О построении некоторых типов групп бесконечных матриц

А. К. Сушкевич

§ 1. В моей работе „Обобщённые группы некоторых типов бесконечных матриц“ *) я ввел понятие о так называемых „левых полуортогональных“ матрицах. Это такие бесконечные ограниченные матрицы, у которых строки составляют неполную ортонормальную систему векторов в Гильбертовом пространстве. Таким образом, если A есть такая матрица, и мы, как обычно, обозначим через A′ транспонированную к A матрицу, то:

$$AA' = E,$$

где E — обычная единичная матрица, тогда как:

$$A'A = E_1 \neq E;$$

легко видеть, что E_1 — идемпотентна, т. е.

$$E_1^2 = E_1.$$

Матрица A′ есть „правая полуортогональная“.

В частности, я назвал левую полуортогональную матрицу „собственной“, если для дополнения системы её строк до полной ортонормальной системы векторов требуется ещё бесконечное количество векторов.

Пусть A — левая собственная полуортогональная матрица; тогда A′ назовем „правой собственной полуортогональной матрицей“. Рассмотрим уравнение:

$$YA' = E. \tag{1}$$

Согласно общей теории линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных, уравнение (1) имеет бесчисленное множество решений. Одно из его решений: Y = A. Обозначим вообще через y_1, y_2, $y_3, \ldots$ строки матрицы Y, как векторы в Гильбертовом пространстве, и будем писать:

$$Y = (y_1, y_2, y_3, \ldots);$$

Пусть аналогично:

$$A = (a_1, a_2, a_3, \ldots);$$

тогда a_1, a_2, $a_3, \ldots$ — столбцы матрицы A′, и произведение YA′ состоит из элементов: $y_\alpha a_\beta$, где $y_\alpha a_\beta$ — обычное скалярное произведение векторов y_α и a_β. Но, согласно (1), имеем:

$$y_\alpha a_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \tag{2}$$

*) Записки Научно-исследовательского института математики и механики ХГУ Харьковского математического общества, сер. 4, т. 16, 1939.

$$\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}1 \text{ при } \alpha=\beta,\\ 0 \text{ при } \alpha\neq\beta.\end{cases}$$

Уравнения (2) удовлетворяются, если предположить, что

$$y_\alpha=a_\alpha+a'_\alpha \tag{3}$$

Здесь a'_α ($\alpha=1, 2, \ldots$) — некоторые различные нормированные векторы, ортогональные ко всем a_α и друг к другу, т. е. часть (или все) из тех векторов, которые дополняют ортонормальную систему векторов a_α до полной.

Если нам нужно не одно, а несколько (даже бесчисленное множество) различных решений уравнения (1): Y', Y'', $Y'''\ldots$, то мы берём, обозначив $Y^{(\lambda)}=(y_1^{(\lambda)}, y_2^{(\lambda)}, \ldots)$:

$$Y_\alpha^{(\lambda)}=a_\alpha+a_\alpha^{(\lambda)} \tag{4}$$

Здесь $a_\alpha^{(\lambda)}$ ($\alpha=1, 2, \ldots$; $\lambda=1, 2, \ldots$) — все различные нормированные векторы, которые дополняют систему $a_1, a_2, \ldots$ до полной (все такие векторы, или только их часть); т. е. все $a_\alpha^{(\lambda)}$ ортогональны друг к другу и ко всем a_α.

Докажем, что все векторы $a_1, a_2, \ldots, y'_1, y'_2, \ldots, y''_1, y''_2, \ldots, \ldots$ линейно независимы. Пусть:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\alpha_\varkappa a_\varkappa+\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\beta'_\varkappa y'_\varkappa+\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\beta''_\varkappa y''_\varkappa+\ldots=0;$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty}(\alpha_\varkappa+\beta'_\varkappa+\beta''_\varkappa+\ldots)\ a_\varkappa+\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\beta'_\varkappa a'_\varkappa+\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\beta''_\varkappa a''_\varkappa+\ldots=0;$$

иначе: $\beta'_\varkappa=0$, $\beta''_\varkappa=0, \ldots$ ($\varkappa=1, 2, \ldots$), $\alpha_\varkappa+\beta'_\varkappa+\beta''_\varkappa+\ldots=0$, так как векторы $a_\varkappa$, $a'_\varkappa$, $a''_\varkappa, \ldots$ линейно независимы; значит, и все $\alpha_\varkappa=0$.

§ 2. Поставим теперь такую задачу: пусть, как и в § 1, $Y^{(\lambda)}$ ($\lambda=1, 2, \ldots$) — решения уравнения (1), а $P_1, P_2, \ldots$ — произвольные ограниченные матрицы ($P_\lambda=(p_{\alpha\beta}^{(\lambda)})$); требуется найти матрицу X, которая удовлетворяла бы уравнениям:

$$AX=E;\ Y^{(\lambda)}X=P_\lambda\ \ (\lambda=1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Обозначим через $x_1, x_2, \ldots$, столбцы матрицы X. Тогда (5) равнозначно с такими уравнениями:

$$a_\alpha x_\beta=\delta_{\alpha\beta};\ y_\alpha^{(\lambda)}x_\beta=p_{\alpha\beta}^{(\lambda)}\ \ (\lambda=1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Подставив во второе уравнение (6) значение для $Y_\alpha^{(\lambda)}$ из (4), получим, принимая во внимание первое уравнение (6):

$$\delta_{\alpha\beta}+a_\alpha^{(\lambda)}x_\beta=p_{\alpha\beta}^{(\lambda)},$$

или:

$$a_\alpha^{(\lambda)}x_\beta=p_{\alpha\beta}^{(\lambda)}-\delta_{\alpha\beta}.$$

Уравнения:

$$a_\alpha x_\beta=\delta_{\alpha\beta};\ a_\alpha^{(\lambda)}x_\beta=p_{\alpha\beta}^{(\lambda)}-\delta_{\alpha\beta}\ \ (\lambda=1, 2, \ldots) \tag{7}$$

разрешимы; их решение (или одно из их решений):

$$\left.\begin{aligned} x_\beta &= \sum_{\alpha=1}^{\infty}\delta_{\beta\alpha}\, a_\alpha + \sum_{\lambda=1}^{\varkappa}\sum_{\alpha=1}^{\infty}(p_{\alpha\beta}^{(\lambda)}-\delta_{\alpha\beta})\, a_\alpha^{(\lambda)} = \\ &= a_\beta - \sum_{\lambda=1}^{\varkappa} a_\beta^{(\lambda)} + \sum_{\lambda=1}^{\varkappa}\sum_{\alpha=1}^{\infty} p_{\alpha\beta}^{(\lambda)}\, a_\alpha^{(\lambda)} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

§ 3. Пусть и теперь K_1 — данная левая собственная полуортогональная матрица; обозначим: $K'_1 = L_1$. Тогда, по доказанному в §§ 1 и 2, можно найти $r-1$ матриц $K_2, \ldots K_r$ и $s-1$ матриц $L_2 \ldots L_s$ (r, s — произвольные натуральные числа), так что:

$$K_1 L_\lambda = K_\varkappa L_1 = E \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots r;\ \lambda = 1, 2, \ldots s)$$

и

$$K_\varkappa L_\lambda = P_{\varkappa\lambda} \quad (\varkappa = 2, \ldots r;\ \lambda = 2, \ldots s);$$

здесь $P_{\varkappa\lambda}$ — произвольные (ограниченные) матрицы; далее мы на них наложим известные ограничения.

Рассмотрим произведения: $E_{\lambda 1} = L_\lambda K_1$ и $E_{\lambda\varkappa} = L_1 K_\varkappa$; легко видеть, что $E_{1\varkappa}$ и $E_{\lambda 1}$ — идемпотентные матрицы, а именно:

$$E^2_{\lambda 1} = L_\lambda (K_1 L_\lambda)\ K_1 = L_\lambda E K_1 = L_\lambda\ K_1 = E_{\lambda 1};$$

$$E^2_{1\varkappa} = L_1 (K_\varkappa L_1)\ K_\varkappa = L_1 E K_\varkappa = L_1\ K_\varkappa = E_{1\varkappa};$$

далее:

$$E_{1\varkappa} E_{1\mu} = L_1 (K_\varkappa L_1)\ K_\mu = L_1 K_\mu = E_{1\mu};$$

$$E_{\lambda 1} E_{\nu 1} = L_\lambda (K_1 L_\nu)\ K_1 = L_\lambda\ K_1 = E_{\lambda 1}.$$

Следовательно, матрицы $E_{\lambda 1}$ образуют левую группу, а матрицы $E_{1\varkappa}$ — правую группу.

Пусть G — какая-либо (конечная или бесконечная, обыкновенная или обобщённая) группа бесконечных ограниченных матриц. Заметим, что G может и не иметь единицы. Возьмем комплекс

$$G_{\lambda 1} = L_\lambda G K_1$$

и докажем, что $G_{\lambda 1}$ есть группа, просто изоморфная с группой G. Пусть

$$G = A + B + C + \ldots;$$

тогда:

$$G_{\lambda 1} = L_\lambda A K_1 + L_\lambda B K_1 + L_\lambda C K_1 + \ldots$$

Взаимно-однозначное соответствие элементов G и $G_{\lambda 1}$ устанавливается так:

Матрице A соответствует матрица $L_\lambda A K_1$. Тогда матрице AB соответствует:

$$L_\lambda A K_1 \cdot L_\lambda B K_1 = L_\lambda A (K_1 L_\lambda)\ B K_1 = L_\lambda (AB) K_1.$$

Таким образом, изоморфизм установлен; что он простой, вытекает из того, что

при $A \neq B$ имеем $L_\lambda A K_1 \neq L_\lambda B K_1$, ибо при $L_\lambda AK_1 = L_\lambda BK_1$ получается:

$$K_1L_\lambda AK_1L_\lambda = K_1L_\lambda BK_1L_\lambda, \text{ или } A = B.$$

Аналогично найдем, что комплекс $G_{1\varkappa} = L_1 GK_{1\varkappa}$ есть группа просто изоморфная с G.

§ 4. Рассмотрим теперь комплекс:

$$G_1 = G_{11} + G_{21} + \ldots + G_{s1};$$

этот комплекс составляет обобщённую группу, которую мы назовем **обобщённой левой группой, порождённой группой G.** Если G есть обычная (классическая) группа, то G_1 — обычная левая группа (т. е. ассоциативная группа с левым законом однозначной и неограниченной обратимости).

Если A и BϵG, то $L_\alpha AK_1 \epsilon G_{\alpha 1}$, $L_\beta BK_1 \epsilon G_{\beta 1}$,

и мы имеем:

$$L_\alpha AK_1 \cdot L_\beta BK_1 = L_\alpha A(K_1L_\beta) BK_1 = L_\alpha (AB) K_1 \epsilon G_{\alpha 1};$$

отсюда:

$$G_{\alpha 1} \cdot L_\beta BK_1 \subset G_{\alpha 1}, \tag{9}$$

$$L_\alpha AK_1 \cdot G_{\beta 1} \subset G_{\alpha 1} \tag{10}$$

и вообще:

$$G_{\alpha 1} G_{\beta 1} \subset G_{\alpha 1} \tag{11}$$

Если группа G имеет правую единицу F (она может и не быть равной единичной матрице E), то все матрицы вида $L_\beta FK_1$ ($\beta = 1, 2, \ldots s$) суть правые единицы для G_1, а именно:

$$L_\alpha AK_1 \cdot L_\beta FK_1 = L_\alpha AFK_1 = L_\alpha AK_1.$$

Тогда формула (11) заменяется такой:

$$G_{\alpha 1} G_{\beta 1} = G_{\alpha 1} \tag{11a}$$

Если группа G имеет левую единицу H, то матрица $L_\alpha HK_1$ есть левая единица для группы G_α, а вообще:

$$L_\alpha HK_1 \cdot L_\beta AK_1 = L_\alpha AK_1;$$

т. е. формула (11) и здесь преобразуется в (11a).

§ 5. Рассмотрим случай, когда G — сама обыкновенная левая группа; пусть:

$$G = C_1 + C_2 + \ldots + C_t; \tag{12}$$

здесь $C_\varkappa$ обыкновенные, просто-изоморфные друг к другу группы; через E_λ обозначим единицу группы C_λ. Тогда имеем:

$$G_{\lambda 1} = L_\lambda C_1K_1 + L_\lambda C_2K_1 + L_\lambda C_tK_1; \tag{13}$$

$$G_1 = \sum_{\lambda, \alpha} L_\lambda C_\alpha K_1 \tag{14}$$

$$\lambda = 1, 2, \ldots s;$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots t.$$

Легко видеть, что G_1 есть обыкновенная левая группа, которая состоит из обыкновенных групп $L_\lambda C_\alpha K_1$ (всего их st) и имеет правые единицы $L_\lambda E_\alpha K_1$.

Пусть теперь G — обыкновенная правая группа; предположим, что её состав и здесь дается формулой (12).

И в данном случае имеем формулу (13) для G_{λ_1} (которое есть правая обычная группа) и формулу (14) для G_1. Поскольку G имеет левые единицы, то сохраняет силу формула (11a).

Рассмотрим еще комплекс:

$$L_1 C_\alpha K_1 + L_2 C_\alpha K_1 + \ldots + L_s C_\alpha K_1 = H_\alpha . \qquad (15)$$

$$(\alpha = 1,\ 2, \ldots r).$$

Поскольку C_α — обычная группа, то H_α — левая обычная группа. Можно написать:

$$G_1 = H_1 + H_2 + \ldots H_r.$$

Имеем, далее:

$$L_\lambda C_\alpha K_1 \cdot L_\mu C_\beta K_1 = L_\lambda (L_\alpha C_\beta) K_1 = L_\lambda C_\beta K_1 ,$$

ибо $C_\alpha C_\beta = C_\beta$; а отсюда:

$$H_\alpha\ H_\beta = H_\beta .$$

Все это говорит о том, что G_1 есть группа типа ядра. „Единицами“ этой группы, служат: $L_\lambda E_\alpha K_1$ $(\alpha = 1,\ 2, \ldots t;\ \lambda = 1,\ 2, \ldots s)$.

Заметим еще:

$$L_\lambda E_\alpha K_1 \cdot L_\mu E_\beta K_1 = L_\lambda\ (E_\alpha E_\beta)\ K_1 = L_\lambda E_\beta K_1.$$

Это говорит о том, что в группе G_1 произведение единиц всегда есть тоже единица, т. е. что все единицы группы G_1 сами образуют группу (также типа ядра). Итак, G_1 есть специальный тип группы — ядра.

§ 6. Вполне аналогично с обобщённой левой группой определим обобщённую правую группу, порождённую группой G:

$$H_1 = G_{11} + G_{12} + \ldots + G_{1r}.$$

Здесь имеем:

$$L_\lambda BK_\beta \cdot G_{1\alpha} \subset G_{1\alpha} ;$$

$$G_\alpha \cdot L_1 AK_\beta \subset G_{1\beta} ;$$

вообще:

$$G_{1\alpha} G_{1\beta} \subset G_{1\beta} \qquad (16)$$

Если группа G имеет левую единицу F, то все матрицы вида L_1FK_α $(\alpha = 1,\ 2, \ldots r)$ суть левые единицы для H_1. Если же группа G имеет правую единицу H, то матрица L_1HK_α $(\alpha = 1,\ 2, \ldots r)$ есть правая единица для группы $G_{1\alpha}$, и вообще:

$$L_1AK_\alpha \cdot L_1HK_\beta = L_1AK_\beta .$$

В обоих случаях вместо (16) имеем формулу:

$$G_{1\alpha} G_{1\beta} = G_{1\beta} . \qquad (16a)$$

Если G — обычная правая группа, то и H_1 — обычная правая группа. Если же G — обычная левая группа, то H_1 есть частный случай группы — ядра.

§ 7. Рассмотрим теперь комплекс:

$$G_{\alpha\beta} = L_\alpha GK_\beta .$$

Пусть A и B—две матрицы из G; имеем:

$$L_\alpha AK_\beta \cdot L_\alpha BK_\beta = L_\alpha (AP_{\beta\alpha} B) K_\beta ;$$

это произведение наверно из $G_{\alpha\beta}$, если $P_{\beta\alpha} \in G$.

Такое условие мы далее и поставим. Таким образом, и здесь G будет группой, но нельзя сказать, что $G_{\alpha\beta}$ просто-изоморфна с G. Если мы в группе G определим новое действие таким образом:

$$A \circ B = AP_{\beta\alpha} B$$

и группу G относительно этого действия $\circ$ обозначим через $G(\circ)$, то можно сказать, что $G_{\alpha\beta}$ есть группа, просто-изоморфная группе $G(\circ)$. Что изоморфизм простой, следует из того, что при

$$L_\alpha AK_\beta = L_\alpha BK_\beta$$

получается:

$$K_1 L_\alpha \cdot AK_\beta L_1 = K_1 L_\alpha BK_\beta L_1 ;$$

$$EAE = EBE ;\ \text{то-есть}\ A = B.$$

Теперь строим комплексы;

$$G_\beta = G_{1\beta} + G_{2\beta} + \ldots + G_{s\beta}\ (\beta = 1, 2, \ldots r);$$

$$H_\alpha = G_{\alpha 1} + G_{\alpha 2} + \ldots + G_{\alpha r}\ (\alpha = 1, 2, \ldots s).$$

Легко видеть, что:

$$G_{\alpha\beta} G_{\gamma\beta} \subset G_{\alpha\beta};$$

$$G_{\alpha\beta} G_{\alpha\gamma} \subset G_{\alpha\gamma};$$

G_β является ещё дальнейшим обобщением левой группы, а H_α — обобщением правой группы. Здесь все $G_{\alpha\beta}$ не изоморфны между собой и не изоморфны с группой G, но для каждой из групп $G_{\alpha\beta}$ можно в G определить известное действие $\circ$, так что $G_{\alpha\beta}$ будет просто изоморфно с группой $G(\circ)$.

В случае, когда G — обычная группа, определив действие $\circ$ в группе G так:

$$A \circ B = APB,$$

где $P \in G$, мы можем доказать, что группа $G(\circ)$ просто-изоморфна группе G, а именно: когда элементу A соответствует элемент $P^{-1}A$, или AP^{-1} (ведь в обычной группе G каждый элемент P имеет обратный элемент P^{-1}), ибо тогда:

элемент A соответствует $P^{-1}A(AP^{-1})$;

элемент B соответствует $P^{-1}B(BP^{-1})$;

элемент AB соответствует $P^{-1}(AB) = P^{-1}APP^{-1}B = P^{-1}A \circ P^{-1}B$

$$((AB)P^{-1} = AP^{-1} \circ BP^{-1}).$$

В этом случае все группы $G_{\alpha\beta}$—обычные и просто-изоморфны группе G.

Если группа G — обычная левая (или обычная правая), мы можем сделать тот же вывод: группа G просто изоморфна группе $G(\circ)$; ибо здесь каждый элемент P имеет „обратный“ элемент P^{-1} такой, что $PP^{-1} = P^{-1}P = E$ есть одна из правых (левых) единиц всей группы G.

Таким образом, и в этом случае все группы $G_{\alpha\beta}$ просто изоморфны группе G.

§ 8. Рассмотрим теперь весь комплекс:

$$K = \sum_{\alpha=1}^{s} \sum_{\beta=1}^{r} G_{\alpha\beta} = \sum_{\beta=1}^{r} H_{\beta} = \sum_{\alpha=1}^{s} H_{\alpha} .$$

Пусть A и $B \epsilon C$: возьмем:

$$L_{\alpha} A K_{\beta} \cdot L_{\gamma} B K_{\delta} = L_{\alpha} (A P_{\beta\gamma} B) K_{\delta} \epsilon H_{\alpha\delta} .$$

То-есть:

$$G_{\alpha\beta} \, G_{\gamma\delta} \subset G_{\alpha\delta} .$$

K есть обобщённая группа, которая является обобщением так называемой „группы — ядра“.