонів.

В альфвенових хвилях $\tilde{\mathbf{B}}_{\parallel}$ мала, тому відповідно малою є $\tilde{\mathbf{A}}_{\perp}$, і ними можна знехтувати. Тоді

$$\tilde{\mathbf{j}}_{\parallel} \approx -\frac{c}{4\pi B_0} [\nabla \cdot B_0 (\nabla_{\perp} \tilde{A}_{\parallel})] \mathbf{b}, \quad (3.18)$$

де $\mathbf{b} = \mathbf{B}_0/B_0$ – одиничний вектор вздовж магнітного поля, а індекс “0” позначає рівноважні величини. З іншого боку, із рівнянь ідеальної МГД, де $\tilde{\mathbf{E}} = -\nabla_{\perp} \tilde{\Phi}$ і $\tilde{\Phi} \propto \exp(-i\omega t)$, випливає, що

$$\tilde{\mathbf{j}}_{\perp}^{MHD} \approx \frac{i\omega c^2}{4\pi v_A^2} \nabla_{\perp} \tilde{\Phi}. \quad (3.19)$$

Збуджуватися у присутності невеликої групи надтеплових іонів можуть лише ті хвилі, які слабо згасають у їх відсутності, тому проблему стійкості таких хвиль (а отже і рівняння (3.17)) можна аналізувати методами теорії збурень (виняток становлять так звані моди на енергійних частинках – Energetic Particle Modes, EPM – які тут не розглядаються). Попередньо

слід відзначити, що поздовжній струм, так само як і поперечний, можна записати через скалярний потенціал $\tilde{\Phi}$ за допомогою співвідношення $\omega \tilde{A}_{\parallel} = ck_{\parallel} \tilde{\Phi}$, яке випливає із рівняння ідеальної МГД $\tilde{E}_{\parallel} = 0$ (k_{\parallel} визначається як $ik_{\parallel} \tilde{\Phi} = \mathbf{b} \cdot \nabla \tilde{\Phi}$). Тоді $\tilde{j}_{\parallel} \propto \omega^{-1}$ і, отже, $d(\omega \tilde{j}_{\parallel})/d\omega = 0$. З огляду на це, можна записати $\omega \tilde{\mathbf{j}} = \omega \tilde{\mathbf{j}}^{(0)} + \omega \tilde{\mathbf{j}}^{(1)}$, де $\tilde{\mathbf{j}}^{(0)} = \tilde{\mathbf{j}}_{\parallel} + \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}^{MHD}$ та $\tilde{\mathbf{j}}^{(1)} = \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}^{kin} + \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}^{\alpha}$, причому $\tilde{\mathbf{j}}^{(1)}$ малий порівняно із $\tilde{\mathbf{j}}^{(0)}$. В нульовому наближенні, з (3.17) можна отримати рівняння, якому задовільняють власні частоти ідеальної МГД (ω_0) та власні моди:

$$\int d^3x \tilde{\mathbf{j}}^{(0)}(\omega_0) \cdot \nabla \tilde{\Phi} = 0. \quad (3.20)$$

В першому наближенні, $(\omega \tilde{\mathbf{j}})^{(1)} = [d(\omega_0 \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}^{(0)})/d\omega_0] \Delta\omega + \omega_0 \tilde{\mathbf{j}}^{(1)}$, де $\Delta\omega = \omega - \omega_0$. Визначаючи інкремент/декремент моди як $\gamma = \text{Im } \Delta\omega$ і беручи до уваги (3.19), в цьому наближенні після усереднення по часу з рівняння (3.17) можна отримати

$$\gamma = \frac{0.5 \text{Re} \int d^3x (\tilde{\mathbf{j}}_{\perp}^{\alpha} + \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}^{kin}) \cdot \nabla_{\perp} \tilde{\Phi}^*}{\text{Re}\{(i\omega)^{-1} \int d^3x [\partial(\omega \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}^{MHD})/\partial\omega] \cdot \nabla_{\perp} \tilde{\Phi}^*\}}, \quad (3.21)$$

де індекси “0” при ω опущені, а знаменник дорівнює $2\mathcal{W}_A$, де \mathcal{W}_A – енергія альфвенової моди,

$$\mathcal{W}_A = \int d^3x \frac{c^2}{8\pi v_A^2} |\tilde{E}|^2. \quad (3.22)$$

При виведенні цих рівнянь враховувалося, що $\text{Re}(\tilde{X}\tilde{Y}) = 0.5\text{Re}(XY^*)$.

Слід відзначити, що рівняння (3.21) відрізняється від відповідного рівняння (7) в роботі [43]: знаменник у (3.21) містить похідну $d(\omega \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}^{MHD})/(d\omega)$ замість $d(\tilde{\mathbf{j}}^{MHD})/(d\omega)$; перевага цього виразу для енергії моди в тому, що він не містить поздовжнього струму $\tilde{j}_{\parallel}^{MHD}$ та $\nabla_{\parallel} \tilde{\Phi}$. Крім цього, чисельник (3.21) містить кінетичну частину струму основної плазми.

3.1.3.2. Вирази для мод у стисливих плазмах. Рівняння квазі-нейтральності 3.1.3.1 та наближень, зроблених у рівняннях (3.18), (3.19), недостатньо для опису ізомонних мод у квазіізодинамічних стелараторах,

зокрема у Wendelstein 7-X та у реакторі Helias [51]. Ці моди визначаються рівняннями для потенціалу $\tilde{\Phi}$ та стисливості $\tilde{\zeta}$ ($\tilde{\zeta} = \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}$, де $\boldsymbol{\xi}$ – зміщення плазми), пов'язаними між собою через кривину силової лінії та скінченну температуру плазми [48]. Тому в цьому підпункті з рівняння ізомонних мод [48] з додаванням кінетичного члена, який відповідає за взаємодію з основною плазмою, буде виведено аналогічне до (3.21) співвідношення, яке дозволить обчислити інкремент/декремент моди.

Рівняння ізомонних мод має вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \delta_0 \left(\frac{\omega^2 - \omega_G^2}{v_A^2} - k_{mn}^2 \right) \frac{d\Phi_{m,n}}{dr} \\ & - \left[\frac{m^2 \delta_0}{r^2} \left(\frac{\omega^2 - \omega_G^2 r^2 \epsilon_t'^2 / \epsilon_t^2}{v_A^2} - k_{mn}^2 \right) + \frac{k_{mn}}{r} (r \delta_0 k_{mn}') \right] \Phi_{m,n} \\ & - \frac{4\pi i \omega}{c^2} B_{mn}^r \frac{d}{dr} \frac{j_{0\parallel}}{B} = \frac{4\pi i \omega}{c^2} [\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{j}}_{\perp}^{\alpha} + \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}^{kin})]_{m,n}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

де

$$\omega_G^2 = \tilde{\epsilon}^2 \frac{c_s^2}{R^2} \sum_{l=\pm 1} \left(\frac{\omega^2}{\omega^2 - k_{m+l,n}^2 c_s^2} \right), \quad (3.24)$$

$\Phi_{m,n}$ – фур'є-компоненти $\tilde{\Phi}$, $k_{mn} \equiv k_{\parallel}(m, n) = (m\iota - n)/R$, $c_s = \sqrt{\Gamma p / \rho}$ – швидкість звуку, $\Gamma = 5/3$ – відношення теплоємностей, p – тиск плазми, ρ – її густина, $\delta_0 \gtrsim 1$ визначається формою перерізу плазми (див. роботу [42]), $\tilde{\epsilon}^2 = \epsilon_t^2 / (\delta_0 \epsilon^2)$, $\epsilon_t = -\epsilon_{1,0}$, $\epsilon = r/R$, штрихом позначена похідна за радіусом, а $j_{0\parallel}$ – рівноважний струм плазми.

Помноживши рівняння (3.23) на Φ_{mn}^* і проінтегрувавши по об'єму плазми, і, як у підпункті 3.1.3.1, розглядаючи хвилю як збурення, можна отримати

$$\begin{aligned} 2\gamma \mathcal{W} & \equiv \sum_{mn} \gamma \int d^3x \frac{c^2 \delta_0}{4\pi v_A^2} \left\{ \left(1 - \frac{d\omega_G^2}{d\omega^2} \right) |\Phi'_{mn}|^2 + \frac{m^2}{r^2} \left(1 - \frac{d\omega_G^2}{d\omega^2} \frac{r^2 \epsilon_t'^2}{\epsilon_t^2} \right) |\Phi_{mn}^2| \right\} \\ & = 0.5 \sum_{mn} \text{Re} \int d^3x (\tilde{\mathbf{j}}_{\perp mn}^{\alpha} + \tilde{\mathbf{j}}_{\perp mn}^{kin}) \cdot \nabla_{\perp} \Phi_{mn}^*. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Тут \mathcal{W} відрізняється від \mathcal{W}_A членами, що виникають внаслідок зв'язку між $\tilde{\Phi}$ та $\tilde{\zeta}$. При виведенні цього рівняння враховувалося, що добуток ωB_{mn}^r (де

B_{mn}^r виражаються через Φ_{mn}) не залежить від ω . Це рівняння узгоджується з рівнянням (3.21), але в ньому врахована стисливість плазми.

Перший член у правій частині цього рівняння описує розгойдування нестійкості надтепловими іонами, γ_α . Другий член, γ_d , описує згасання (коли плазма рівноважна). Величини γ_α та γ_d можна записати у вигляді

$$\gamma_\alpha = \frac{1}{4\mathcal{W}} \sum_{mn} \text{Re} \int d^3x (\mathbf{j}_{\perp mn}^\alpha) \cdot \nabla_\perp \Phi_{mn}^* \quad (3.26)$$

та

$$\gamma_d = \frac{1}{4\mathcal{W}} \sum_{mn} \text{Re} \int d^3x (\mathbf{j}_{\perp mn}^{kin}) \cdot \nabla_\perp \Phi_{mn}^*, \quad (3.27)$$

де \mathcal{W} визначається рівнянням (3.25). Інкремент нестійкості дорівнює $\gamma_\alpha + \gamma_d$, причому $\gamma_\alpha > 0$ і $\gamma_d < 0$.

3.1.3.3. Інкременти/декременти у максвеловій плазмі з пучком.

Слідуючи процедурі [48] і враховуючи наявність різних гармонік кривини силової лінії та приймаючи максвеловий розподіл швидкостей частинок основної плазми, можна отримати

$$j_{r(mn)} = \frac{iMc^2}{4\bar{B}^2r^2} \sum_{\mu\nu} (\mu^2 \epsilon'_{\mu\nu} \Phi'_{m,n} - \mu m \epsilon'_{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} \Phi_{m,n}) \int d^3v \frac{w^4}{\omega - k_{m+\mu, n+\nu} N v_\parallel} \hat{\Pi} F, \quad (3.28)$$

$$j_{\vartheta(mn)} = \frac{Mc^2}{4\bar{B}^2r} \sum_{\mu\nu} \epsilon'_{\mu\nu} (\mu \epsilon_{\mu\nu} \Phi'_{m,n} - m \epsilon'_{\mu\nu} \Phi_{m,n}) \int d^3v \frac{w^4}{\omega - k_{m+\mu, n+\nu} N v_\parallel} \hat{\Pi} F, \quad (3.29)$$

де $w^2 = (0.5v_\perp^2 + v_\parallel^2)$, а оператор $\hat{\Pi}$ в змінних (r, v) (для добре пролітних частинок r є наближеним інтегралом руху) має вигляд

$$\hat{\Pi} = -\frac{2}{v_T^2} + \left(\frac{\omega}{\omega_\varphi} + n \right) \frac{1}{i\omega\omega_B} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad (3.30)$$

де $\omega_\varphi = v_\parallel/R$. Ці рівняння справедливі і для іонів, і для електронів.

В подальшому буде використано припущення, що другий член у рівнянні (3.30) малий і ним можна знехтувати. Це припущення виправдане,

КОЛИ

$$\frac{v_{T\sigma}}{2\omega r} |m + \mu - \nu N \iota^{-1}| \ll \frac{L}{\rho_\sigma}, \quad (3.31)$$

де $L = |d \ln F / dr|^{-1}$ – характерна довжина неоднорідності плазми, $\rho_\sigma = v_{T\sigma} / \omega_{B\sigma}$, а індекс σ нумерує сорти частинок (електрони та іони). При виведенні рівняння (3.31) використана резонансна умова (3.4).

Коли другий член в рівнянні (3.30) переважає, в стелараторах можуть виникати нестійкості, збуджувані просторовою неоднорідністю основної плазми, тобто теплові частинки, як і енергійні, можуть викликати нестійкості. У роботі [49] було продемонстровано таку нестійкість для ТАЕ у W7-X. Можна показати, наприклад, що резонанс через гвинтову компоненту магнітного поля ($\mu = 1$, $\nu = 1$) дає для ТАЕ моди з модовим числом $m = 5$, локалізованої поблизу радіуса $r/a \sim 0.5$ у плазмі з $\beta_i = 0.01$ та $\iota = 0.9$, критичне значення довжини неоднорідності $(L/\rho_i)_{cr} = 21$, тобто така мода могла б збуджуватись, коли $L/\rho_i < 21$. Чи буде насправді збуджуватись така мода, звичайно, залежатиме ще й від балансу потужності розкачки і згасання в тій частині області локалізації моди, де $L/\rho_i < (L/\rho_i)_{cr}$, і в тій частині, де $L/\rho_i > (L/\rho_i)_{cr}$. Слід відзначити, що у максвелових плазмах за наявності неоднорідності температури характерна довжина L значно зростає, коли $v_{\parallel}^{res} > v_T$, де v_{\parallel}^{res} визначається рівнянням (3.4). Цей ефект розглядатиметься у підрозділі 3.2.

Для обчислення інкрементів/декрементів потрібні лише уявні частини інтегралів у рівняннях (3.28)–(3.29), які виникають завдяки резонансу (3.4). Підставляючи $-i\pi\delta(\Omega)$ замість $1/\Omega$, у плазмі з максвеловим розподілом швидкостей можна отримати (пор. роботи [53, 54, 43], де максвеловий розподіл енергійних іонів використовувався для дослідження дестабілізації ТАЕ мод у токамаках):

$$\text{Im} \int d^3v \frac{w^4}{\omega - k_{m+\mu, n+\nu N} v_{\parallel}} \hat{\Pi} F = \frac{\sqrt{\pi} n_{\sigma} \omega}{k_{res}^2} Q(u), \quad (3.32)$$

де

$$Q(u) = \frac{1}{u}(2u^4 + 2u^2 + 1)e^{-u^2} - Q_\epsilon, \quad (3.33)$$

$$Q_\epsilon = \frac{1}{u} \left[2 \left(1 + \frac{1}{2\epsilon_{ef}} \right)^2 u^4 + 2 \left(1 + \frac{1}{2\epsilon_{ef}} \right) u^2 + 1 \right] e^{-(1+\epsilon_{ef}^{-1})u^2}, \quad (3.34)$$

$k_{res} \equiv k_{m+\mu, n+\nu N}$, n_σ – концентрація частинок (іонів чи електронів), $u = |v_{\parallel}^{res}|/v_T$, $\epsilon_{ef} = \sum_{\mu\nu} |\epsilon_{\mu\nu}|$ ($\mu = \nu \neq 0$) – ефективне значення фур'є-гармоніки магнітного поля, яке визначає межу області добре пролітних частинок у просторі швидкостей. Зокрема у конфігурації W7-X з великою дзеркальною гармонікою, ϵ_{ef} набуває значень від 0.08 на магнітній осі до 0.24 на периферії плазми. У подальших обчисленнях приймається, що поперечні швидкості пролітних частинок лежать в інтервалі $0 < v_{\perp} < |v_{\parallel}|/\sqrt{\epsilon_{ef}}$. Член Q_ϵ зменшує згасання, але його вплив стає істотним лише за умови $u \lesssim \sqrt{\epsilon_{ef}}$. Функція $Q(u)$ є досить пласкою в інтервалі $0.5 \lesssim u \lesssim 1$. Це спрощує оцінки у тих випадках, коли частота моди точно не відома, але $\omega/(|k_{res}|v_T)$ лежить у вказаному інтервалі. З іншого боку, коли частота моди відома, зручніше використовувати функцію $u^2 Q(u)$, яка виникає, якщо за допомогою співвідношення $k_{res} = \omega/v_{\parallel}^{res}$ виключити з правої частини рівняння (3.34) член k_{res}^2 .

Знаючи компоненти струму \mathbf{j}_{mn}^{kin} та використовуючи рівняння (3.27) та (3.25) з $\mu = 0, \pm 1$, можна записати таке рівняння для декременту:

$$\frac{\gamma_d^{(\sigma)}}{\omega} = -\frac{\sqrt{\pi} M_\sigma}{8\delta_0 M_i} \frac{\sum_{mn} \int_0^a dr r n_\sigma(r) \sum_{\mu\nu} \epsilon^{-2} |\mu \epsilon_{\mu\nu} \Phi'_{mn} - m \epsilon'_{\mu\nu} \Phi_{mn}|^2 Q(u_\sigma) \bar{k}_{res}^{-2}}{\sum_{mn} \int_0^a dr r^{-1} n_i(r) (g_1 r^2 |\Phi'_{mn}|^2 + g_2 m^2 |\Phi_{mn}|^2)}, \quad (3.35)$$

де $\bar{k}_{res} \equiv k_{res} R = (m + \mu)\iota - (n + \nu N)$, $u = R\omega/(|\bar{k}_{res}|v_T)$, $g_1 = 1 - d\omega_G^2/d\omega^2$, $g_2 = 1 - (d\omega_G^2/d\omega^2)(r^2 \epsilon_t'^2/\epsilon_t^2)$. Графік функції $Q(u_\sigma)$ показаний на рисунку 3.2. Фур'є-гармоніка ϵ_t приблизно пропорційна до r , тому $g_1 \approx g_2$ і g_1 можна записати у вигляді

$$g_1 = 1 + \tilde{\epsilon}^2 \sum_{l=\pm 1} \frac{k_{m+l,n}^2 c_s^4}{R^2 (\omega^2 - k_{m+l,n}^2 c_s^2)^2}. \quad (3.36)$$

Це рівняння для g_1 можна також отримати із рівняння (3.23), якщо після обчислення уявної частини $j_{r,mn}^{kin}$ залишити в ньому лише член, пропорційний до Φ_{mn}'' (він утворюється саме з цієї компоненти струму). Наведений вище аналіз припускає, що $\omega^2 \neq k_{m+l,n}^2 c_s^2$, тобто в ньому не враховуються альфвеново-звукові резонанси і відповідні щілини в альфвеновому континуумі. Цей випадок заслуговує на окреме дослідження.

Оскільки $c_s^2/v_A^2 \ll 1$ і $\tilde{\epsilon}^2 \equiv \epsilon_t^2/(\delta_0 \epsilon) \ll 1$, для аналізу достатньо наближеного виразу для g_1 . Наприклад, якщо для частоти моди використати наближене значення із рівняння (3.8), можна записати рівняння (3.36) для ТАЕ-мод у вигляді

$$g_1 = 1 + 4\tilde{\epsilon}^2 \frac{c_{s*}^4}{v_{A*}^4} \frac{R_\omega^2}{R^2} \sum_{l=\pm 1} \frac{(1+2l)^2}{1 - (1+2l)^2 c_{s*}^2/v_{A*}^2}, \quad (3.37)$$

де індексом “*” позначено величини, взяті на радіусі перетину гілок континууму, де обертальне перетворення визначається рівнянням (3.7). Видно, що g_1 буде здебільшого близьким до одиниці.

З рівняння (3.35) видно, що декремент пропорційний до M_σ/M_i , з чого може виникнути хибне враження, що згасання на електронах завжди мале, тому варто звернути увагу на це питання.

Якщо припустити, що $|v_{\parallel}^{res}| = v_{\parallel}^\sigma$, то з резонансної умови для заданої частоти моди можна отримати $\bar{k}_{res}^2 = \omega^2 R^2/v_{T\sigma}^2 \propto M_\sigma$, тобто згасання не залежить від M_σ . З фізичної точки зору, це є наслідком того факту, що дрейфова швидкість v_D визначається енергією частинки, а не її швидкістю. Однак насправді фіксованими величинами є не v_{\parallel}^{res} , а частота моди та модові числа. Тому більш правильно припустити, що ω та \bar{k}_{res} задані, і виключити M_σ з виразу для $\gamma_d^{(\sigma)}$ за допомогою співвідношення $\bar{k}_{res}^{-2} M_\sigma/M_i = u_\sigma^2 c_\sigma^2/(R^2 \omega^2)$, де $c_\sigma^2 = 2T_\sigma/M_i$. Тепер очевидно, що декремент згасання на електронах, як і декремент згасання на іонах, залежить від маси частинки лише через відношення v_{\parallel}^{res}/v_T , тобто ніякої додаткової залежності від маси частинки немає.

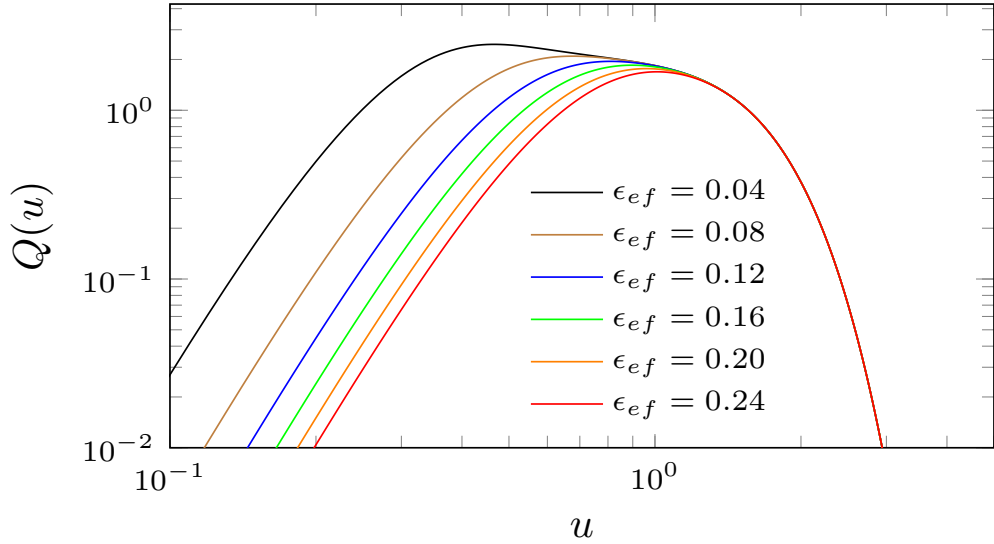


Рис. 3.2. Залежність Q від u для різних значень ϵ_{ef} , де $u = |v_{\parallel}^{res}|/v_T$. У конфігурації W7-X з великою дзеркальною гармонікою, ϵ_{ef} змінюється від 0.08 на магнітній осі до 0.24 на периферії плазми; у стандартній конфігурації $0.03 \lesssim \epsilon_{ef} \lesssim 0.18$.

Варто відзначити, що подібний до (3.35) вираз для інкременту нестійкості можна отримати, інтегруючи (3.32) з функцією розподілу надтеплових частинок, F_{α} . Для іонів пучка можна взяти F_{α} у наближеному вигляді [48]

$$F_{\alpha} = \frac{2n_b(r)}{\pi(1 + \chi_0^2)v^3} \delta(\chi - \chi_0) \eta(v_0 - v), \quad (3.38)$$

де індекс “b” позначає частинки пучка, $\eta(v_0 - v)$ – функція Гевісайда, $\chi = v_{\parallel}/v$, концентрація частинок визначається із $n_b = p_b/\mathcal{E}_0$, де $\mathcal{E}_0 = 0.5M_b v_0^2$ і p_b – тиск надтеплових іонів, рівний $p_b = 0.5(p_{\parallel} + p_{\perp})$, де $p_{\parallel} = \int d^3v v_{\parallel}^2 F_{\alpha}$, $p_{\perp} = 0.5 \int d^3v v_{\perp}^2 F_{\alpha}$, і для простоти взято $M_b = M_i$. Рівняння (3.38) справедливе, коли енергія іонів пучка достатньо висока, щоб кулонові зіткнення лише заповільнювали іони і не викликали помітного розсіяння за пітч-кутом: $\mathcal{E} \gg (M_i/M_e)^{1/3} T_e$. У такому разі, рівняння для γ_{α} матиме такий самий вигляд, як і (3.35), з заміною індексу σ на b , $c_b^2 = 2\mathcal{E}/M_b$, і з функцією

$$Q_b(u_b) = -\frac{\sqrt{\pi}}{(1 + \chi_0^2)} \left[\frac{\omega_{*b}}{\omega} \left(\frac{1}{\chi_0^2} + 1 \right)^2 u_b^2 + \frac{3}{\chi_0^4} - \frac{2}{\chi_0^2} - 5 \right], \quad (3.39)$$

де $\omega_{*b} = n[1 + \sigma_v \omega R / (nv_0 u_b)] v_0^2 (\omega_{Bb} r)^{-1} \partial \ln n_b / \partial r$, $u_b = |v_{\parallel}^{res}| / v_0$ і $\sigma_v = \text{sgn } v_{\parallel}^{res}$, замість $Q(u)$.

3.1.3.4. Оцінка інкременту/декременту, викликаного пучком, у локальному наближенні. Щоб обчислити декремент згасання із рівняння (3.35), потрібно знати, як амплітуда моди $\Phi(r)$ залежить від радіусу. Проте просту оцінку $\gamma_d^{(\sigma)}$ можна зробити у локальному наближенні. Щоб отримати локальне значення $\gamma_d^{(\sigma)}$, можна припустити, наприклад, що у (3.35) домінують члени, що містять похідні потенціалу моди Φ_{mn} за радіусом, і що мода дуже вузька. Тоді рівняння (3.35) спрощується до

$$\frac{\gamma_d^{(\sigma)loc}}{\omega} = -\frac{\sqrt{\pi}}{8\delta_0 g_1^2} \frac{M_\sigma n_\sigma}{M_i n_i} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\mu \epsilon_{\mu\nu}}{\epsilon} \right)^2 \bar{k}_{res}^{-2} Q(u_\sigma), \quad (3.40)$$

де всі величини взяті при тому значенні радіусу, де амплітуда моди максимальна.

Вводячи [48] безрозмірну частоту моди $\bar{\omega} = \omega R / c_{s0}$, де $c_{s0} = c_s(0)$, вираз для u матиме вигляд $u = \bar{\omega} c_{s0} / (|\bar{k}_{res} v_T|)$, що у випадку плазми з $T_i = T_e$ спрощується до $u = \bar{\omega} \sqrt{\Gamma} / (|\bar{k}_{res}| \sqrt{\Theta})$, де $\Theta = T(r) / T_0$, а вираз для g_1 запишеться як

$$g_1 = 1 + \tilde{\epsilon}^2 \sum_{l=\pm 1} \frac{\Theta^2 \bar{k}_{m+l,n}^2}{\bar{\omega}^4 (1 - \bar{k}_{m+l,n}^2 \Theta / \bar{\omega}^2)^2}. \quad (3.41)$$

З рівнянь (3.36) та (3.41) випливає, що стисливість плазми збільшує енергію моди ($g_1 > 0$) і, отже, зменшує γ_d , проте цей ефект малий, $g_1 \approx 1$, коли $\omega^2 \gg k_{m+l,n}^2 c_s^2$.

Декремент (3.40) залежить від модових чисел. Інколи може бути зручнішим вираз для γ_d , який містив би замість модових чисел її частоту. Виключаючи \bar{k}_{res} , можна отримати

$$\frac{\gamma_d^{(\sigma)loc}}{\omega} = -\frac{\sqrt{\pi}}{8g_1^2 \delta_0} \frac{n_\sigma}{n_i} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\mu \epsilon_{\mu\nu}}{\epsilon} \right)^2 \frac{c_\sigma^2}{\bar{\omega}^2 c_{s0}^2} u_\sigma^2 Q(u_\sigma). \quad (3.42)$$

Це рівняння, як і (3.40), справедливе і для електронів, і для іонів. Коли $T_e = T_i$, згасання на електронах зрівнюється з згасанням на іонах за умови $u_e^2 Q(u_e) = u_i^2 Q(u_i)$. Зокрема у водневій плазмі $\gamma_{d,e}^{loc} = \gamma_{d,i}^{loc}$ при $u_e \approx 0.1$ та $u_i \approx 4$, а у дейтерієвій плазмі – при $u_e \approx 0.07$ та $u_i \approx 4.2$.

Схоже рівняння справедливе для надтеплових іонів. Завдяки цьому можна написати просту оцінку порогової концентрації надтеплових іонів, за якої система буде на межі стійкості. Припускаючи, що у виразах для декременту згасання на основній плазмі та інкременту на надтеплових іонах (γ_α) домінує по одній гармоніці магнітного поля, можна отримати

$$\frac{n_b^{cr}}{n_\sigma} = \frac{T_\sigma}{\mathcal{E}_0} \left(\frac{\mu_\sigma \epsilon_{\mu\nu}^{(\sigma)}}{\mu_b \epsilon_{\mu\nu}^{(b)}} \right)^2 \frac{\sum_j u_\sigma^2 Q(u_\sigma)}{\sum_j u_b^2 Q(u_b)}. \quad (3.43)$$

Тут $\sigma = e, i$; $j = \pm\mu$, $\text{sign } \mu = \text{sign } \nu$.

Виведені вище в локальному наближенні рівняння не включають внеску від дзеркальної гармоніки, ϵ_{01} , бо у (3.35) член з Φ'_{mn} виявляється пропорційний до μ . Вплив дзеркальної гармоніки можна оцінити, беручи $\Phi_{mn}(r) \propto \exp(ik_r r)$ і нехтуючи залежністю інших величин від радіуса, що дає

$$\left. \frac{\gamma_d^{(\sigma)loc}}{\omega} \right|_{\mu=0} = -\frac{\sqrt{\pi}}{8\delta_0 g_1^2} \frac{M_\sigma n_\sigma}{M_i n_i} \frac{k_\theta^2}{k_\perp^2} \left(\frac{r\epsilon'_{01}}{\epsilon} \right)^2 \bar{k}_{res}^{-2} Q(u_\sigma), \quad (3.44)$$

де $k_\perp^2 = k_r^2 + k_\theta^2$. Коли $\mu \neq 0$, цей підхід приводить до того самого рівняння (3.40) через наближене співвідношення $r\epsilon'_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu}$. Користаючись із того, що $\bar{k}_{res}^2 \bar{\omega}^2 = u_\sigma^2 v_{T\sigma}^2 / c_{s0}^2$, можна отримати для дзеркальної гармоніки вираз, подібний до (3.42). Порівнюючи його із (3.42), можна зробити висновок, що для дзеркальної гармоніки інкремент/декремент збільшується пропорційно до величини

$$\mathcal{F} = 1 + \frac{k_\theta^2}{k_\perp^2} \left(\frac{r\epsilon'_{01}}{\mu\epsilon_{\mu\nu}} \right)^2. \quad (3.45)$$

Щоб оцінити її у конфігурації W-7X з великою дзеркальною гармонікою і $\beta(0) = 0.037$, можна взяти $\mu = \nu = 1$ і $\epsilon_{01} = \epsilon_{01}(0)(1 + \zeta r^2/a^2)$, де

$\epsilon_{01}(0) = 0.09$ і $\zeta = 0.33$. Тоді $\mathcal{F} = 1 + 0.55(k_{\theta}r)^2/(k_{\perp}a)^2 < 1.55$. Отже, дзеркальна гармоніка не дає великого внеску у інкремент/декремент моди.

3.1.4. Декременти згасання у стелараторі Wendelstein 7-X, реакторі-стелараторі Helias та стелараторі LHD.

3.1.4.1. Інкременти/декременти ізомонних мод у W7-X. Цей підпункт присвячено вивченню згасання ізомонних мод у першій експериментальній кампанії з інжекцією нейтральних пучків на W7-X. Розрахунки засновуватимуться на загальних співвідношеннях, виведених у попередньому пункті, та власних модах, обчислених у роботі [48]. Слід відзначити, що, оскільки дзеркальна гармоніка не дає великого внеску до γ , а інші гармоніки у стандартній конфігурації та конфігурації із великою дзеркальною гармонікою приблизно однакові, інкременти та декременти в цих конфігураціях будуть близькими.

В локальному наближенні, взявши за точку локалізації моди радіус $r/a \sim 0.7$, де її амплітуда максимальна, і відповідно до профіля температури із рис. 3 роботи [48] беручи $\Theta \equiv T(r)/T_0 = 0.77$, з рівняння (3.13) для гвинтового резонансу $\mu/\nu = 1/1$ можна отримати

$$u_i \equiv |v_{\parallel}^{res}/v_{Ti}| = \frac{1.47\bar{\omega}}{|m\Delta\iota \pm (5 - \iota)|}. \quad (3.46)$$

Наприклад, для моди з $m = 3$, $\iota = 0.9$, і $\bar{\omega} = 1.98$ цей вираз дає $u_i = 0.65$ та 0.76 , а для моди із $m = 4$, $\iota = 0.9$, і $\bar{\omega} = 2.56$ – $u_i = 0.83$ та 1.02 . З рис. 3.2 видно, що $Q(u_i) \approx 2$. Крім цього, $\bar{k}_{res} = 4.4$ та 3.8 для $m = 3$, і $\bar{k}_{res} = 4.5$ та 3.7 для $m = 4$. Використовуючи ці значення і приймаючи $\epsilon_{11}^2/\epsilon^2 = 0.8^2$ та $\delta_0 = 1.5$, з рівняння (3.40) можна отримати, що декремент згасання на іонах $|\gamma_{d,i}^{loc}|/\omega \approx 0.02$ для обох мод.

Результати більш реалістичних розрахунків, заснованих на рівнянні (3.35) та модах з $m = 1 - 4$, зображених на 3.3, показані в таблиці 3.1.

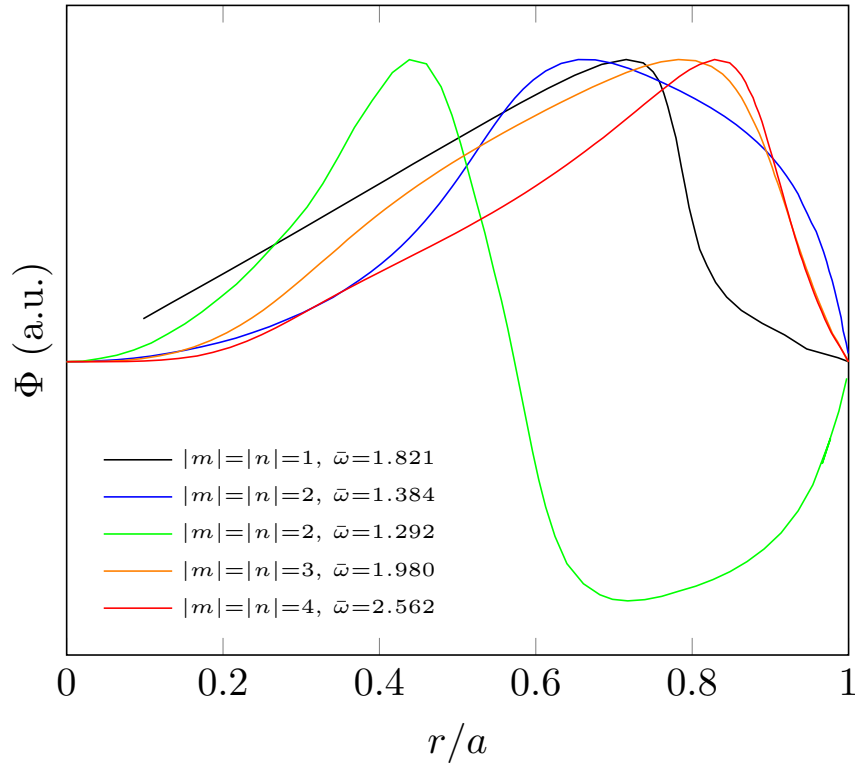


Рис. 3.3. Структура ізомонних мод у Wendelstein 7-X [48].

Видно, що декременти згасання з цієї таблиці добре узгоджуються із декрементами, обчисленими у локальному наближенні. Крім цього, варто зауважити, що декременти згасання всіх розглянутих мод приблизно однакові.

Згасання на електронах мале, і в будь-якому разі не описується виведеними виразами, бо $u_e \ll 1$ і згасання може відбуватися на захоплених електронах.

Інкремент нестійкості, γ_α , можна розглянути, підставляючи у рівняння (3.35) Q_b із рівняння (3.39). Характеристики надтеплових іонів на початковому етапі роботи W-7X з інжекцією нейтральних пучків наведені у Додатку А роботи [48]. З рисунку А2 цієї роботи видно, що на кожному радіусі у розподілі інжекттованих частинок за пітч-кутовим параметром λ ($\lambda = \mu_p \bar{B} / \mathcal{E}$, де μ_p – гіромагнітний момент частинки) існує два різких максимуми, але лише один із них відповідає пролітним частинкам; при

Таблиця 3.1

Декременти згасання ізомонних мод, зображених на 3.3,
обчислені з рівняння (3.35) при $\delta_0 = 1.5$.

m=n	$\bar{\omega}$	$ \gamma_d /\omega$
1	1.821	0.0133
2	1.384	0.0239
2	1.292	0.0263
3	1.980	0.0199
4	2.562	0.0192

$r/a > 0.8$ пролітних частинок майже немає. Крім цього, добре пролітні частинки утворюються лише в центральній області плазми, переважно за $r/a < 0.4$, де $\lambda \approx 0.75$ ($\chi_0 \approx 0.5$). Це означає, що в чисельник (3.35) внесок дають лише центральні області плазми, що суттєво зменшує інкремент ізомонних мод, максимум амплітуди яких лежить при $r/a > 0.5$.

Результати розрахунку інкременту γ_α з урахуванням наведених вище міркувань показані на рисунку 3.5 (в якості радіального розподілу надтеплових іонів був взятий радіальний розподіл поглинутої потужності інжекції, показаний на 3.4). Видно, що коли верхня межа інтегрування у чисельнику (3.35) рівна $0.4a$, інкремент складає лише $\gamma_\alpha/\omega \sim 10^{-3}$. З цього випливає, що впливу добре пролітних інжекттованих іонів недостатньо, щоб перемогти згасання на основній плазмі. Роль інжекттованих іонів в області $r/a > 0.4$ неясна, бо там вони переважно слабкопролітні і перехідні, і не описуються розвиненою вище теорією.

Варто відзначити, що, хоча максимум амплітуди моди знаходиться в області, де добре пролітних інжекттованих іонів дуже мало, можна оцінити γ_α , видозмінивши локальне рівняння (3.40):

$$\frac{\gamma_\alpha^{(loc)}}{\omega} = -\frac{\sqrt{\pi}}{8\delta_0 g_1^2} \frac{M_b n_b}{M_i n_i} \left(\frac{\epsilon_t}{\epsilon}\right)^2 \mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2 \sum_{\mu=\pm 1} \bar{k}_{res}^{-2} Q_b(u_b), \quad (3.47)$$

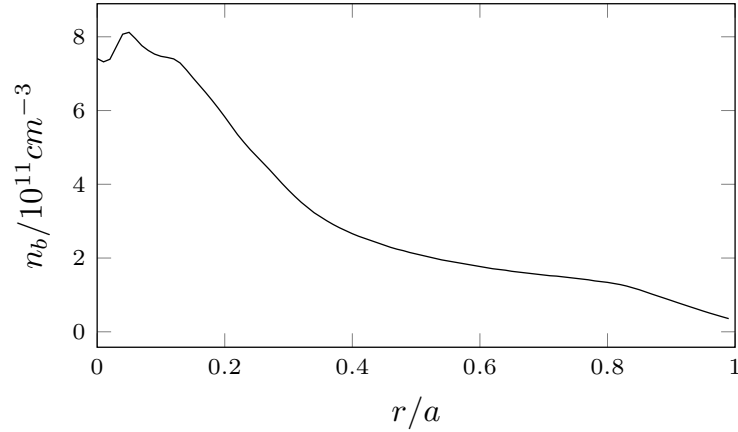


Рис. 3.4. Радіальний розподіл інжекттованих іонів, використаний для розрахунку інкрементів нестійкості ізомонних мод [7].

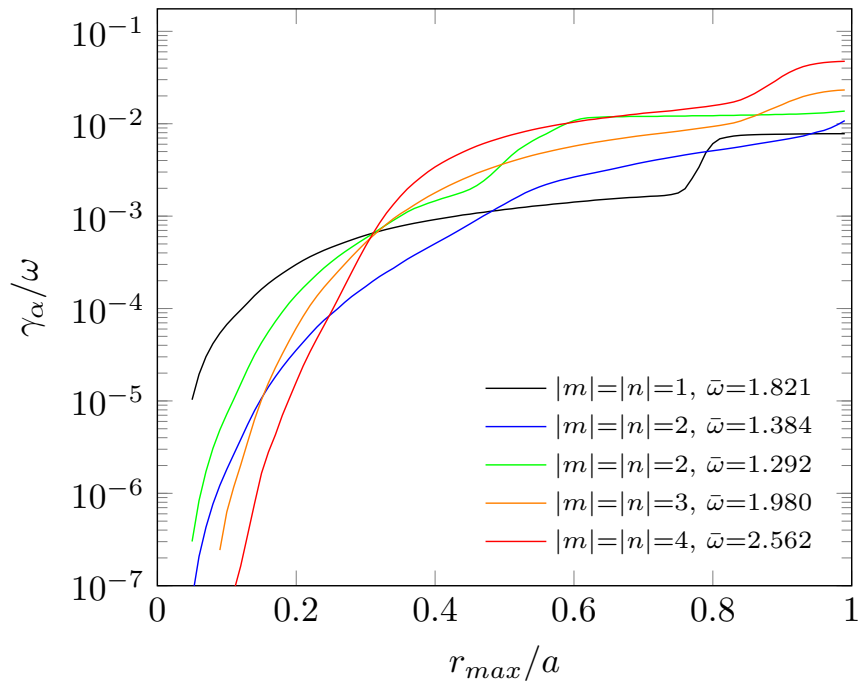


Рис. 3.5. Залежність інкременту нестійкості ізомонних мод на інжекттованих іонах у W7-X від максимального радіусу області існування добре пролітних частинок, r_{max} . Розрахунки проводилися для протонів з енергією $\mathcal{E} = 55$ кеВ та $|\chi_0| = 0.5$. Оскільки переважна більшість добре пролітних інжекттованих частинок розташована в області $r/a < 0.4$ [48], можна зробити висновок, що $\gamma_\alpha/\omega \sim 10^{-3}$.

де $\mathcal{K}_1 \approx 0.5$ – частка іонів, інжекттованих тими джерелами, які утворюють здебільшого пролітні іони, $\mathcal{K}_2 = |\Phi_{0.3}|^2/|\Phi_{max}|^2$, $\Phi_{0.3}$ та Φ_{max} – відповідно амплітуди моди при $r/a = 0.3$ та в максимумі; \mathcal{K}_2 можна отримати із рисунків 4 та 6 роботи [48]: $\mathcal{K}_2 = 0.02$ для моди із $m = n = 2$, $\mathcal{K}_2 = 0.04$ для мод із $m = n = 3$ та $m = n = 4$. Інкременти, отримані з рівняння (3.47), якісно узгоджуються із показаними на 3.5 для $r_{max}/a = 0.4$.

3.1.4.2. Згасання ТАЕ-мод у Wendelstein 7-X. У підпункті 3.1.2.2 було показано, що відношення резонансної швидкості для резонансу $\mu/\nu = 1/1$ до теплової швидкості іонів під час ТАЕ-нестійкостей у перших експериментах з інжекцією нейтральних пучків на W7-X може бути близьким до одиниці. Тому можна очікувати, що згасання ТАЕ-мод буде сильним, як і у випадку ізомонних мод.

Згасання можна спершу оцінити в локальному наближенні за допомогою рівняння (3.40), взявши такі ж параметри плазми, як і в попередньому підпункті. Для $\iota_* = 0.9$ можна отримати $\bar{k}_{res} = 4.55$ та 3.65 , що дасть $u = 1$ та 1.23 , див. 3.2. Згідно рівняння (3.40), декремент $|\gamma_d^{loc}|/\omega \sim 0.02$.

Для прикладу можна розглянути ТАЕ-моду з $m = 14$, 15 та $n = 13$, радіальною структурою, показаною на 3.6, і частотою 42.48 кГц [55]. З рівняння (3.35) випливає, що декремент згасання цієї моди $|\gamma_d|/\omega = 0.0244$. Він слабо залежить від профілів концентрації та температури, бо ширина моди досить мала, і практично не змінюється, якщо покласти $n_e = \text{const}$ чи $T_i = T_i(r_*) = \text{const}$. Декременти згасання для цієї моди із штучно підвищеною до 70 кГц частотою показані в таблиці 3.2. Всі ці величини якісно узгоджуються з наведеною вище оцінкою в локальному наближенні.

3.1.4.3. Згасання ТАЕ-мод у експерименті на LHD. Вищенаведений аналіз передбачає, що ізомонні та ТАЕ-моди у Wendelstein 7-X зазнаватимуть сильного згасання через механізм Ландау. Проте ТАЕ-нестійкості вже спостерігалися у стелараторах і подібних системах, зокрема на при-

Таблиця 3.2

Декремент згасання ТАЕ-моди у W7-X з частотою 42.48 кГц та з штучно збільшеними значеннями частоти. Розраховано за рівнянням (3.35) з $\delta_0 = 1.5$ для моди зі структурою, зображеною на 3.6.

f, kHz	$ \gamma_d /\omega$
70	0.0152
60	0.0192
50	0.0225
42.48	0.0244

строї LHD в розряді #24512 [56,57]. З метою перевірки відповідності розвинутої теорії до експерименту, нижче буде наведена оцінка згасання Ландау для цього розряду.

Під час дотичної інжекції нейтральних протонів з енергіями \mathcal{E}_0 до 150 кеВ в гелієву плазму, у цьому розряді спостерігалась альфвенова активність з тороїдальними модовими числами $n = 1$ та $n = 2$ і частотами в інтервалі 50-80 кГц [57]. Обчислення власних мод кодом ВОА [42] знайшли дві дискретні ТАЕ-моди з $n = 1$ [58], “парну” ТАЕ-моду з частотою 50 кГц та “непарну” із частотою 60 кГц. Обидві моди були локалізовані біля поверхні $r/a \sim 1/3$; для них були обчислені інкременти нестійкості $\gamma_\alpha/\omega \approx 0.3$ для парної і $\gamma_\alpha/\omega \approx 0.03$ для непарної моди [58].

В центральній області плазми, тиск іонів пучка істотно перевищував тиск основної плазми: $\beta_b(0) = 1.7\%$, $\beta(0) \approx 0.45\%$. Концентрація електронів на магнітній осі складала $n_e(0) = 10^{19} \text{ м}^{-3}$. Ці плазмові параметри дуже відрізняються від очікуваних у перших експериментах з інжекцією на Wendelstein 7-X. Ключові відмінності полягають у більшій популяції надтеплових іонів та нижчому плазмовому β . Крім цього, число періодів магні-

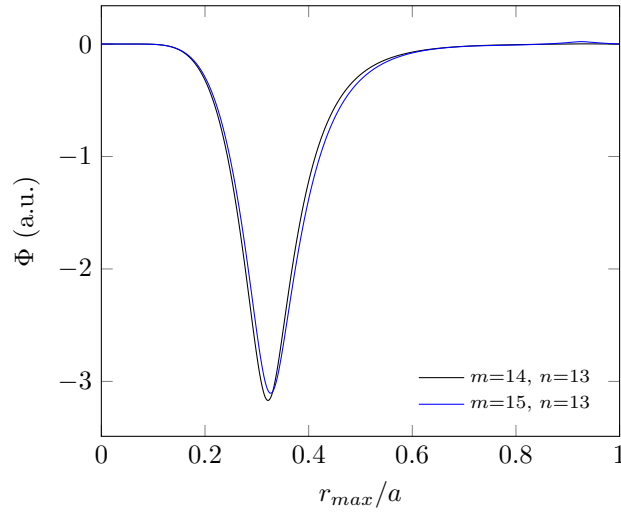


Рис. 3.6. ТАЕ-мода у Wendelstein 7-X. Частота моди – 42.48 кГц, головні модові числа – $m = 14, 15$ та $n = 13$ [55].

тного поля на LHD вдвічі більше, ніж на W-7X, а оберতальне перетворення у центральній області плазми, навпаки, менше ($\iota_{LHD} = 0.4 - 0.5$). Через це, найширша щілина у альфвеновому континуумі $\mu/\nu = 2/1$ розташована дуже далеко від ТАЕ-щілини (відношення частот $\omega_{*,21}/\omega_{*,10} = 23$, набагато більше, ніж у W7-X), і відповідно вплив гвинтової щілини на ТАЕ-щілину в центральній області плазми ($r/a < 0.4$) малий, див. рис. 7а в [58]. Тим не менше, значення β_i в LHD близьке до (3.10), як і на W7-X. Тому згасання Ландау не буде надто малим, що буде показано лише в локальному наближенні: з розрахунків, наведених у попередніх підпунктах, видно, що це наближення дає результати, які якісно узгоджуються з більш строгими розрахунками γ_d .

Через те, що в області локалізації мод ($r/a \sim 0.3$) експериментально виміряна частота $\hat{\omega}$ лежить всередині ТАЕ-щілини (див. рис. 7а в [58]), можна взяти $R_\omega = R$. Крім цього, гвинтові гармоніки ϵ_{11} та ϵ_{21} приблизно рівні (див. рис. 6 в [58]), тому слід враховувати обидві. Резонансні швидкості при $\iota = 0.5$ виходять рівними $v_{\parallel}^{res}/v_{A*} = (1 \pm 36)^{-1}$ та $v_{\parallel}^{res}/v_{A*} = (1 \pm 38)^{-1}$, відповідно, а при $\iota = 0.4$ (оскільки шир магнітного поля в LHD не ма-

лий, ι помітно змінюється в області локалізації моди) – ще меншими. Це дає $u = 0.55 - 0.61$ при $\beta_i = \beta_e = 2.14 \times 10^{-3}$. Приймаючи на радіусі $r/a = 0.3$ нормовану температуру $\Theta \equiv T_i(r)/T_0 = 0.9$ та $\epsilon_{ef} = 0.08$, !! for which $Q(u) \approx 2$. Нормалізована частота складає $\bar{\omega} = 2.7$ для парної і 3.24 для непарної моди. Відношення $\epsilon_{\mu\nu}/\epsilon$ для ϵ_{11} та ϵ_{21} можна наближено взяти рівним 0.5. Тоді рівняння (3.40) дасть $|\gamma_d^{loc}|/\omega = 0.01$ для парної моди і 7.6×10^{-3} для непарної моди. Відповідні значення інкрементів γ_α/ω набагато перевищують ці цифри завдяки дуже великому градієнту тиску частинок пучка в області локалізації ТАЕ-мод.

Зроблені оцінки є досить грубими, бо частка водню у гелієвій плазмі LHD точно не відома (відомо лише, що вона не дуже мала). Тим не менше, цих оцінок достатньо, щоб висувати, що в розглянутому експерименті на LHD згасання було меншим, а драйв нестійкості – набагато більшим, ніж очікується у перших експериментах з інжекцією нейтральних пучків на W7-X.

3.1.4.4. Згасання високочастотних мод у Wendelstein 7-X. Як показано у підпункті 3.1.2.2, $v_{i\parallel}^{res}/v_{Ti} \gg 1$ для НАЕ та МАЕ-мод, з чого випливає, що згасання Ландау на іонах для них експоненційно мале (крім випадків, коли β_i дуже велике). Тому нижче буде розглянуто згасання таких мод на електронах при малому β і на іонах при великому β .

Щоб оцінити декремент згасання високочастотних щілинних мод на електронах, достатньо наблизити їхні частоти рівнянням (3.8). Тоді рівняння (3.42) набуде вигляду

$$\frac{\gamma_d^{(e)loc}}{\omega} = -\frac{\sqrt{\pi}\beta_{e*}}{2g_1^2\delta_0} \frac{1}{(\mu_0\iota_* - \nu_0 N)^2} \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\mu\epsilon_{\mu\nu}}{\epsilon}\right)^2 u_e^2 Q(u_e), \quad (3.48)$$

де

$$u_e = \left(\frac{n_e M_e}{n_i M_i \beta_{e*}}\right)^{1/2} \left|1 + 2\frac{\mu\iota_* - \nu N}{\mu\iota_0 - \nu_0 N}\right|. \quad (3.49)$$

Подальший розгляд вестиметься для водневої плазми у W7-X, з $\beta_{e*} = 0.01$ і $\delta_0 = 1.5$. Для згасання через тороїдальну гармоніку магнітного поля ($\mu = \pm 1, \nu = 0$), приймаючи $R_\omega = R$, можна отримати $u_e = 0.41$ та 0.16 для HAE_{11} ; $u_e = 0.525$ та 0.15 для HAE_{21} . За таких значень u_e , величина $Q(u_e)$ сильно залежить від ϵ_{ef} , див. 3.2. Це означає, що декремент згасання дуже чутливий до радіального профіля амплітуди моди і до розташування частоти моди у щілині альфвенового континууму. У конфігурації з великою дзеркальною гармонікою згасання буде найменшим, $|\gamma_d^{(e)loc}|/\omega \sim 5 \times 10^{-6}$ для HAE_{11} та 2×10^{-5} для HAE_{21} . Для мод з більш високими частотами ($R_\omega < R$), декремент згасання буде більшим. Таким чином, можна висувати, що вплив згасання Ландау, пов'язаного із резонансом $\mu/\nu = \pm 1/0$, на високочастотні щілинні моди менший, ніж для TAE та ізомонних мод. Це і не дивно: у Wendelstein 7-X тороїдальна гармоніка вдвічі менша за гвинтову (що дає різницю декрементів у чотири рази); крім цього, $u_e^{\text{TAE}} \ll u_i^{\text{HAE,MAE}} \lesssim 1$, що зменшує величину Q .

Якщо тепер розглянути згасання MAE -мод на іонах через гвинтовий резонанс ($\mu = \nu = 1$), можна побачити, що $\bar{k}_{res} = 6.6$ та 1.6 . Припускаючи, що мода локалізована в центральній області, де тиск плазми високий, $\beta_i = 4\%$, можна отримати $u_i = 1.9$ та 7.8 відповідно для більшого і меншого значень \bar{k}_{res} . Тоді рівняння (3.40) дає $|\gamma_d|/\omega = 10^{-3}$.

3.1.4.5. Згасання альфвенових щілинних мод у реакторі Helias. Як показано у підпункті 3.1.2.2, резонансам з $\mu = \mu_0, \nu = \nu_0$ відповідає резонансна швидкість $v_{\parallel}^{res} = v_{A*}/3$, яка дозволяє щілинним модам взаємодіяти з тепловими іонами у плазмах з високим β . У магнітному полі реактора Helias домінують ті самі фур'є-гармоніки, що і у конфігурації Wendelstein 7-X з великою дзеркальною гармонікою. Тому резонанс з $v_{\parallel}^{res} = v_{A*}/3$ може грати важливу роль у згасанні TAE та HAE_{11} -мод. Легко побачити, що для цих резонансів $|\bar{k}_{res}| = 1.5|\mu - \nu N|$. $v_{\parallel}^{res} = v_{A*}/3$ при $|k_{res}| = 1.35$ для

ТАЕ-мод та при $|\bar{k}_{res}| = 6.15$ для НАЕ₁₁-мод на радіусі $\iota_* = 0.9$. Приймаючи, що в центральній області тиск плазми $\beta_i = 6.5\%$, що узгоджується з параметрами реактора Helias, наведеними у [51], можна отримати $u = 1.3$ та $Q(u) = 1.5$. Тоді рівняння (3.40) дає $|\gamma_d^{loc}|/\omega = 0.02$ для ТАЕ-мод та $|\gamma_d^{loc}|/\omega = 3.7 \times 10^{-3}$ для НАЕ₁₁-мод.

Оскільки $N \gg 1$, частота МАЕ-мод лише незначно перевищує частоту НАЕ₁₁-мод. Тому для МАЕ-мод резонансна швидкість v_{\parallel}^{res} , що відповідає резонансу $\mu/\nu = 1/1$, мало відрізнятиметься від $v_A/3$, а саме, $v_{\parallel}^{res} = v_A/2.6$ при $\iota = 0.9$. Локальна оцінка відповідного декременту згасання складатиме $|\gamma_d^{loc}|/\omega = 2.4 \times 10^{-3}$.

3.1.5. Підсумки та висновки. У цьому підрозділі було виведено загальні формули для інкрементів/декрементів, пов'язаних із механізмом Ландау. Порівняно з формулами, відомими з попередніх робіт [43, 58], в них враховані кінетичні ефекти основної плазми та її стисливість. Стисливість важлива для існування ізомонних мод, але, як показано у цьому підрозділі, справляє малий вплив на їх згасання. Виведені формули нехтують шириною орбіт; це наближення виправдане для частинок основної плазми і тому достатнє для розгляду поставленої задачі. Ефекти скінченної ширини орбіт можуть бути важливими для надтеплових іонів; їх можна врахувати, наприклад, як у роботі [52].

Показано, що згасання Ландау альфвенових мод відіграє важливу роль у стелараторах. При низькому β , згасання Ландау сильно стабілізує ТАЕ та ізомонні моди. При високому β , яке передбачається у реакторі Helias [51], згасання Ландау на іонах велике не лише для ТАЕ, а й для НАЕ та МАЕ мод. Це сильне згасання є наслідком відсутності в стелараторах осової симетрії, що приводить до існування резонансів через гвинтові гармоніки магнітного поля ($\epsilon_h \equiv \epsilon_{\mu\nu}$ з $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$). Виняток становить згасання ТАЕ-мод у плазмі з високим β , яке відбувається за рахунок токамачного

сайдбенд-резонансу.

Сильний вплив неосесиметричних резонансів на ТАЕ та ізомонні моди у плазмах з низьким β можна пояснити наступним чином. Декремент згасання пропорційний до квадрата гвинтових фур'є-гармонік магнітного поля, які належать до найбільших гармонік у стелараторах (у W7-X найбільшою гвинтовою гармонікою є ϵ_{11}). На противагу, інкремент драйву пропорційний до квадрата тороїдальної гармоніки, $\gamma_\alpha \propto \epsilon_t^2 \ll \epsilon_h^2$. Крім цього, гвинтові резонанси дають ТАЕ та ізомонним модам взаємодіяти з дуже чисельною групою частинок, а саме з тепловими іонами основної плазми, якщо їх тиск β_i задовільняє певні умови.

Згасання високочастотних щілинних мод у плазмах з низьким β відбувається через токамачний сайдбенд-резонанс, але роль цього згасання незначна. По-перше, інкремент драйву цих нестійкостей більший, $\gamma_\alpha \propto \epsilon_h^2$, тоді як декремент їхнього згасання $\gamma_d \propto \epsilon_t^2$. Крім цього, в згасанні бере участь порівняно небагато резонансних частинок (електронів). Отже, за відсутності більш сильних механізмів згасання, високочастотні щілинні моди легше дестабілізуються у плазмах з низьким β .

Коли β вище, МАЕ моди можуть досить сильно згасати на іонах через гвинтовий резонанс.

Прикметною особливістю неосесиметричних резонансів є те, що при $\mu = \mu_0$ та $\nu = \nu_0$ їм відповідають ті ж самі характерні резонансні швидкості, які з'являються для сайдбенд-резонансу з ТАЕ-модами в токамаках, а саме $v_{\parallel}^{res} = v_A$ та $v_A/3$ [43]. Резонансна швидкість $v_{\parallel}^{res} = v_A/3$ пов'язана із тиском іонів плазми співвідношенням $\beta_i = 1/(9u_i^2)$. З цього випливає, що резонансна швидкість точно дорівнює тепловій швидкості іонів ($u_i = 1$) при $\beta_i = 1/9$, що навряд чи може мати місце у стелараторах. Згідно [51], на магнітній осі реактора Helias β не перевищує 13.55%. Припускаючи, що $\beta_i = 0.5\beta$, матимемо $\beta_i = 6.5\%$. Тоді $u_i = 1.3$ і Q буде досить близьким до $Q(u_i = 1)$, див. 3.2. Тому згасання локалізованих в центральній області

плазми мод, в тому числі високочастотних, в реакторі Helias, може бути значним.

Проведено детальний аналіз ізомонних та ТАЕ-мод у планованих експериментах з інжекцією нейтральних пучків на W7-X. Цей аналіз показав, що декремент згасання ізомонних мод може перевищувати інкремент драйву, викликаного пролітними інжекттованими іонами, тобто механізм згасання Ландау на основній плазмі може запобігти дестабілізації цих мод. Для уточнення цього передбачення слід розрахувати інкремент з реалістичною функцією розподілу інжекттованих іонів і врахувати внесок захоплених надтеплових іонів. Проте видається малоімовірним, що захоплені інжекттовані іони можуть суттєво збільшити драйв у перших експериментах з NBI, бо інжекція породжує малу частку захоплених іонів, які знаходитимуться здебільшого на периферії плазми і втрачатимуться звідти [59], див. рис. A2 в роботі [48]. З іншого боку, наявність додаткового згасання на захоплених іонах основної плазми, яке не враховувалося у цьому підрозділі, схиляє до висновку, що ізомонні та ТАЕ-моди будуть стійкими в перших експериментах з інжекцією.

Показано також, що розвинена теорія узгоджується з експериментом на LHD, де спостерігалися дві ТАЕ-моди: у цьому експерименті плазмове β було низьким, а β пучка – високим, і в області локалізації ТАЕ-мод існував великий градієнт тиску інжекттованих частинок. Завдяки цьому згасання було недостатнім, щоб стабілізувати нестійкість цих мод.

3.2. Збудження температурно-градієнтної альфвенової нестійкості плазми

3.2.1. Вступ. Перенесення енергії та імпульсу поперек магнітного поля дестабілізованими альфвеновими власними модами (просторове каналювання) може бути важливим чинником, що впливає на робочі показники

плазми [60]. Припускають, що саме просторове каналювання під час інжекції нейтральних пучків на сферичному токамаці NSTX погіршувало нагрівання плазми, переносячи частину інжектуючої потужності з центральної області плазми на периферію (інша гіпотеза припускає, що дестабілізовані альфвенові власні моди сильно погіршили утримання енергії електронами [61]). З іншого боку, якби просторове каналювання було направлене досередини, воно справляло б сприятливий вплив на баланс енергії плазми. Можна припустити, що саме це явище мало місце під час перших експериментів на стелараторі Wendelstein 7-X: По-перше, радіальний профіль температури іонів, $T_i(r)$, був досить плоским у центральній області плазми і круто спадав на периферії [1, 62, 63]; по-друге, спостерігались тривалі високочастотні осциляції, ідентифіковані як ЕАЕ-мода, локалізована при $r/a \gtrsim 0.5$, де a – малий радіус плазми [64]. По-третє, в цих експериментах джерел надтеплових іонів не було, іони нагрівалися виключно через зіткнення з електронами. Ці факти наводять на думку, що неоднорідність температури іонів на периферії плазми розгойдувала альфвенову моду, яка вплинула на профіль температури таким чином, що дестабілізація в периферійній області компенсувалася згасанням в області, де $T_i(r) \approx \text{const}$.

У цьому підрозділі буде розглянуто питання, чи можуть альфвенові власні моди збуджуватися у стелараторній плазмі з максвеловим розподілом швидкостей (найчастіше альфвенові нестійкості збуджуються надтепловими іонами, утвореними інжекцією нейтральних пучків або іншими джерелами нагрівання плазми) і чи можуть нестійкості, збуджені градієнтом температури, приводити до доцентрового просторового каналювання. Крім загального аналізу, буде розглянуто конкретний приклад, що співвідноситься з описаним у роботі [64] експериментом на W7-X.

В аналізі буде використано той факт, що так звані неосесиметричні резонанси, які виникають у стелараторах через відсутність у них осової симетрії, можуть приводити до взаємодії альфвенових мод та іонів із швидко-

стями, значно меншими за резонансні швидкості в токамаках [43]. Завдяки цьому, частинки з енергіями $\mathcal{E} \gtrsim T_i$ можуть взаємодіяти з модами.

Слід відзначити, що альфвенові коливання у відсутності надтеплових іонів можуть збуджуватися і в токамаках. Зокрема, у присутності градієнта температури іонів та магнітних островів можуть збуджуватися низькочастотні нестійкості, так звані бета-індуковані альфвенові власні моди (Beta-induced Alfvén Eigenmodes, BAE) [65, 66], див. також оглядову роботу [37].

3.2.2. Дестабілізація альфвенових власних мод градієнтом температури електронів та іонів. У відсутності надтеплових іонів, інкремент/декремент альфвенової нестійкості описується виразом

$$\gamma = \frac{1}{2\mathcal{W}} \text{Re} \int d^3x \tilde{j}_\perp^{kin} \cdot \nabla_\perp \tilde{\Phi}, \quad (3.50)$$

де $\gamma = \sum_{\sigma=e,i} \gamma_\sigma$, $\tilde{j}_\perp^{kin} = \sum_{\sigma=e,i} \tilde{j}_{\sigma,\perp}^{kin}$ – поперечний струм,

$$\mathcal{W} = \int d^3x c^2 (\nabla_\perp \tilde{\Phi})^2 / (4\pi v_A^2)$$

– енергія моди, Φ – потенціал електричного поля, v_A – альфвенова швидкість, тильдою позначені збурені величини, а індексами e та i – відповідно електрони та іони. Коли поперечний струм виникає внаслідок дрейфу частинок у рівноважному магнітному полі і впливом захоплених частинок можна знехтувати, обчислення дають (див. підрозділ 3.1)

$$\begin{aligned} \frac{\gamma^{(\sigma)}}{\omega} &= \frac{\sqrt{\pi} M_\sigma}{8\delta_0 M_i} \left[\sum_{mn\mu\nu} \int_0^a dr r n_\sigma(r) \right. \\ &\quad \times \epsilon^{-2} |\mu \epsilon_{\mu\nu} \Phi'_{mn} - m \epsilon'_{\mu\nu} \Phi_{mn}|^2 Q(u_\sigma) \bar{k}_{res}^{-2} \Big] \\ &\quad \times \left[\sum_{mn} \int_0^a dr r^{-1} n_i(r) (r^2 |\Phi'_{mn}|^2 + m^2 |\Phi_{mn}|^2) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

де індекс σ позначає сорт частинок, Φ_{mn} та $\epsilon_{\mu\nu}$ – фур'є-гармоніки у розвиненнях $\tilde{\Phi} = \sum_{m,n} \Phi_{m,n}(r) \exp(im\vartheta - in\varphi - i\omega t)$ та $B = \bar{B}[1 + 0.5 \sum_{\mu,\nu} \epsilon_{\mu\nu} \exp(i\mu\vartheta -$

$i\nu N\varphi]$, \bar{B} – середня індукція магнітного поля на магнітній осі, радіальна координата r визначається рівнянням $\psi = \bar{B}r^2/2$, де ψ – тороїдальний магнітний потік, ϑ та φ – відповідно полоїдальний та тороїдальний бузеві кути, N – число періодів рівноважного магнітного поля, $\epsilon = r/R$, n_σ – концентрація частинок, $\bar{k}_{res} \equiv k_{res}R = (m + \mu)\iota - (n + \nu N)$, ι – обертальне перетворення силових ліній магнітного поля, R – великий радіус тора, штрихом позначені похідні за радіусом, $\delta_0 \gtrsim 1$ визначається формою поперечного перерізу плазми [42], $Q(u)$ визначається рівнянням

$$\int d^3v (v_{\parallel}^2 + 0.5v_{\perp}^2)^2 \delta(\omega - k_{res}v_{\parallel}) \hat{\Pi} F_{\sigma} = \frac{n_{\sigma}\omega}{\sqrt{\pi}k_{res}^2} Q(u_{\sigma}), \quad (3.52)$$

де F_{σ} – функція розподілу частинок, $u_{\sigma} \equiv |v_{\parallel}^{res}|/v_{T\sigma}$, $v_{\parallel}^{res} = \omega/k_{res}$, $v_T = \sqrt{2T/M}$ – теплова швидкість, M – маса частинок, а оператор $\hat{\Pi}$ у випадку плазми з ізотропним розподілом швидкостей має форму

$$\hat{\Pi} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} + \left(\frac{\omega R}{v_{\parallel}} + n \right) \frac{1}{i\omega\omega_B} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (3.53)$$

де ω_B – циклотронна частота. Завдяки тому, що вираз (3.53) для оператора $\hat{\Pi}$ розпадається на дві частини, можна записати $Q = Q_v + Q_r$, де Q_v та Q_r пов'язані відповідно з першим і другим членами правої частини рівняння (3.53).

Очевидно, що $Q_v < 0$ і, отже, $\gamma < 0$ у плазмі з максвеловим розподілом швидкостей, $F_M \propto \exp\{-(\mathcal{E}_{\parallel} + \mathcal{E}_{\perp})/T\}$, де \mathcal{E}_{\parallel} та \mathcal{E}_{\perp} – кінетична енергія руху частинки вздовж та поперек магнітного поля. Отже, нестійкість з'являється, коли $Q_r > |Q_v|$. Величина Q_r по суті визначається резонансною швидкістю. Оскільки

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F_M}{\partial r} \right|_{v_{\parallel}=v_{\parallel}^{res}} &= \frac{n_{\sigma}}{\pi^{3/2}v_{T\sigma}^3} e^{-u_{\sigma}^2 - \mathcal{E}_{\perp}/T_{\sigma}} \\ &\times \left[\frac{n'_{\sigma}}{n_{\sigma}} + \left(u_{\sigma}^2 + \frac{\mathcal{E}_{\perp}}{T_{\sigma}} - \frac{3}{2} \right) \frac{T'_{\sigma}}{T_{\sigma}} \right], \end{aligned} \quad (3.54)$$

відношення члена з ∇T_{σ} до члена з ∇n_{σ} зростає з u_{σ} , принаймні для $u^2 \geq 3/2$. Отже, можна очікувати, що умову $Q_r > |Q_v|$ легше задовільнити при

великих u . Через це надалі припускатиметься, що $u > 1$. Тоді інтеграл по поперечній швидкості в (3.52) можна брати в межах $(0, \infty)$, бо при $u > 1$ область захоплених частинок знаходиться при $\mathcal{E}_\perp \gg T_\sigma$. В результаті можна отримати

$$Q_v(u) = -\frac{1}{u}(2u^4 + 2u^2 + 1)e^{-u^2}, \quad (3.55)$$

$$Q_r(u) = -\frac{\rho_\sigma v_{T\sigma}}{2\iota\omega r}[(m + \mu)\iota - \nu N] \left[Q_v \frac{n'_\sigma}{n_\sigma} + Q_T \frac{T'_\sigma}{T_\sigma} \right], \quad (3.56)$$

де

$$Q_T(u) = \frac{1}{u}(2u^6 + u^4 + 2u^2 + 1.5)e^{-u^2}. \quad (3.57)$$

Надалі припускатиметься, що $Q_r > 0$ (інакше немає нестійкості). Це накладає обмеження на модові числа, номери резонансних гармонік (μ, ν) та на радіальні похідні температури і концентрації плазми. Відношення члена, що відповідає за збудження, до стабілізуючого члена буде від'ємним і дається виразом

$$\frac{Q_r}{Q_v} = -\frac{\rho_\sigma v_{T\sigma}}{2\iota\omega r}[(m + \mu)\iota - \nu N] \left(\frac{n'_\sigma}{n_\sigma} + \mathcal{K} \frac{T'_\sigma}{T_\sigma} \right), \quad (3.58)$$

де $\mathcal{K} \equiv Q_T/|Q_v|$ – “підсилюючий множник”,

$$\mathcal{K} = \frac{2u^6 + u^4 + 2u^2 + 1.5}{2u^4 + 2u^2 + 1}. \quad (3.59)$$

Наприклад, $\mathcal{K}(2) = 3.44$, $\mathcal{K}(3) = 8.61$. З іншого боку, функція $Q_T(u)$ повільно спадає в інтервалі $1 < u < 3$, див. рис. 3.7. Отже, слід очікувати, що саме цей інтервал резонансних швидкостей гратиме головну роль в нестійкостях.

Рівняння (3.55)–(3.59) працюють і під час розвитку нестійкості, якщо кулонові зіткнення достатньо сильні, щоб підтримувати максвеловий розподіл швидкостей.

3.2.2.1. Доцентрове просторове каналювання та його наслідки. Нехай $\mathcal{K} \gg 1$ і у відношенні Q_r/Q_v домінує член з градієнтом температури. Тоді $\mathcal{K} \approx u^2 \propto 1/T_\sigma$, бо $k_{res} \approx \text{const}$ всередині області, зайнятої

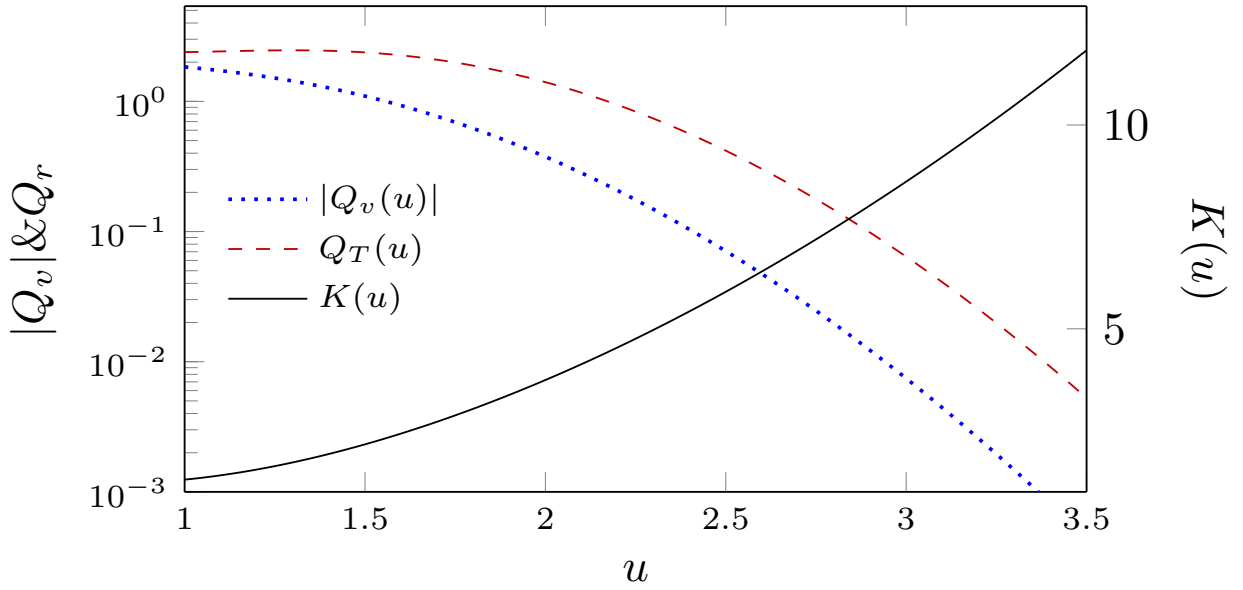


Рис. 3.7. Залежність функцій $Q_v(u)$, $Q_T(u)$, та підсилюючого множника K від $u \equiv |v_{\parallel}^{res}|/v_T$.

модю, коли шир магнітного поля незначний. Це приводить до $Q_r/Q_v \propto T'_\sigma/(rT_\sigma)$, звідки можна виснувати, що умові існування нестійкості $Q_r/|Q_v| > 1$, з $Q_r > 0$, найпростіше задовільнити на периферії плазми, де температура низька. Наприклад, коли $T_\sigma = T_0(1 - r^2/a^2)^\tau$, $Q_r/Q_v \propto (1 - r^2/a^2)^{-1}$. З цього випливає, що може мати місце $Q_r/|Q_v| < 1$ в області $r_1 < r < r_0$, але $Q_r/|Q_v| > 1$ в області $r_0 < r < r_2$, де r_0 визначається з рівняння $Q_r/|Q_v| = 1$, а $r_1 < r < r_2$ – область локалізації моди. Сумарний інкремент нестійкості, $\gamma = \gamma_+ - |\gamma_-|$, де $\gamma_+ > 0$ та $\gamma_- < 0$ – відповідно інкремент збудження і декремент згасання, які визначаються рівнянням (3.51), де інтеграл у чисельнику береться відповідно у межах $(0, r_0)$ та (r_0, a) . У стаціонарному стані $\gamma_+ = |\gamma_-|$, так що сумарний інкремент $\gamma = 0$.

В розібраному випадку мода переноситиме енергію з периферії до центральної області плазми, тобто в області локалізації моди матиме місце доцентрове просторове каналювання енергії, яке поліпшуватиме її утримання в плазмі.

Присутність додаткових механізмів згасання може приводити до погли-

нання енергії моди за межами області $r_1 < r < r_0$, що зменшуватиме потік енергії.

Доцентрове просторове каналювання буде істотним, якщо щільність поглинутої в області $r_0 < r < r_2$ потужності (P_+) та щільність потужності нагрівання плазми модою в області $r_1 < r < r_0$ (P_-) достатньо великі. Щільність потужності P_{\pm} можна оцінити як

$$P_{\pm} = 2\omega \frac{\gamma_{\pm}}{\omega} \frac{B^2}{4\pi} \left(\frac{\tilde{B}}{B} \right)^2. \quad (3.60)$$

У стаціонарному стані, потік енергії досередини через поверхню r_0 дорівнюватиме $P_+ V_+$, де V_+ – об'єм області, де мода поглинає енергію. Припускаючи для прикладу, що $r_0/a = 0.6$ та $r_2/a = 0.7$, і беручи загальний об'єм плазми рівним $V_p = 30 \text{ м}^3$, можна отримати $V_+ = 0.13V_p = 3.9 \text{ м}^3$.

Амплітуда моди не визначається теорією, розглянутою у цьому підрозділі. Якщо оцінити її у припущенні, що потік енергії від доцентрового просторового каналювання на радіусі $r/a \sim 0.6$ дорівнює неокласичному перенесенню енергії тепловими іонами до периферії плазми ($\sim 0.05 \text{ МВт}$), розрахованому для плазми у W7-X з нагріванням на електронно-циклотронному резонансі потужністю $\mathcal{P} = 2 \text{ МВт}$ [62], то, взявши $\gamma_+/\omega = 10^{-3}$, $B = 2.3 \text{ тл}$, $f = 200 \text{ кГц}$ (ця частота лежить у щілині альфвенового континууму, пов'язаній з еліптичністю), можна отримати $\tilde{B}/B \sim 10^{-3}$. Це дещо більше, ніж амплітуди альфвенових збурень, що зазвичай спостерігаються в експериментах ($\tilde{B}/B \lesssim 5 \times 10^{-4}$ [37]), але й моди з меншими амплітудами можуть справляти помітний вплив.

3.2.3. Застосування теорії до експерименту з високочастотними коливаннями на стелараторі Wendelstein 7-X. У цьому підпункті розглядатиметься нестійкість, яка розвинулася при $t_1 \sim 100 \text{ мс}$ і мала на цей момент частоту $f \sim 220 \text{ кГц}$, див. рис. 11 у роботі [64]. Частота осциляцій зменшувалась з часом, що вказує на її альфвенову природу,

бо концентрація плазми в цей час зростала. Амплітуда моди зростала до $t_2 \sim 200$ мс, після чого мода досягла квазістаціонарного стану із частотою біля 180 кГц і полоїдальним модовим числом $|m| = 16$, який тривав 600 мс (концентрація плазми повільно зростала протягом цього часу). Така картина наводить на думку, що амплітуда моди в період до t_2 зростала, бо $\gamma_+ > |\gamma_-|$, а коли її амплітуда стала достатньо великою, встановився стаціонарний потік енергії із області, де мав місце великий градієнт температури, до області, розташованої при менших радіусах, з $\gamma_+ \approx |\gamma_-|$.

Нижче розглядатиметься стаціонарна фаза цієї нестійкості у припущенні, що область локалізації моди включає принаймні частину області з великим T'_i (біля $r/a \sim 0.6$) і що мода взаємодіє з частинками через резонанс $\mu = \nu = \pm 1$ (бо гармоніка ϵ_{11} у W7-X одна з найбільших). Тоді можна взяти $\iota = 0.8 - 0.82$, $T_i = 1 - 1.5$ кеВ, $|m| = 16$, $n = 12$, $f = 180$ кГц. Резонансна швидкість, що відповідає резонансу на гвинтовій гармоніці, дорівнюватиме $v_{\parallel} = \omega/k_{res}$, де $k_{res} = [(m+\mu)\iota - (n+\nu N)]/R$. Підставляючи модові числа та резонансні номери, $|\bar{k}_{res}| = 5 - 5.3$ та $3.4 - 3.06$, що дасть $|v_{\parallel}^{res}| = 1.24 \times 10^8$ см с⁻¹ та 1.82×10^8 см с⁻¹. Отже, $2.3 \leq u_i \leq 4.6$, підсилюючий множник для іонів набагато більший за одиницю, а саме $5 < \mathcal{K} < 20$ (див. (3.59)). З іншого боку, u_e набагато менше за одиницю, тому $Q_r(u_e)$ навряд чи перевищуватиме $|Q_v(u_e)|$. Крім цього, частка резонансних пролітних частинок при $u \ll 1$ мала. Тому взаємодією моди з електронами, принаймні в рамках розвинутої теорії, можна знехтувати.

Оскільки \mathcal{K} значно більший за одиницю, умова $Q_r > |Q_v|$ задовільнятиметься в області великих T' . Але це ще не означає, що інкремент збудження моди перевищуватиме декремент її згасання на основній плазмі у всій області її локалізації. Щоб визначити, чи $\gamma \geq 0$, потрібно обчислити інтеграли у рівнянні (3.51), а для цього потрібно знати структуру моди та радіальні профілі параметрів плазми. Згідно [64], у розрахунках прийматиметься, що мода – це ЕАЕ, локалізована при $0.5 \lesssim r/a \lesssim 0.7$, з

модовими числами $|m_1| = 16$, $|m_2| = 14$, та $|n| = 12$, що $n_i(r) = n_e(r)$, причому $n_e(r)$ береться з рис. 10 у цитованій роботі. Крім цього, оскільки точних профілів температури іонів для цього експерименту немає, розрахунки обмежуватимуться модельним профілем: $T_i(r) = \text{const} = T_i(r_1)$ при $0 \leq r \leq r_1$; $T(r) = T(r_1)[1 - (r - r_1)/(r_2 - r_1)]$ при $r_1 \leq r \leq r_2$; $T(r) = T(r_2)[1 - (r - r_2)/(a - r_2)]$ при $r_2 \leq r \leq a$. Цей профіль якісно узгоджується з профілем, виміряним у розряді W7-X з нагріванням на електронно-циклотронному резонансі потужністю $\mathcal{P} = 2$ МВт, див. рис. 6 у роботі [1]; цей профіль характеризується крутим градієнтом $T_i(r)$ при $r/a \sim 0.6$, але виміряний профіль не дотягується до периферії. Схожий профіль $T_i(r)$, але із значно більшим спадом температури іонів в області $r/a = 0.6 - 0.8$ (на ~ 2.5 кеВ) був передбачений числовим моделюванням для розряду із $\mathcal{P} = 4$ МВт, див. рис. 4 у роботі [67]. Експеримент, описаний у [64], проводився при $\mathcal{P} = 2$ МВт. Тому можна очікувати, що профіль $T_i(r)$ у цьому експерименті був подібний до того, що мав місце у згаданих вище розрядах.

Обчислення проводилися для двох випадків: $T_i(0) > 2$ кеВ та $T_i(0) < 2$ кеВ.

Результати обчислень “часткового” інкременту/декременту γ_r , який визначається з рівняння $\gamma = a^{-2} \int_0^a dr r \gamma_r$, а також функцій Q_r та $|Q_v|$ для того зі значень u , при якому вони найбільші, для випадку $T_i(0) > 2$ кеВ наведені на рис. 3.8. Можна бачити, що, як і очікувалося, область, де домінує збудження/згасання, розташована відповідно при більших/менших радіусах, тобто має місце доцентрове просторове каналювання. Система близька до порогу стійкості, $\gamma_+ \approx |\gamma_-|$, причому $(\gamma_+ - |\gamma_-|)/\gamma_+ = 9\%$. Отже, мода може існувати у квазістаціонарному стані, що і спостерігалось в експерименті. Трохи змінюючи положення області великого градієнту температури, можна отримати дуже відмінні результати, від сильного збудження до сильного згасання моди. Це наводить на думку, що в експерименті

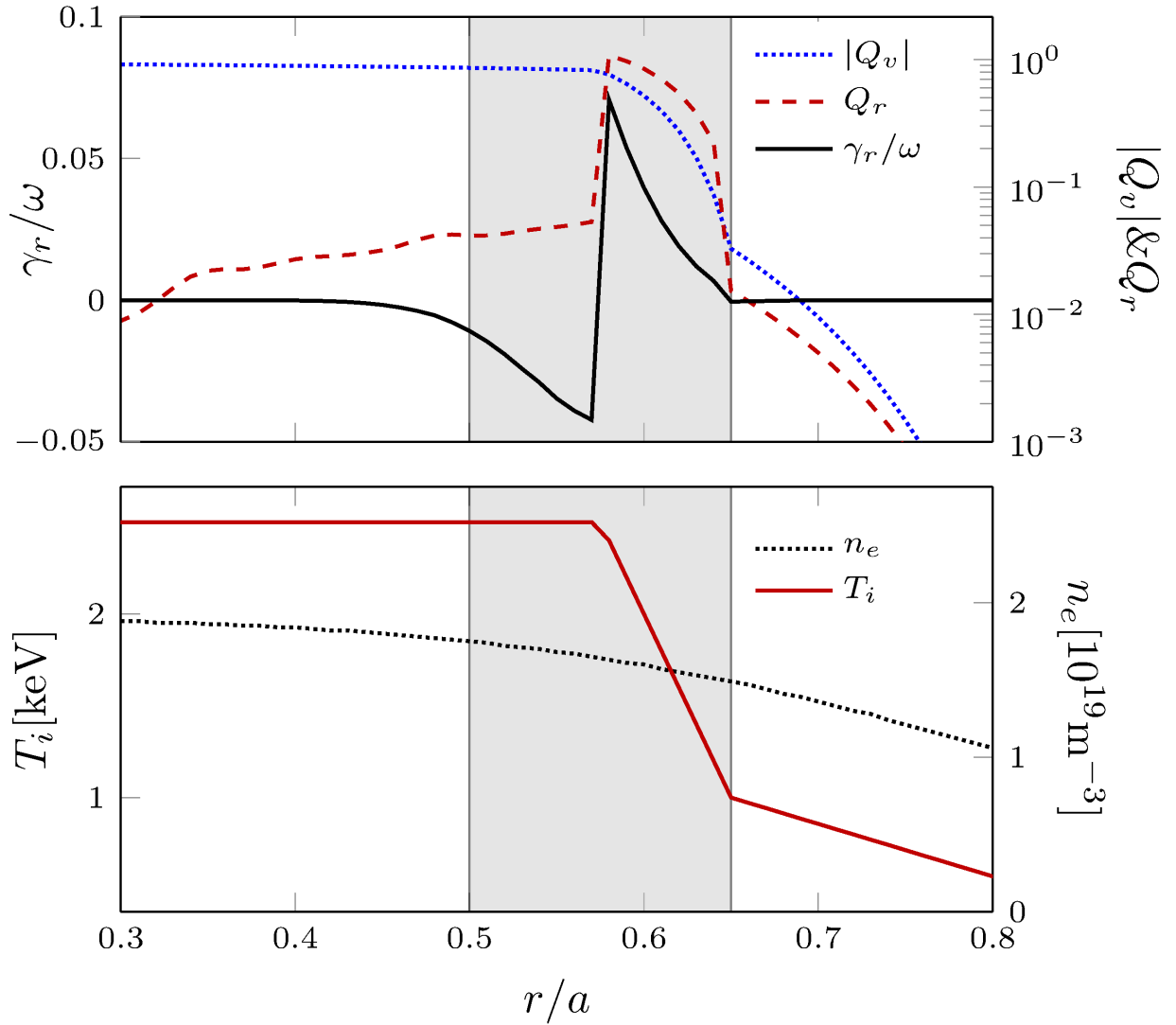


Рис. 3.8. Параметри плазми та локальний інкремент/декремент поблизу порогу стійкості ($\gamma_+/\omega = 1.40 \times 10^{-3}$, $\gamma_-/\omega = -1.27 \times 10^{-3}$). Згасання та збудження великі, але майже компенсуються. Нижній графік: температура та концентрація іонів, прийнята в розрахунках; область локалізації ЕАЕ-моди з $m_1 = -16$, $m_2 = -14$, та $n = -12$ [64] заштрихована. Верхній графік: залежність локального інкременту/декременту γ_r (суцільна лінія) і функцій $|Q_v|$ та Q_r (штриховані лінії) від радіусу. γ_r визначається рівнянням $\gamma = a^{-2} \int_0^a dr r \gamma_r$.

градієнт температури саморегулювався під впливом нестійкості. Механізм такої саморегуляції простий: оскільки γ_r максимальний біля границі між областями, де $\gamma_r > 0$ і $\gamma_r < 0$, для стабілізації ($\gamma \approx 0$) достатньо знизити T' лише в цій вузькій області. Така стабілізація може відбутися, коли амплітуда моди після початкового збудження стане достатньо великою.

Обчислення при температурі іонів $T_i(0) < 2$ кеВ проводилися для значення $T_i(0) = 1.8$ кеВ. Загальна картина, показана на рис. 3.8, зберігається, але γ_+ та γ_- зменшуються. Слід відзначити, що форма профілю $T_i(r)$ в області $r/a > 0.65$ практично не впливає на результати обчислень, бо амплітуда моди там нехтовно мала.

Може виникнути питання, чому на W-7X не збуджувалися інші альфвенові моди? Для мод, пов'язаних з гвинтовою і дзеркальною гармоніками (НАЕ та МАЕ) відповідь ясна: частоти цих мод суттєво перевищують частоту ЕАЕ-моди, і тому нерівність $Q_r > |Q_v|$ для них не може задовільнятися. З іншого боку, частоти мод, викликаних тороїдальністю (ТАЕ) вдвічі нижчі за частоту ЕАЕ-моди, і на перший погляд ТАЕ-моди мали б збуджуватися. Але для цих мод $u_i \sim 1$, і відповідно підсилюючий множник $\mathcal{K}^{TAE} \sim 1.3$, що значно менше, ніж для ЕАЕ-моди. Завдяки цьому, відношення $Q_r/|Q_v|$ для ТАЕ-моди менше за одиницю, тобто їх згасання сильніше за збудження. Звичайно, це не означає, що дестабілізація ТАЕ-моди градієнтом температури неможлива в принципі: для прикладу, дестабілізуючий вплив неоднорідності температури іонів на ТАЕ-моду у плазмі з високим β спостерігався в числових експериментах, описаних в роботі [49].

3.2.4. Висновки. У цьому підрозділі показано, що дестабілізуючий вплив просторової неоднорідності основної плазми з максвеловим розподілом швидкостей на альфвенові власні моди в тороїдальних системах може перебороти їх згасання через механізм Ландау. Якщо при цьому інші механізми згасання слабкі, може збудитися альфвенова нестійкість. Отримана

необхідна умова дестабілізації ($Q_r(r) > |Q_v|(r)$). Відношення $Q_r/|Q_v|$ зростає з $u \equiv |v_{\parallel}^{res}|/v_T$ (при $u > 1$). Причина цього зростання полягає в тому, що надтеплові частинки дають значний внесок у діаманітну частоту (ω_*) завдяки сильній залежності від u коефіцієнта, що стоїть при T' у виразі для ω_* . Цей коефіцієнт дається рівнянням (3.59). В контексті нестійкості, збуджуваної градієнтом температури, він діє як “підсилюючий множник”. Однак при $u \gg 1$ інкремент збудження стає експоненційно малим, тому практичний інтерес становлять значення u в інтервалі $u = 2 - 3$, якому відповідає $3.4 < \mathcal{K} < 8.6$. В стелараторах відповідні резонансні швидкості можуть існувати за рахунок неосесиметричних резонансів.

Важливою особливістю збуджуваних ∇T нестійкостей є те, що, коли в області локалізації моди є і інтервал, де $Q_r(r) > |Q_v|(r)$, і інтервал, де $Q_r(r) < |Q_v|(r)$, а загальний інкремент $\gamma > 0$, вони можуть приводити до доцентрового просторового каналювання енергії, тобто до перенесення енергії до середини плазми – енергія, поглинута модою у нестійкій області, нагріває плазму в стійкій області, розташованій при менших радіусах.

Варто відзначити, що доцентрове просторове каналювання може також відбуватися при взаємодії термоядерних α -частинок з швидкими магнітозвуковими хвилями з частотами, що перевищують ларморову частоту α -частинок [68].

Описаний механізм може приводити до збудження ЕАЕ чи іншої альфвенової моди з частотою $\omega \sim 200$ кГц на Wendelstein 7-X через резонанс на гвинтовій фур’є-гармонії рівноважного магнітного поля з $\mu = \nu = 1$. Показано, що збудження такої моди також супроводжуватиметься доцентровим просторовим каналюванням енергії іонів, і що воно може пояснити тривалі високочастотні осциляції, що спостерігалися в експерименті [64]. Аналіз нестійкості у W7-X виконаний для простого модельного профілю температури. Цього достатньо, щоб продемонструвати фізичний механізм явища, але не для повноцінного числового моделювання експериментів.

Слід відзначити, що збудження моди може приводити до появи аномальної теплопровідності, що сприятиме вирівнюванню градієнта температури. При вивченні цього ефекту слід враховувати, що присутність джерел та стоків енергії впливає на радіальний профіль амплітуди власних мод [68], що стає істотним для нестійкостей із достатньо великими інкрементами (γ_+) та декрементами (γ_-).

Розглянута нестійкість може впливати на робочі показники плазми у W7-X і заслуговує на подальші експериментальні та теоретичні дослідження. Вона також може грати роль в інших стелараторах, зокрема у LHD, TJ-II, H-1, U-3M та інших [56, 69, 70, 71].

3.3. Перенесення енергії МГД-модами поперек магнітного поля

3.3.1. Вступ. Стійкість альфвенових власних мод (ТАЕ, ЕАЕ і т.д.) визначається конкуренцією між впливом груп частинок, які передають енергію моді (донорів) та груп частинок, що поглинають енергію моди (акцепторів). Може виявитися, що ці групи просторово рознесені між собою; в таких випадках завдяки моді відбувається просторове каналювання енергії донорів. [60, 72] Іншими словами, потужність, отримувана модою в області, де нестійкість збуджується, нагріває плазму в області менших (або більших) радіусів, де мода згасає; просторове каналювання може бути спрямоване досередини або назовні. Згідно робіт [60, 72, 73], відцентрове просторове каналювання мало місце в експериментах на NSTX, описаних у роботі [74], де спостерігалось погіршення нагрівання плазми інжекцією нейтральних пучків одночасно з дестабілізацією МГД-мод (альфвенових чи швидких магнітозвукових). З іншого боку, доцентрове просторове каналювання енергії термоядерних α -частинок збуджуваними ними швидкими магнітозвуковими модами з частотами, близькими до гармонік циклотро-

ної частоти, може відповідати за поліпшення робочих показників плазми на JET. [68]

Як було показано у попередньому підрозділі, доцентрове просторове каналювання може відбуватися навіть у відсутності джерел надтеплових іонів, якими є інжекція та термоядерні реакції. Дестабілізуючий вплив градієнта температури іонів (∇T_i) на щільні альфвенові власні моди може бути досить великим і приводити до нестійкості за умови, що швидкості іонів, які резонансно взаємодіють з альфвеновими модами, дещо перевищують теплову швидкість. У стелараторах ця умова може задовільнятися завдяки неосесиметричним резонансам, передбаченим у роботі [43]. Якщо на периферії плазми існує великий градієнт температури, дестабілізована альфвенова мода може каналювати енергію у внутрішні області плазми. Цей механізм дестабілізації може пояснювати високочастотні осциляції, які спостерігалися у недавніх експериментах на стелараторі Wendelstein 7-X. [64]

У цьому підрозділі буде показано, що у нестійких плазмах потік енергії поперек магнітного поля існує навіть за відсутності просторового каналювання, тобто коли згасання моди нехтовне або коли область, де мода згасає, співпадає з областю, де вона збуджується. Цей потік відповідає за обмін енергією між збуреннями плазми на різних магнітних поверхнях – власне, можна сказати, що він відповідає за саме існування моди – а при великих амплітудах чи великих інкрементах нестійкості він може змінювати її форму. [68] Мета цього підрозділу – оцінити поперечний потік енергії, яким супроводжується дестабілізація альфвенових та швидких магнітозвукових власних мод і отримати картину радіального розподілу цього потоку. Для цього досліджується радіальний баланс потужності, усередненої по магнітній поверхні. Такий підхід в принципі дозволяє об'єднати лінійний та нелінійний описи альфвенових коливань, див. огляд [37] та посилання у ньому.

Аналіз проводиться для альфвенових мод, але загальні формули справедливі і для швидких магнітозвукових мод.

Цей підрозділ складається з двох пунктів та висновків. У пункті 3.3.2 виводяться та аналізуються загальні рівняння для потоку енергії в моді. У пункті 3.3.3 розглядаються модельні та конкретні приклади для випадку однієї альфвенової моди. У першому модельному прикладі припускається, що ширина резонансної області, яка збуджує нестійкість, вузька, а згасання немає. У другому модельному прикладі додається область, де домінує згасання. За конкретний приклад взята нестійкість плазми Wendelstein 7-X, збуджувана ∇T_i , за різних припущень щодо профіля температури іонів. Крім цього, для деяких альфвенових нестійкостей на ITER та W-7X оцінюється потужність потоку енергії через магнітну поверхню, близьку до максимуму локального інкременту збудження нестійкості.

3.3.2. Виведення та аналіз основних рівнянь. З рівнянь Максвелла випливає, що

$$\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + B^2) + \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (3.61)$$

де \mathbf{E} , \mathbf{B} , та \mathbf{j} – відповідно електричне та магнітне поле і густина струму. Всі ці величини можна розкласти на суму рівноважної частини та збурення. Збурені величини позначатимуться тильдою.

Для ідеальних МГД-мод, поздовжнє електричне поле дорівнює нулю, $\tilde{E}_{\parallel} = 0$; тому поздовжній струм (\tilde{j}_{\parallel}) не дає внеску в останній член рівняння (3.61). Поперечний струм можна записати у вигляді $\tilde{\mathbf{j}}_{\perp} = \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}^{MHD} + \tilde{\mathbf{j}}_{\perp}^{res}$, де $\tilde{\mathbf{j}}^{MHD}$ – ідеальний МГД-струм, а $\tilde{\mathbf{j}}^{res}$ – струм, пов'язаний із резонансною взаємодією частинок з модою. З рівнянь руху ідеальної МГД та ідеального закону Ома випливає, що, коли частота моди мала порівняно з циклотронною частотою, $\tilde{\mathbf{j}}_{\perp}^{MHD} = c^2(4\pi v_A^2)^{-1} \partial \tilde{\mathbf{E}}_{\perp} / \partial t$, де v_A – альфвенова швидкість. [42] Тому $\tilde{\mathbf{j}}^{MHD} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = c^2(8\pi v_A^2)^{-1} \partial \tilde{E}^2 / \partial t$. Ця величина представляє зміну кінетичної енергії частинок у полі хвилі; вона значно (в c^2/v_A^2 разів) перевищує зміну енергії електричного поля $(8\pi)^{-1} \partial \tilde{E}^2 / \partial t$.

Збурення буде взято у формі

$$\tilde{X} = \frac{1}{2} \left(\hat{X} e^{-i\omega t} + c.c. \right), \quad (3.62)$$

де

$$\hat{X} = \sum_m X_m(r, t) e^{im\vartheta - in\varphi}, \quad (3.63)$$

ω – частота моди, r – радіальна координата, ϑ та φ – відповідно бузерові полоїдальний та тороїдальний кути, а m та n – модові числа. Радіальна координата r визначається рівнянням $\psi = \int \bar{B} r dr$, де ψ – тороїдальний магнітний потік, а \bar{B} – середнє значення індукції магнітного поля на магнітній осі. Амплітуди X_m повільно змінюються з часом. Відсутність сумування за тороїдальним числом n означає, що в цьому пункті не розглядатимуться характерні для стелараторів моди, пов’язані з гвинтовими та дзеркальними гармоніками магнітної конфігурації.

Після усереднення по швидкому часу та кутовим змінним, з рівняння (3.61) можна отримати

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r S + \frac{1}{2} \sum_m \text{Re} (\mathbf{j}_m^{res} \cdot \mathbf{E}_m^*) = 0, \quad (3.64)$$

де

$$W = \frac{1}{16\pi} \sum_m \left(\frac{c^2}{v_A^2} |E_m|^2 + |B_m|^2 \right) \quad (3.65)$$

це густина енергії моди, а

$$S = \frac{c\sqrt{\delta_0}}{8\pi} \sum_m \text{Re} (E_{b,m} B_{||,m}^*) \quad (3.66)$$

це густина потоку енергії поперек магнітного поля. Індeksi “b” та “||” позначають відповідно компоненти векторів вздовж бінормалі до силової лінії та вздовж силової лінії рівноважного магнітного поля \mathbf{B}_0 , тобто $E_{b,m} = \mathbf{E}_m \cdot (\mathbf{b} \times \nabla r / |\nabla r|)$, де $\mathbf{b} \equiv \mathbf{B}_0 / B_0$. Величина $\delta_0 \gtrsim 1$ описує форму поперечного перерізу плазми [42].

Власні моди можна розглядати як стоячу хвилю, що утворюється внаслідок суперпозиції двох біжучих хвиль, одна з яких розповсюджується по радіусу з центру назовні, а інша - з периферії до центру. Відповідно, потік енергії в моді можна записати як суму $S = S_+ - S_-$, де S_+ та S_- - відповідно потоки енергії в біжучій хвилі, що розповсюджується назовні та досередини. У відсутності нестійкості $S_+(r) = S_-(r)$ та, отже, $S(r) = 0$. В нестійкій плазмі, взагалі кажучи, $S_+(r) \neq S_-(r)$ і $S(r) \neq 0$ в області локалізації моди, хоча поза межами цієї області, де амплітуда моди нехтовно мала, $S = 0$. [68] Тому можна сказати, що власні моди існують завдяки здатності хвиль розповсюджуватися поперек магнітного поля.

Може виникнути питання – чи узгоджується це твердження з тим фактом, що альфвенові хвилі у “класичній” ідеальній МГД мають $\omega = k_{\parallel} v_A$ і $\tilde{B}_{\parallel} = 0$, тобто що ці хвилі розповсюджуються лише вздовж магнітного поля і $S = 0$? Справа в тому, що у тороїдальних системах існує шир магнітного поля, завдяки якому рівність $\omega = k_{\parallel} v_A$ не може виконуватись для заданої частоти ω на різних магнітних поверхнях. Натомість частоти власних мод лежать або у щілинах альфвенового континууму (ТАЕ-моди та ін.), або під чи над гілкою континууму (ГАЕ та ін.) Тому, строго кажучи, $\omega \neq k_{\parallel} v_A$. Можна показати, що завдяки цьому $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} \neq 0$ ($\boldsymbol{\xi}$ – зміщення елемента плазми), як для магнітозвукових хвиль. Відповідно, $\tilde{B}_{\parallel} \neq 0$ і радіальний потік енергії в альфвенових хвилях не щезає. [75]

Надалі структура моди вважається відомою. Тоді можна розглянути рівняння (3.64) як рівняння, що визначає потік енергії в моді.

Інтегруючи (3.64) за радіальною координатою ($\int_0^r dr' r'(\dots)$), можна отримати

$$rS(r) = -\frac{\partial \mathcal{W}^{(r)}}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_m \int_0^r dr' r' \text{Re}(\mathbf{j}_m^{res} \cdot \mathbf{E}_m^*), \quad (3.67)$$

де

$$\mathcal{W}^{(r)} = \int_0^r dr' r' W(r). \quad (3.68)$$

На зовнішній границі плазми, $r = a$, потік енергії щезає, $S(a) = 0$, тому

$$\frac{\partial \mathcal{W}^{(a)}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \sum_m \int_0^a dr' r' \operatorname{Re} (\mathbf{j}_m^{res} \cdot \mathbf{E}_m^*). \quad (3.69)$$

Інкремент/декремент моди, $\gamma = \operatorname{Im} \omega$, можна визначити рівнянням $\partial \mathcal{W}^{(a)} / \partial t = 2\gamma \mathcal{W}^{(a)}$. Завдяки (3.69) це можна записати у вигляді $\gamma = \gamma^{(r)}|_{r=a}$, де

$$\gamma^{(r)} = -\frac{1}{4\mathcal{W}^{(r)}} \sum_m \int_0^r dr' r' \operatorname{Re} (\mathbf{j}_m^{res} \cdot \mathbf{E}_m^*). \quad (3.70)$$

Якщо інкремент нестійкості моди не перевищує певного порогового значення, її форма під час нестійкості не змінюється, [68] що можна записати як

$$\frac{\partial \ln \mathcal{W}^{(r)}}{\partial t} = \frac{\partial \ln \mathcal{W}^{(a)}}{\partial t}. \quad (3.71)$$

Тоді рівняння (3.67) набуде форми

$$rS(r) = -2\gamma \mathcal{W}^{(r)} - \frac{1}{2} \sum_m \int_0^r dr' r' \operatorname{Re} (\mathbf{j}_m^{res} \cdot \mathbf{E}_m^*), \quad (3.72)$$

або

$$S(r) = -\frac{2}{r} \left(\gamma - \gamma^{(r)} \right) \mathcal{W}^{(r)}. \quad (3.73)$$

Наближення ідеальної МГД, в якому $\tilde{B}_{\parallel} = 0$ та $\omega = k_{\parallel} v_A$, не дозволяє обчислити S безпосередньо, але його достатньо, щоб отримати відношення для енергії моди та члена, що описує резонансну взаємодію частинок з хвилею. У цьому наближенні всі потрібні величини можна записати через одну змінну, а саме збурений скалярний потенціал електричного поля $\tilde{\Phi}$. Коли $\tilde{B}_{\parallel} = 0$ та $\tilde{E}_{\parallel} = 0$, можна покласти $\tilde{\mathbf{A}}_{\perp} = 0$, де \mathbf{A} – векторний потенціал електромагнітного поля. Тоді $\tilde{\mathbf{B}} = \nabla \times \tilde{A}_{\parallel} \mathbf{b}$, а $\tilde{\mathbf{E}} = -\nabla_{\perp} \tilde{\Phi}$. Оскільки $\tilde{E}_{\parallel} = 0$ та $\omega = k_{\parallel} v_A$, $\tilde{A}_{\parallel} = (c/v_A) \tilde{\Phi}$, що приводить до $\tilde{B}^2 = (c^2/v_A^2) |\nabla_{\perp} \tilde{\Phi}|^2$. Нарешті, $|\nabla_{\perp} \tilde{\Phi}|^2 = g^{ik} (\nabla_{\perp} \tilde{\Phi})_i (\nabla_{\perp} \tilde{\Phi})_k^*$, де $g^{ik} \propto \delta_0 \delta_{ik}$ – метричний тензор, а δ_{ik} – символ Кронекера. [42] Рівняння (3.65) тепер набуває вигляду

$$W = \frac{c^2 \delta_0}{8\pi v_A^2} \sum_m \left(|\Phi'_m|^2 + \frac{m^2}{r^2} |\Phi_m|^2 \right), \quad (3.74)$$

де штрихом позначена похідна за радіусом. Добуток $(\mathbf{j}_m^{res} \cdot \mathbf{E}_m^*)$ залежить від функції розподілу резонансних частинок.

Рівняння (3.72) та (3.73) показують, що, взагалі кажучи, під час нестійкості густина потоку енергії $S(r) \neq 0$. Вона щезає лише у тому малоімовірному випадку, коли локальний інкремент/декремент нестійкості

$$\gamma^{loc} \equiv (4W)^{-1} \sum_m \text{Re}(\mathbf{j}_m^{res} \cdot \mathbf{E}_m^*) = \gamma. \quad (3.75)$$

Ненульовий потік енергії підтримує форму моди (якщо γ не надто велике), і, на додачу, відповідає за просторове каналювання, нагріваючи плазму в тій області, де мода сильно згасає. Це можна записати, штучно розділивши густину потоку енергії на дві частини,

$$S = S_{mode} + S_{heat}, \quad (3.76)$$

де S_{mode} – потік, що підтримує форму моди, а S_{heat} – потік, що нагріває плазму через просторове каналювання.

Потік енергії може бути спрямований як досередини, так і назовні. Це легко побачити, якщо припустити, що ширина резонансної області (де є резонансні частинки, завдяки яким збуджується мода) менша, ніж ширина моди, $\Delta_{res} < \Delta_m$. Коли резонансна область $r_1^{res} \leq r \leq r_2^{res}$ розташована з правого (зовнішнього) краю області локалізації моди, потік енергії буде спрямований досередини. Це впливає з рівняння (3.72): інтеграл, що містить резонансний струм, щезає при $r < r_1^{res}$, тому $rS(r) = -2\gamma\mathcal{W}^{(r)} < 0$ при $r < r_1^{res}$; другий член в рівнянні (3.72) додатний, і при великих радіусах скорочується з першим, див. рівняння (3.73). І навпаки, коли резонансна область розташована з лівого (внутрішнього) краю області локалізації моди, потік енергії буде спрямований назовні.

В цікавих з практичної точки зору випадках, радіальний розподіл густини потоку енергії доводиться розраховувати числовими методами. Тим

не менше, можна скласти якісне уявлення про цей розподіл на простих моделях.

3.3.3. Залежність потоку енергії від характеристик нестійкості плазми. У цьому підпункті розглядаються прості моделі, що ілюструють якісну поведінку потоку енергії.

3.3.3.1. Збудження домінує у всій резонансній області. У граничному випадку $\Delta_{res} \ll \Delta_m$ з $\gamma^{loc}(r) > 0$, $S(r)$ описується простими виразами. Їх можна отримати, змодельовавши резонансний струм δ -функцією: $\sum_m \text{Re}(\mathbf{j}_m^{res} \cdot \mathbf{E}_m^*) \propto \delta(r - r_r)$, де r_r – той радіус в області $r_1^{(m)} \leq r \leq r_2^{(m)}$, на якому локалізований резонанс. Припустивши для початку, що в області локалізації моди $W(r) = \text{const}$, з рівняння (3.73) легко побачити, що $S = 0$ при $0 \leq r \leq r_1^{(m)}$ (бо $\mathcal{W}^{(r)} = 0$) і при $r > r_2^{(m)}$ (бо в цій області $\gamma^{(r)} = \gamma$). З іншого боку, в області локалізації моди $\mathcal{W}^{(r)} = W(r^2 - r_1^{(m)2})/2$. Це приводить до

$$S^{in}(\xi) = -\frac{1}{\xi}(\xi^2 - \xi_1^2)\gamma r_r W, \quad \xi_1 \leq \xi \leq 1, \quad (3.77)$$

$$S^{out}(\xi) = \frac{1}{\xi}(\xi_2^2 - \xi^2)\gamma r_r W, \quad 1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad (3.78)$$

де індексами “in” та “out” позначено відповідно потік досередини та назовні, $\xi = r/r_r$, $\xi_{1,2} = r_{1,2}^{(m)}/r_r$, а γr_r відіграє роль характерної величини групової швидкості нестійкої моди.

Більш загальні вирази для потоку енергії, придатні для будь-якої форми моди, мають вигляд

$$\bar{S}^{in}(\xi) = -\frac{2}{\xi} \int_0^\xi d\xi' \xi' \bar{W}, \quad \xi_1 \leq \xi \leq 1, \quad (3.79)$$

$$\bar{S}^{out}(\xi) = \frac{2}{\xi} \int_\xi^{\xi_a} d\xi' \xi' \bar{W}, \quad 1 \leq \xi \leq \xi_a, \quad (3.80)$$

де $\bar{S} = S/\hat{S}$, $\hat{S} = \gamma r_r \hat{W}$, $\bar{W} = W/\hat{W}$, $\xi_a = a/r_r$, а \hat{W} – якесь фіксоване значення W ; далі береться $\hat{W} \equiv \max[W(r)]$.

Функції $S(\xi)$ показані на рис. 3.9. Видно, що мода породжує потоки енергії і досередини, і назовні. Ці потоки постачають моді енергію, потрібну для зростання її амплітуди при $r \neq r_r$.

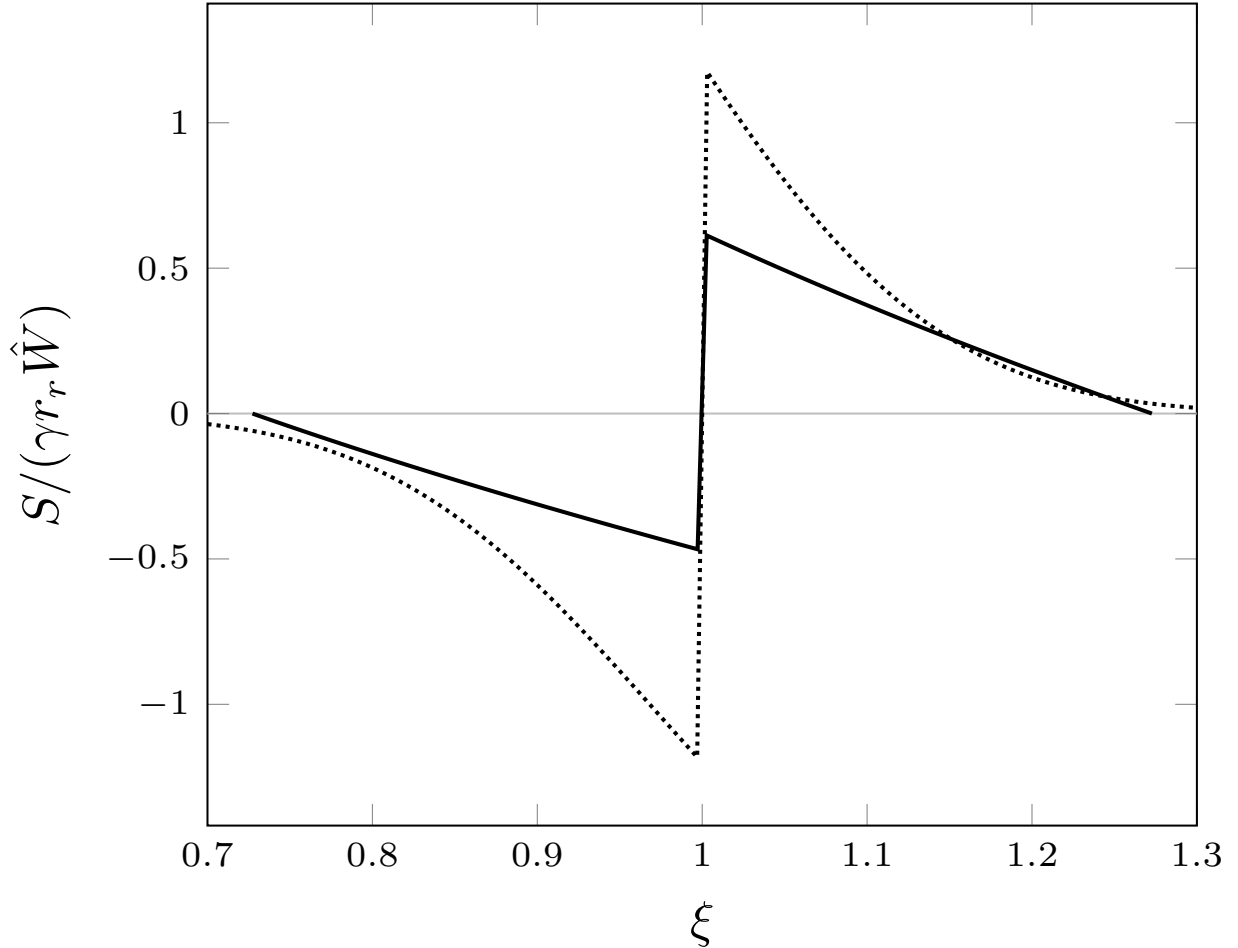


Рис. 3.9. Густина потоку енергії, визначена рівняннями (3.79), (3.80) від $\xi \equiv r/r_r$: суцільна лінія, $\bar{W} = 1$, $r_r/a = 0.55$, $\xi_1 = 0.727$ ($r_1^{(m)}/a = 0.4$) та $\xi_2 = 1.27$ ($r_2^{(m)}/a = 0.7$); штрихована лінія, $W = \hat{W}\xi^{-1}\exp[-\alpha(\xi - 1)^2]$, де α вибране таким чином, щоб $W(r_1^{(m)}) = 0.1W(r_r)$.

Потік енергії досередини/назовні максимальний при $r = (r_r - 0)/(r_r + 0)$. Зокрема, з рівняння (3.77) можна оцінити максимальний потік енергії (\mathcal{P}) досередини через магнітну поверхню ($r_r - 0$):

$$\mathcal{P}^{in} = S(r_r - 0)\sigma(r_r) = 2\gamma\hat{W}\Delta V^{in}, \quad (3.81)$$

де $\sigma(r_r)$ – площа цієї поверхні, $\Delta V^{in} \equiv [V_p(r_r) - V_p(r_1^{(m)})]$ – об'єм ча-

стини області локалізації моди, розташованої всередині резонансної поверхні, $V_p(r_j)$ – об’єм плазми всередині магнітної поверхні з радіусом r_j , $r_j = r_r$, $r_1^{(m)}$. Аналогічний вираз можна записати для потоку енергії назовні:

$$\mathcal{P}^{out} = S(r_r + 0)\sigma(r_r) = 2\gamma\hat{W}\Delta V^{out}, \quad (3.82)$$

де $\Delta V^{out} \equiv [V_p(r_2^{(m)}) - V_p(r_r)]$.

Згідно цих відношень, максимальний потік енергії пропорційний до ΔV . Так відбувається через те, що в розглянутому випадку $S = S_{mode}$, а збудження локалізоване на радіусі $r = r_r$, і відповідно область, куди потік постачає енергію на збільшення амплітуди моди, співпадає з її областю локалізації.

Перевага наведеного вище аналізу у його простоті, бо він не потребує знання розподілу резонансного струму. Тому він дозволяє оцінювати потік енергії біля локального максимуму збудження без детальних розрахунків.

Для прикладу можна взяти ТАЕ-нестійкість у базовому сценарії ITER зі струмом плазми 15 МА. Очікується [76], що ближче до периферії плазми, $r/a \gtrsim 0.5$, можуть збуджуватися глобальні ТАЕ, тобто пакети мод з кількома значеннями m і даним n , з сумарним інкрементом збудження α -частинками та інжектованими іонами $\gamma/\omega \sim 10^{-2}$. Сумарний інкремент збудження має кілька локальних максимумів, найбільший з яких лежить при $r/a = 0.5$, а два менших – при $r/a = 0.75$ та $r/a = 0.95$, див. рис. 21 у роботі. [76]. Припустивши, що амплітуда моди найбільша поблизу одного з цих максимумів і складає порядку $\tilde{B}/B_0 = 3 \times 10^{-4}$, займаний нею об’єм – $\Delta V = 80 \text{ м}^3$ (приблизно 10% загального об’єму плазми), частота моди $\omega \lesssim 100 \text{ кГц}$, а її інкремент – $\gamma = 6 \times 10^3 \text{ с}^{-1}$, що відповідає $\gamma/\omega \lesssim 10^{-2}$, прості підрахунки дають $\hat{W} \lesssim 1 \text{ Дж/м}^3$ і $\mathcal{P} \sim 1 \text{ МВт}$. Це набагато менше, ніж потужність, що потрапляє у плазму з термоядерними α -частинками, тому можна зробити висновок, що перенесення енергії модою навряд чи

справлятиме істотний вплив на енергетичний баланс плазми.

3.3.3.2. Збудження домінує у частині резонансної області. На особливу увагу заслуговує випадок, коли резонансна область складається з двох частин: однієї, де нестійкість збуджується, та іншої, де домінує згасання. Завдяки останньому відбувається просторове каналювання енергії, плазма нагрівається завдяки перенесенню енергії модою. З рівняння (3.76) видно, що у стаціонарному стані ($\gamma = 0$) $S = S_{heat}$. Це означає, що нагрівання плазми збільшується в ході розвитку нестійкості (коли інкремент збудження спадає, але амплітуда моди зростає), досягаючи максимуму в погранично стійкому режимі, коли амплітуда моди максимальна.

Результати обчислень потоків енергії для дестабілізованої градієнтом температури іонів ЕАЕ-моди на W-7X, яка розглядалася у підрозділі 3.2, представлено на рис. 3.10. Щоб продемонструвати особливості розподілу потоку енергії, в модельному профілі іонної температури її значення в центрі штучно варіювалося від 1.8 до 10 кеВ. Вираз для резонансного струму дається рівняннями (3.28)-(3.29).

Можна бачити, що при низькій центральній температурі іонів i , відповідно, малому інкременту нестійкості, потік енергії направлений всередину плазми ($S(r) < 0$) у всій області локалізації моди. Цього слід було очікувати, бо у квазістаціонарному стані ($\gamma \approx 0$), потік енергії зводиться до $S = S_{heat}$, і спрямований від області розташування джерела енергії (нестійкої області) до області, де енергія поглинається (в даному випадку це область, де $\nabla T = 0$). Навпаки, при високій центральній температурі іонів у зовнішній частині області локалізації моди з'являється помітний потік енергії на периферію. Цей несподіваний на перший погляд результат має просте пояснення: локальний інкремент збудження нестійкості дуже неоднорідний (він має сильний максимум поблизу $r \gtrsim r_1$). Через це, коли сумарний інкремент γ великий, з'являється потік, направлений від $r \gtrsim r_1$

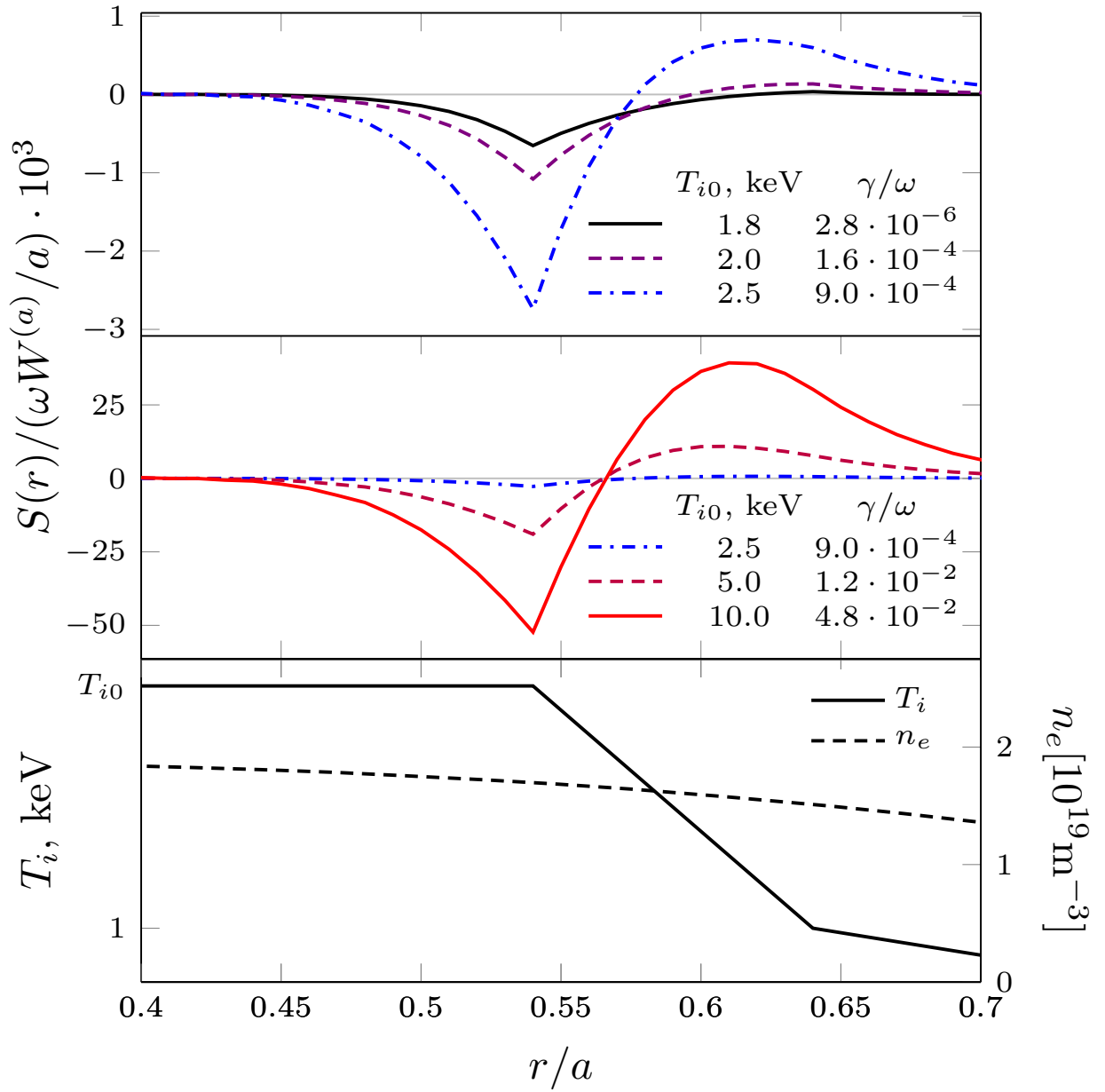


Рис. 3.10. Густина потоку енергії у збуджуваній градієнтом температури на Wendelstein 7-X ЕАЕ-нестійкості для різних значень температури іонів у центрі, але з однаковим розташуванням області великого ∇T_i ($r_1/a \approx 0.55$, $r_2/a \approx 0.65$). Форма моди $\tilde{\Phi}(r)$ та параметри плазми відповідають експерименту [64], де було $T_{i0} \equiv T_i(0) \lesssim 2$ кеВ. Видно, що при низьких центральних температурах має місце доцентровий потік енергії ($S < 0$), а при високих додатково з'являється потік енергії назовні. Амплітуда моди за межами області $0.5 \leq r/a \leq 0.65$ невелика, але потік енергії, що переноситься нею, не малий.

до $r \lesssim r_2$, бо потік S_{mode} генерується і при $r \lesssim r_1$, і при $r \gtrsim r_1$, і зростає з ростом інкременту нестійкості.

В першій експериментальній кампанії на W7-X, де температури іонів $T \lesssim 2$ кеВ [64], доцентровий потік енергії через магнітну поверхню r_1 може компенсувати неокласичний тепловий потік на іонах (~ 0.05 МВт при $r/a \sim 0.6$, див. роботу 62), якщо амплітуда моди складає $\tilde{B}/B \sim 10^{-3}$, що незначно перевищує типові величини, які спостерігаються в експериментах. З іншого боку, якби температура іонів в центрі складала $5 - 10$ кеВ, густина доцентрового потоку енергії була б у $50 - 100$ разів більшою, ніж при $T \sim 2$ кеВ, тобто можна очікувати, що в експериментах на W7-X з високою температурою іонів доцентровий потік енергії \mathcal{P} міг би досягати 1 МВт.

3.3.4. Висновки. У цьому підрозділі було виведено і проаналізовано рівняння (3.72) (див. також рівняння (3.73)) для густини потоку енергії поперек магнітного поля. З цього рівняння випливає, що дестабілізація власних мод у плазмі обмеженого об'єму супроводжується генерацією радіального потоку енергії. Цей потік щезає лише у нереалістичному випадку, коли $\gamma^{loc}(r) = const$, тобто локальний інкремент нестійкості скрізь дорівнює глобальному. Поперечний потік виникає внаслідок порушення балансу між доцентровим та відцентровим потоками енергії, пов'язаними із біжучими хвилями, з яких складається мода. За порушення балансу відповідає присутність донора (джерела) енергії. В аналізі припускалося, що дисбаланс порівняно слабкий, і що форма моди залишається приблизно незмінною під час розвитку нестійкості (відповідна умова наведена у роботі [68]).

Показано, що потік енергії можна розділити на дві частини, одна з яких (S_{mode}) постачає енергію, що переходить у зростання амплітуди моди в областях, де мода збуджується слабо або взагалі не збуджується, а інша (S_{heat}) нагріває плазму в областях, де домінує згасання, і відповідає за

просторове каналювання.

Потік енергії може бути спрямований і назовні, і досередини. Коли нестійка область розташована посередині області локалізації моди, утворюються обидва потоки, відповідно при більших і при менших радіусах. Особливий інтерес викликають випадки, коли нестійка область розташована на периферії, а згасання домінує у центральній області плазми. При цьому відбувається доцентрове просторове каналювання, і нестійкість нагріває плазму в центральній області, охолоджуючи периферію. Проте навіть у таких випадках одночасно з доцентровим каналюванням може генеруватися і великий потік енергії назовні. Для цього потрібно, щоб інкремент нестійкості був великим. Це показано на прикладі збуджуваної ∇T_i нестійкості ЕАЕ-моди у Wendelstein 7-X, розглянутої у попередньому підрозділі.

Штучно варіюючи температуру іонів у центрі плазми W7-X від $T(0) \sim 2$ кеВ (що відповідає першій експериментальній кампанії) до $T(0) = 5 - 10$ кеВ, було показано, що густина потоку енергії при незмінній амплітуді моди зростає майже на два порядки: потік енергії через поверхню максимального локального інкременту збудження зростає від $\mathcal{P} \lesssim 0.05$ МВт до $\mathcal{P} \sim 1$ МВт.

Оцінки на основі даних по базовому сценарію ITER зі струмом плазми 15 МА [76] показують, що при очікуваній ТАЕ-нестійкості з інкрементом $\gamma/\omega \sim 10^{-2}$, локалізований поблизу $r/a \gtrsim 0.5$, там може виникати потік такого ж порядку величини $\mathcal{P} \sim 1$ МВт.

Наведені вище оцінки зроблені з використанням простих моделей та типових параметрів нестійкостей. Вони наочно демонструють фізику явища і вказують порядок величин потоків енергії, проте наведеного аналізу, звичайно, недостатньо, щоб робити кількісні передбачення.

Варто зазначити, що закладені в наведеному в цьому підрозділі аналізі ідеї можуть також надаватися до вивчення випадків, коли має місце передача енергії по спектру між різними компонентами, або напрямую через взаємодію мода-мода, або опосередковано через певні групи частинок і

нелінійні спотворення функції їх розподілу.

Результати досліджень здобувача у цьому розділі відображено в публікаціях [7, 8, 9].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі з'ясовано особливості транспорту надтеплових іонів у стелараторах, зокрема в оптимізованих (квазіізодинамічних) стелараторах типу Wendelstein, отримано умови збудження та згасання альфвенівих нестійкостей у плазмі таких стелараторів, та вивчено перенесення енергії поперек магнітного поля, пов'язане з цими нестійкостями. Основні результати, отримані в дисертації:

1. Розвинено теорію стохастичної дифузії надтеплових іонів та запропоновано метод послаблення її негативного впливу в оптимізованих стелараторах. Показано, що стохастична дифузія перехідних частинок у стелараторах типу Wendelstein є у кілька разів сильнішою, ніж передбачалося раніше [21], завдяки створюваній магнітним полем асиметрії між локально пролітними частинками із протилежними знаками поздовжньої швидкості. Ефект підсилення дифузії за рахунок асиметрії особливо помітний для слабо перехідних частинок.

Отримано нові вирази для адіабатичних інваріантів руху ведучого центру частинок у аксіально-несиметричному полі, які дають змогу визначити рух частинок у компактних (з малим числом періодів N) пристроях зі складною конфігурацією магнітного поля зі значно більшою точністю.

Запропоновано метод послаблення негативного впливу стохастичної дифузії на утримання надтеплових іонів шляхом замикання сепаратрис між локально пролітними та локально захопленими орбітами всередині плазми: якщо для частинки з певним пітч-кутом дрейфові орбіти та сепаратриса замкнені всередині плазми, така частинка не втрачатиметься з плазми за час порядку часу стохастичної дифузії. Показано, що для стелараторів типу Wendelstein діамагнетизм плазми допомагає замкнути сепаратриси, торо-

їдальна гармоніка магнітного поля шкодить цьому, а ролі дзеркальної та гвинтової гармонік залежать від їх співвідношення між собою. Зокрема показано, що у випадку, коли гвинтова гармоніка перевищує дзеркальну на границі плазми, зменшення дзеркальної гармоніки, якою на W7-X відносно легко керувати за допомогою кругових обмоток, може запобігти втраті надтеплових іонів через стохастичну дифузію із центральної області плазми майже до половини її радіуса.

Також показано, що на зменшення втрат можуть вплинути зміни радіального електричного поля (які можуть утворюватися, наприклад, від переходу між електронним та іонним коренями чи під час формування внутрішніх транспортних бар'єрів). Зокрема показано, що від'ємне радіальне електричне поле допомагає замкнути сепаратрисі і що локалізовані потенціальні бар'єри поліпшують форму сепаратрис, коли область від'ємного поля лежить всередині області додатнього поля.

Запропоновано використовувати замкнення сепаратрис всередині плазми у якості додаткового швидкого критерію оптимізації стелараторних конфігурацій.

2. Показано важливість впливу електричного поля на утримання локально захоплених надтеплових іонів у стелараторах. Радіальне електричне поле є невід'ємною властивістю плазми у аксіально-несиметричних тороїдальних системах, бо воно забезпечує амбіполярність неокласичної дифузії у цих системах. У дисертації знайдено, що присутність від'ємного електричного поля сприяє утриманню локально захоплених іонів. Іони утримуються електричним полем, якщо їх енергія не перевищує певної величини. Електричне поле, локалізоване у кільці (тобто у певному інтервалі за радіусом) може грати роль транспортного бар'єра для надтеплових іонів. Результати, отримані за допомогою аналізу усереднених рівнянь для Wendelstein 7-X та реактора Helias, узгоджуються з результатами числового моделювання за допомогою коду ORBIS [5].

Також знайдено, що додатнє електричне поле погіршує утримання локально захоплених іонів, крім випадку дуже великих значень напруженості поля відносно енергії частинок. Шкідливий вплив додатнього електричного поля особливо сильний, коли частота викликаного ним жорсткого обертання плазми близька до певних резонансних значень.

Запропоновано використання додатнього радіального електричного поля із відповідно підібраним профілем для видалення гелієвого попелу у реакторі Helias.

3. Вперше показано можливість збудження альфвенових власних мод градієнтом температури іонів в неосесиметричних системах. Розвинено теорію, з якої випливає, що дестабілізуючий вплив просторової неоднорідності основної плазми з максвеловим розподілом швидкостей на альфвенові власні моди в тороїдальних системах може перебороти їх згасання через механізм Ландау. Якщо при цьому інші механізми згасання слабкі, збуджуватиметься альфвенова нестійкість. Отримано необхідну умову дестабілізації моди та показано, що дестабілізуючий вплив зростає з ростом відношення резонансної швидкості до теплової, коли це відношення більше одиниці.

Показано, що за певних умов збуджувані ∇T нестійкості можуть приводити до доцентрового просторового каналювання енергії – енергія, поглинута модою у нестійкій області, нагріває плазму в стійкій області, розташованій при менших радіусах. Температурно-градієнтна нестійкість може впливати на робочі показники плазми у Wendelstein 7-X, а також може грати роль в інших стелараторах, зокрема у LHD, TJ-II, H-1, U-3M.

Зокрема показано, що описаний механізм може приводити до збудження альфвенової моди з частотою $\omega \sim 200$ кГц на Wendelstein 7-X через резонанс на гвинтовій фур'є-гармонії рівноважного магнітного поля з $\mu = \nu = 1$, яке супроводжуватиметься доцентровим просторовим каналюванням енергії іонів. Збудження такої моди може пояснити тривалі

високочастотні осциляції, що спостерігалися в експерименті [64].

4. Виявлено властивості перенесення енергії поперек магнітного поля власними альфвеновими модами. Показано, що дестабілізація власних мод у плазмі обмеженого об'єму супроводжується генерацією радіального потоку енергії, який може бути спрямований не лише від центру до периферії, але і з периферії до центру плазми. Поперечний потік виникає внаслідок порушення балансу між доцентровим та відцентровим потоками енергії, пов'язаними із біжучими хвилями, з яких складається мода. Потік енергії можна розділити на дві частини, одна з яких постачає енергію, що переходить у зростання амплітуди моди в областях, де мода збуджується слабо або взагалі не збуджується, а інша нагріває плазму в областях, де домінує згасання, і відповідає за просторове каналювання.

Знайдено, що густина потоку енергії сильно залежить від температури іонів: наприклад, для ЕАЕ-моди у Wendelstein 7-X при незмінній амплітуді моди збільшення температури іонів у центрі плазми з 2 до 10 кеВ викликає збільшення потоку енергії через поверхню максимального інкременту нестійкості майже на два порядки.

5. Виявлено сильний стабілізуючий вплив механізму згасання Ландау на альфвенові моди у стелараторах. Показано, що згасання Ландау альфвенових мод відіграє важливу роль у стелараторах завдяки існуванню неосесиметричних резонансів. При низькому β , згасання Ландау сильно стабілізує ТАЕ та ізомонні моди у стелараторі Wendelstein 7-X. При високому β , яке передбачається у реакторі Helias, згасання Ландау на іонах велике не лише для ТАЕ, а й для НАЕ та МАЕ мод. Це сильне згасання є наслідком відсутності в стелараторах осової симетрії, що приводить до існування резонансів через гвинтові гармоніки магнітного поля. Виняток становить згасання ТАЕ-мод у плазмі з високим β , яке відбувається за рахунок токамачного сайдбенд-резонансу. Згасання високочастотних щілинних мод у плазмах з низьким β відбувається через токамачний

сайдбенд-резонанс, але роль цього згасання незначна, тому за відсутності більш сильних механізмів згасання, високочастотні щілинні моди легше дестабілізуються у плазмах з низьким β . Декремент згасання ізомонних мод може перевищувати інкремент драйву, викликаного пролітними інжекованими іонами, тобто механізм згасання Ландау на основній плазмі може запобігти дестабілізації цих мод.

Розвинена теорія узгоджується з експериментом на основному японському гвинтовому пристрої LHD, де спостерігалися дві ТАЕ-моди: у цьому експерименті плазмове β було низьким, а β пучка – високим, і в області локалізації ТАЕ-мод існував великий градієнт тиску інжекованих частинок. Завдяки цьому згасання було недостатнім, щоб стабілізувати нестійкість цих мод.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Performance and properties of the first plasmas of Wendelstein 7-X / T Klinger, A Alonso, S Bozhnikov et al. // Plasma Phys. Control. Fusion. — 2017. — Vol. 59, no. 1. — P. 014018.
2. Fusion Physics / Ed. by Mitsuru Kikuchi, Karl Lackner, Minh Quang Tran. — Vienna : IAEA, 2012. — 1129 p. — ISBN: 9789201304100.
3. Tykhyy A. Стохастична дифузія енергійних йонів у стелараторах типу Wendelstein // Ukrainian Journal of Physics. — 2018. — Т. 63, № 6. — С. 495–505.
4. Tykhyy A., Yakovenko Y. V. Invariants of fast ion motion in stellarators // Ukrainian Journal of Physics. — 2006. — Vol. 51, no. 11-12. — P. 1077–1082.
5. Effects of the radial electric field on the confinement of trapped fast ions in the Wendelstein 7-X and Helias reactor / Ya I Kolesnichenko, VV Lutsenko, AV Tykhyy et al. // Physics of Plasmas. — 2006. — Vol. 13, no. 7. — P. 072504.
6. Mitigation of stochastic diffusion losses in optimized stellarators / AV Tykhyy, Ya I Kolesnichenko, Yu V Yakovenko et al. // Plasma Physics and Controlled Fusion. — 2007. — Vol. 49, no. 6. — P. 703.
7. Kolesnichenko Y. I., Tykhyy A. V. Landau damping of Alfvénic modes in stellarators // Plasma Phys. Control. Fusion. — 2018. — Vol. 60. — P. 125004.
8. Kolesnichenko Y. I., Tykhyy A. V. Temperature gradient driven Alfvén instability producing inward energy flux in stellarators // Physics Letters A. — 2018. — Vol. 382, no. 37. — P. 2689–2692.

9. Kolesnichenko Y. I., Tykhyy A. V. Radial energy flux during destabilized Alfvén eigenmodes // *Physics of Plasmas*. — 2018. — Vol. 25. — P. 102507.
10. Бакай А. С., Степановский Ю. П. Адиабатические инварианты. — Киев : Наукова думка, 1981.
11. Northrop T. The adiabatic motion of charged particles. — New York–London–Sydney : Interscience Publishers, 1963.
12. Cary J. R., Hedrick C. L., Tolliver J. S. Orbits in asymmetric toroidal magnetic fields // *Phys. Fluids*. — 1988. — Vol. 31. — P. 1586–1600.
13. Littlejohn R. G. Variational principles of guiding centre motion // *J. Plasma Phys.* — 1983. — Vol. 29. — P. 111.
14. Littlejohn R. G. Hamiltonian perturbation theory in noncanonical coordinates // *J. Math. Phys.* — 1982. — Vol. 23. — P. 742.
15. Arnold V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. — New York : Springer, 1978. — ISBN: 9781475716931.
16. Cary J. R., Shasharina S. G. Probability of orbit transition in asymmetric toroidal plasma // *Phys. Fluids B*. — 1993. — Vol. 5. — P. 2098–2121.
17. Boozer A. H. Plasma equilibrium with rational magnetic surfaces // *Phys. Fluids*. — 1981. — Vol. 24. — P. 1999–2003.
18. Nuhrenberg J., Zille R. Quasi-helically symmetric toroidal stellarators // *Phys. Lett. A*. — 1988. — Vol. 129. — P. 113.
19. Nuhrenberg J., Lotz W., Gori S. Theory of fusion plasmas // *Proc. Joint Varenna-Lausanne Int. Workshop (Varenna, Italy, 1994)* / Ed. by E Sindoni, F Troyon, J Vaclavik. — Bologna : Editrice Compositori, 1994. — P. 3.
20. Coil system of a Helias reactor / J Kisslinger, C D Beidler, E Harmeyer et al. // *Proc. 17th Int. Conf. (Yokohama, 1998)*. — Vienna : IAEA, 1999. — P. 1239.
21. Stochastic diffusion of energetic ions in optimized stellarators / C D Beidler, Ya I Kolesnichenko, V S Marchenko et al. // *Phys. Plasmas*. —

2001. — Vol. 8. — P. 2731.
22. Timofeev A. V. On the constancy of an adiabatic invariant when the nature of the motion changes // Sov. Phys. JETP. — 1978. — Vol. 48. — P. 656.
 23. Cary J. R., Escande D. F., Tennyson J. L. Adiabatic-invariant change due to separatrix crossing // Phys. Rev. A. — 1986. — Vol. 34. — P. 4256.
 24. Neishtadt A. I. Change of an adiabatic invariant at a separatrix // Sov. J. Plasma Phys. — 1986. — Vol. 12. — P. 568.
 25. Vacuum magnetic configurations of Wendelstein 7-X : Rep. : IPP III/270 / Max-Planck-Institut für Plasmaphysik ; Executor: T Andreeva : 2002.
 26. Cary J. R., Shasharina S. G. Helical plasma confinement devices with good confinement properties // Phys. Rev. Lett. — 1997. — Vol. 78. — P. 674.
 27. Grieger G., the W7-X Team. Physics and engineering studies for Wendelstein 7-X // J. Plasma Fusion Res. — 1998. — Vol. 1, no. 53.
 28. Status of Wendelstein 7-X construction / M Wanner, V Erckmann, J H Feist et al. // Nucl. Fusion. — 2003. — Vol. 43. — P. 416.
 29. Collisionless alpha-particle confinement in stellarators / W Lotz, P Merkel, J Nührenberg, E Strumberger // Plasma Phys. Control. Fusion. — 1992. — Vol. 34. — P. 1037.
 30. Perpendicular neutral beam injection into the stellarator W7-AS / J Baldzuhn, A Werner, H Wobig et al. // Plasma Phys. Control. Fusion. — 2003. — Vol. 45. — P. 891.
 31. Beidler C. D., Maassberg H. Implications of the quasi-neutrality condition for neoclassical transport in stellarators // IAEA Technical Meeting on Innovative Concepts and Theory of Stellarators. — Madrid : IAEA, 2005. — P. 155.

32. Galeev A. A., Sagdeev R. Z. Theory of neoclassical diffusion // Problems of Plasma Theory / Ed. by M A Leontovich. — New York : Consultants Bureau, 1979. — Vol. 7. — P. 257.
33. Itoh K., Itoh S.-I. The role of the electric field in confinement // Plasma Phys. Control. Fusion. — 1996. — Vol. 38. — P. 1.
34. Lotz W., Nührenberg J. Theory of fusion plasmas // Proc. Joint Varenna-Lausanne Int. Workshop (Varenna, Italy, 1992) / Ed. by E Sindoni, J Vaclavik. — Bologna : Editrice Compositori, 1992. — P. 17.
35. Kolesnichenko Y. I. The role of alpha particles in tokamak reactors // Nuclear Fusion. — 1980. — Vol. 20. — P. 727.
36. Gorelenkov N. N., Pinches S. D., Toi K. Energetic particle physics in fusion research in preparation for burning plasma experiments // Nuclear Fusion. — 2014. — Vol. 54. — P. 125001.
37. Chen Liu F. Z. Physics of Alfvén waves and energetic particles in burning plasmas // Rev. Mod. Phys. — 2016. — Vol. 88. — P. 015008.
38. Affinity and difference between energetic-ion-driven instabilities in 2D and 3D toroidal systems / Ya I Kolesnichenko, A Könies, V V Lutsenko, Yu V Yakovenko // Plasma Phys. Control. Fusion. — 2011. — Vol. 53. — P. 024007.
39. Slaby C., Könies A., Kleiber R. Numerical investigation of non-perturbative kinetic effects of energetic particles on toroidicity-induced Alfvén eigenmodes in tokamaks and stellarators // Phys. Plasmas. — 2016. — Vol. 23. — P. 092501.
40. Nakajima N., Cheng C. Z., Okamoto M. High-n helicity-induced shear Alfvén eigenmodes // Phys. Fluids. — 1992. — Vol. B 4. — P. 1115.
41. Nührenberg C. Computational ideal MHD: Alfv, sound and fast global modes in W7-AS // Plasma Phys. Control. Fusion. — 1999. — Vol. 41. — P. 1055.

42. Alfvén continuum and high-frequency eigenmodes in optimized stellarators / Ya I Kolesnichenko, V V Lutsenko, H Wobig et al. // Phys. Plasmas. — 2001. — Vol. 8. — P. 491.
43. Alfvén eigenmodes and their destabilization by energetic circulating ions in Wendelstein-line stellarators / Ya I Kolesnichenko, V V Lutsenko, H Wobig, Yu V Yakovenko // Phys. Plasmas. — 2002. — Vol. 9. — P. 517.
44. Li Y. M., Mahajan S. M., Ross D. W. Destabilization of global Alfvén eigenmodes and kinetic Alfvén waves by alpha particles in a tokamak plasma // Phys. Fluids. — 1987. — Vol. 30. — P. 1466.
45. Weiland J., Lisak M., Wilhelmsson H. Excitation of global alfvén modes by trapped alpha particles // Phys. Scr. — 1987. — Vol. T16. — P. 53.
46. Conventional and nonconventional global Alfvén eigenmodes in stellarators / Ya I Kolesnichenko, V V Lutsenko, A Weller et al. // Phys. Plasmas. — 2007. — Vol. 14. — P. 102504.
47. Kolesnichenko Y. I., Marchenko V. S., Wobig H. Damping of Alfvén eigenmodes on localized electrons in stellarators // Phys. Plasmas. — 2004. — Vol. 11. — P. 4616.
48. Isomon instabilities driven by energetic ions in Wendelstein 7-X / Ya I Kolesnichenko, A Könies, V V Lutsenko et al. // Nucl. Fusion. — 2016. — Vol. 56. — P. 066004.
49. Könies A., Mishchenko A., Hatzky R. From kinetic MHD in stellarators to a fully kinetic description of wave particle interaction // Theory of Fusion Plasmas / Ed. by X Garbet. — AIP Publishing, 2008. — Vol. 1069. — P. 133.
50. Fesenyuk O. P., Kolesnichenko Y. I., Yakovenko Y. V. Geodesic acoustic mode frequency and the structure of Alfvén continuum in toroidal plasmas with high $q^2\beta$ // Plasma Phys. Control. Fusion. — 2012. — Vol. 54. — P. 085014.

51. Concept of a Helias ignition experiment / H. Wobig, T. Andreeva, C.D. Beidler et al. // Nucl. Fusion. — 2003. — Vol. 43. — P. 889.
52. Effects of fast-ion-orbit width on Alfvén instabilities in stellarators: a general theory and its application to a W7-AS experiment / Ya I Kolesnichenko, V V Lutsenko, A Weller et al. // Nucl. Fusion. — 2006. — Vol. 46. — P. 753.
53. Fu G. Y., Van Dam J. W. Excitation of the toroidicity-induced shear Alfvén eigenmode by fusion alpha particles in an ignited tokamak // Phys. Fluids B. — 1989. — Vol. 1. — P. 1949–1952.
54. Belikov V. S., Kolesnichenko Y. I., Silivra O. A. Destabilization of the shear Alfvén mode by alpha particles and other high energy ions // Nucl. Fusion. — 1992. — Vol. 32. — P. 1399.
55. Könies A. — private communication. — 2017.
56. Energetic-ion-driven global instabilities in stellarator/helical plasmas and comparison with tokamak plasmas / K Toi, K Ogawa, M Isobe et al. // Plasma Phys. Control. Fusion. — 2011. — Vol. 53. — P. 024008.
57. Experimental studies of energetic-ion-driven MHD instabilities in Large Helical Device plasmas / S. Yamamoto, K. Toi, S. Ohdachi et al. // Nucl. Fusion. — 2005. — Vol. 45. — P. 326.
58. Interplay of energetic ions and Alfvén modes in helical plasmas / Ya I Kolesnichenko, S Yamamoto, K Yamazaki et al. // Phys. Plasmas. — 2004. — Vol. 11. — P. 158.
59. Fast particle confinement with optimized coil currents in the W7-X stellarator / M Drevlak, J Geiger, P Helander, Y Turkin // Nucl. Fusion. — 2014. — Vol. 54. — P. 073002.
60. Kolesnichenko Y. I., Yakovenko Y. V., Lutsenko V. V. Channeling of the energy and momentum during energetic-ion-driven instabilities in fusion plasmas // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Vol. 104. — P. 075001.

61. Anomalous electron transport due to multiple high frequency beam ion driven Alfvén eigenmodes / N.N. Gorelenkov, D. Stutman, K. Tritz et al. // Nucl. Fusion. — 2010. — Vol. 50. — P. 084012.
62. Confinement in Wendelstein 7-X limiter plasmas / M. Hirsch, A. Dinklage, A. Alonso et al. // Nucl. Fusion. — 2017. — Vol. 57. — P. 086010.
63. Major results from the first plasma campaign of the Wendelstein 7-X stellarator / R.C. Wolf, A. Ali, A. Alonso et al. // Nucl. Fusion. — 2017. — Vol. 57. — P. 102020.
64. Poloidal correlation reflectometry at W7-X: radial electric field and coherent fluctuations / T Windisch, A Krämer-Flecken, J L Velasco et al. // Plasma Phys. Control. Fusion. — 2017. — Vol. 59. — P. 105002.
65. Existence of ion temperature gradient driven shear Alfvén instabilities in tokamaks / F Zonca, Liu Chen, J Q Dong, R A Santoro // Phys. Plasmas. — 1999. — Vol. 6. — P. 1917.
66. Excitation of the beta-induced Alfvén eigenmode by a plasma flow around the magnetic island / V S Marchenko, A Panwar, S N Reznik, C M Ryu // Nucl. Fusion. — 2016. — Vol. 56. — P. 106021.
67. Electron cyclotron heating for W7-X: Physics and technology / V. Erckmann, P. Brand, H. Braune et al. // Fusion Science and Technology. — 2007. — Vol. 52. — P. 311.
68. Analysis of possible improvement of the plasma performance in JET due to the inward spatial channelling of fast-ion energy / Ya I Kolesnichenko, V V Lutsenko, M H Tyshchenko et al. // Nucl. Fusion. — 2018. — Vol. 58. — P. 076012.
69. Alfvén eigenmodes measured in the TJ-II stellarator / R Jiménez-Gómez, A Könies, E Ascasíbar et al. // Nucl. Fusion. — 2011. — Vol. 51. — P. 033001.
70. Global Alfvén eigenmodes in the H-1 heliac / M J Hole, B D Blackwell, G Bowden et al. // Plasma Phys. Control. Fusion. — 2017. — Vol. 59. —

- P. 125007.
71. Observation of 20-400 kHz fluctuations in the U-3M torsatron / M B Dreval, Yu V Yakovenko, E L Sorokovoy et al. // Phys. Plasmas. — 2016. — Vol. 23. — P. 022506.
 72. Effects of energetic-ion-driven instabilities on plasma heating, transport and rotation in toroidal systems / Ya I Kolesnichenko, Yu V Yakovenko, V V Lutsenko et al. // Nucl. Fusion. — 2010. — Vol. 50. — P. 084011.
 73. Nonlinear simulations of beam-driven compressional Alfvén eigenmodes in NSTX / E V Belova, N N Gorelenkov, N A Crocker et al. // Phys. Plasmas. — 2017. — Vol. 24. — P. 042505.
 74. Correlation between electron transport and shear Alfvén activity in NSTX / D Stutman, L Delgado-Aparicio, N N Gorelenkov et al. // Phys. Rev. Lett. — 2009. — Vol. 102. — P. 115002.
 75. Kolesnichenko Y. I., Yakovenko Y. V., Tyshchenko M. H. Mechanisms of the energy transfer across the magnetic field by Alfvén waves in toroidal plasmas // Phys. Plasmas. — 2018. — Vol. 25. — P. 122508.
 76. Energetic ions in ITER plasmas / S D Pinches, I T Chapman, Ph W Lauber et al. // Phys. Plasmas. — 2015. — Vol. 22. — P. 021807.
 77. Painter S. L., Lyon J. F. Alpha-particle losses in compact torsatron reactors // Fusion Technol. — 1989. — Vol. 16. — P. 157.
 78. Garabedian P. R. Stellarators with the magnetic symmetry of a tokamak // Phys. Plasmas. — 1996. — Vol. 3. — P. 2483.
 79. Overview on Wendelstein 7-X theory / J Nührenberg, W Lotz, P Merkel et al. // Trans. Fusion Technol. — 1995. — Vol. 27. — P. 71.
 80. Development of a robust quasi-poloidal compact stellarator / D J Strickler, S P Hirshman, D A Spong et al. // Fusion Sci. Technol. — 2004. — Vol. 45. — P. 15.
 81. Overview of lhd experiments / M. Fujiwara, K. Kawahata, N. Ohyabu et al. // Nucl. Fusion. — 2001. — Vol. 41. — P. 1355.

82. Recent results from the Large Helical Device / A Komori, N Ohyabu, H Yamada et al. // Plasma Phys. Control. Fusion. — 2003. — Vol. 45. — P. 671.
83. Mynick H., Chu T., Boozer A. Class of model stellarator fields with enhanced confinement // Phys. Rev. Lett. — 1982. — Vol. 48. — P. 322.
84. Marchenko V. S. Collisionless diffusive fluxes of locally trapped ions in tokamaks with rippled magnetic field // Nucl. Fusion. — 1995. — Vol. 35. — P. 69.
85. Novel physics involved in interpretation of Alfvénic activity accompanied by thermal crashes in W7-AS / Ya I Kolesnichenko, VV Lutsenko, A Weller et al. // 15th International Stellarator Workshop. — 2005.
86. Analysis and interpretation of observations of Alfvénic activity in Wendelstein 7-AS / Ya I Kolesnichenko, VV Lutsenko, A Weller et al. // 32nd EPS Plasma Physics Conference combined with the 8th International Workshop on Fast Ignition of Fusion Targets / European Physical Society. — 2005.
87. Confinement of fast ions in the presence of the radial electric field in Wendelstein-line stellarators / Ya I Kolesnichenko, VV Lutsenko, AV Tykhyy et al. // 13th International Congress on Plasma Physics. — 2006.
88. Yakovenko Y. V., Tykhyy A., Werner A. Mitigation of stochastic diffusion losses in optimized stellarators // 13th International Congress on Plasma Physics. — 2006.
89. Effect of the radial electric field on the confinement of fast ions in optimized stellarators / VV Lutsenko, Ya I Kolesnichenko, A Weller et al. // 10th IAEA Technical Meeting on Energetic Particles in Magnetic Confinement Systems. — 2007.
90. Tykhyy A. Stochastic diffusion of energetic ions in Wendelstein-type configurations // 11th IAEA Technical Meeting on Energetic Particles in

Magnetic Confinement Systems. — 2009.

91. Tykhyy A. Stochastic diffusion of energetic ions in Wendelstein-type stellarators // 15th IAEA Technical Meeting on Energetic Particles in Magnetic Confinement Systems. — 2017.
92. Tykhyy A. V. Generation of inward energy flux by Alfvén eigenmodes // International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion. — Kharkiv, 2018.

Додаток А

**Список публікацій здобувача за темою дисертації
та відомості про апробацію результатів дисертації**

А.1. Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. Tykhyy A., Yakovenko Y. V. Invariants of fast ion motion in stellarators // Ukrainian Journal of Physics. — 2006. — Vol. 51, no. 11-12. — P. 1077–1082.
2. Effects of the radial electric field on the confinement of trapped fast ions in the Wendelstein 7-X and Helias reactor / Ya I Kolesnichenko, VV Lutsenko, AV Tykhyy et al. // Physics of Plasmas. — 2006. — Vol. 13, no. 7. — P. 072504.
3. Mitigation of stochastic diffusion losses in optimized stellarators / AV Tykhyy, Ya I Kolesnichenko, Yu V Yakovenko et al. // Plasma Physics and Controlled Fusion. — 2007. — Vol. 49, no. 6. — P. 703.
4. Kolesnichenko Y. I., Tykhyy A. V. Landau damping of Alfvénic modes in stellarators // Plasma Phys. Control. Fusion. — 2018. — Vol. 60. — P. 125004.
5. Kolesnichenko Y. I., Tykhyy A. V. Temperature gradient driven Alfvén instability producing inward energy flux in stellarators // Physics Letters A. — 2018. — Vol. 382, no. 37. — P. 2689–2692.
6. Kolesnichenko Y. I., Tykhyy A. V. Radial energy flux during destabilized Alfvén eigenmodes // Physics of Plasmas. — 2018. — Vol. 25. — P. 102507.
7. Tykhyy A. Стохастична дифузія енергійних йонів у стелараторах типу Wendelstein // Ukrainian Journal of Physics. — 2018. — Т. 63, № 6. — С. 495–505.

8. Novel physics involved in interpretation of Alfvénic activity accompanied by thermal crashes in W7-AS / Ya I Kolesnichenko, VV Lutsenko, A Weller et al. // 15th International Stellarator Workshop. — 2005.
9. Analysis and interpretation of observations of Alfvénic activity in Wendelstein 7-AS / Ya I Kolesnichenko, VV Lutsenko, A Weller et al. // 32nd EPS Plasma Physics Conference combined with the 8th International Workshop on Fast Ignition of Fusion Targets / European Physical Society. — 2005.
10. Confinement of fast ions in the presence of the radial electric field in Wendelstein-line stellarators / Ya I Kolesnichenko, VV Lutsenko, AV Tykhyy et al. // 13th International Congress on Plasma Physics. — 2006.
11. Yakovenko Y. V., Tykhyy A., Werner A. Mitigation of stochastic diffusion losses in optimized stellarators // 13th International Congress on Plasma Physics. — 2006.
12. Effect of the radial electric field on the confinement of fast ions in optimized stellarators / VV Lutsenko, Ya I Kolesnichenko, A Weller et al. // 10th IAEA Technical Meeting on Energetic Particles in Magnetic Confinement Systems. — 2007.
13. Tykhyy A. Stochastic diffusion of energetic ions in Wendelstein-type configurations // 11th IAEA Technical Meeting on Energetic Particles in Magnetic Confinement Systems. — 2009.
14. Tykhyy A. Stochastic diffusion of energetic ions in Wendelstein-type stellarators // 15th IAEA Technical Meeting on Energetic Particles in Magnetic Confinement Systems. — 2017.
15. Tykhyy A. V. Generation of inward energy flux by Alfvén eigenmodes // International Conference-School on Plasma Physics and Controlled Fusion. — Kharkiv, 2018.

А.2. Відомості про апробацію результатів дисертації

Результати дисертації доповідалися на 15-ій Міжнародній стелараторній конференції (Мадрид, Іспанія, 2005), 32-ій Конференції ЄФТ з фізики плазми (Тарагона, Іспанія, 2005), 13-му Міжнародному конгресі з фізики плазми (Київ, 2006), 10-ій (Клостер Зеон, Німеччина, 2007), 11-ій (Київ, 2009) та 15-ій (Принстон, США, 2017) Технічних конференціях МАГАТЕ з енергійних частинок у системах магнітного утримання, Міжнародній конференції та школі з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу (Харків, 2018), а також на щорічних наукових конференціях ІЯД у 2006, 2007, 2017 та 2018 рр.