О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ПОЛИНОМАМИ С. Н. БЕРНШТЕЙНА

З. В. Зарицкая

В работе [1] К. Леу доказывает теорему о классе насыщения при приближении непрерывных функций одной переменной полиномами С. Н. Бернштейна. В настоящей работе результаты Леу распространяются его методом (методом сопряженных операторов, общая схема которого дана в [2]), на случай приближения функций многих переменных полиномами С. Н. Бернштейна вида

$$B_{nm}(f;\ x,\ y) = \sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m} f\left(\frac{\nu}{n},\ \frac{\mu}{m}\right) T_{n\nu}(x)\, T_{m\mu}(y),$$

где

$$T_{n\nu}(x) = C_n^{\nu} x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}.$$

Доказаны следующие утверждения:

Теорема 1. *Если* $f(x, y)$ *непрерывна в* $[0, 1; 0, 1]$ *и в каждом квадрате* $[a, b; a, b] \subset [0, 1; 0, 1]$ $f \in C^{(1,1)}$, *то равномерно в каждом квадрате, содержащемся в* $(0, 1; 0, 1)$ *будет*

$$|B_{nm}(f;\ x,\ y) - f(x, y)| = O\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right),$$

где $C^{(k,\lambda)}(D)$ — *класс функций* $f(x, y)$, *которые имеют все производные к-го порядка, удовлетворяющие в* D *условию* $\mathrm{Lip}\,\lambda$. (Определение $C^{(k,\lambda)}(D)$ см. [3], стр. 10).

Теорема 2. *Если* $f(x, y)$ *непрерывна в* $[0, 1; 0,1]$ *и на границе этого квадрата* $f(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy$, *где* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — *любые постоянные, и если, кроме того,*

$$|B_{nn}(f;\ x,\ y) - f(x, y)| = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

равномерно в каждом внутреннем квадрате квадрата $[0, 1; 0, 1]$, то $f \in C^{(1,\lambda)}$ *(при любом* $\lambda < 1$*) в каждом* $[a, b; a, b] \subset (0, 1; 0, 1)$.

§ 1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Лемма 1.1. *Если* $f \in C^{(1,1)}$ *на* $[0, 1; 0,1]$, *то равномерно на* $[0, 1; 0, 1]$ *выполняется равенство*

$$|B_{nm}(f;\ x,\ y) - f(x, y)| = O\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right).$$

Доказательство. Определим функцию $\varphi(x, y)$ равенством

$$f(t, v) = f(x, y) + f'_x(x, y)\cdot(t - x) + f'_y(x, y)\cdot(v - y) + \varphi(t, v). \quad (1.1)$$

Функция φ в силу условия имеет производные первого порядка по обеим переменным, удовлетворяющие Lip 1 в $[0,1;\ 0,1]$, при этом $\varphi(x, y) = \varphi_t'(x, y) = \varphi_v'(x, y) = 0$.

Представим φ в таком виде:

$$\varphi(t, v) = [\varphi(t, v) - \varphi(x, v)] + [\varphi(x, v) - \varphi(x, y)] = [\varphi_t'(x + \theta_1(t - x),\ v) - \varphi_t'(x, v)](t - x) + \varphi_t'(x, v)\cdot(t - x) + [\varphi_v'(x, y + \theta_2(v - y)) - \varphi_v'(x, y)]\cdot(v - y),$$

$$\text{где } 0 < \theta_1,\ \theta_2 < 1. \tag{1.2}$$

Пользуясь хорошо известными равенствами

$$\begin{aligned}
&B_{nm}(1;\ x, y) = 1,\\
&B_{nm}(t;\ x, y) = x,\\
&B_{nm}(v;\ x, y) = y,\\
&B_{nm}(tv;\ x, y) = xy,\\
&B_{nm}(t^2;\ x, y) = x^2 + \frac{x(1 - x)}{n},\\
&B_{nm}(v^2;\ x, y) = y^2 + \frac{y(1 - y)}{m},
\end{aligned} \tag{1.3}$$

линейностью и положительностью операторов B_{nm} из (1.1), (1.2), (1.3) и условия леммы, получим

$$B_{nm}[\varphi_t'(x, v)\cdot(t - x);\ x, y] = B_m[\varphi_t'(x, v);\ y]\cdot B_n[(t - x);\ x] \equiv 0, \tag{1.4}$$

где $B_n(f;\ x)$ — полином Бернштейна для $f(t)$; и, принимая во внимание еще (1.4), имеем

$$\begin{aligned}
\frac{nm}{n + m}|B_{nm}(f;\ x, y) - f(x, y)| &= \frac{nm}{n + m}|B_{nm}[\varphi(t, v);\ x, y]| \leqslant\\
&\leqslant \frac{nm}{n + m}B_{nm}[|\varphi_t'(x + \theta_1(t - x), v) - \varphi_t'(x, v)|\cdot|(t - x|;\ x, y] +\\
&+ \frac{nm}{n + m}B_{nm}[|\varphi_v'(x, y + \theta_2(v - y)) - \varphi_v'(x, y)|\cdot|v - y|;\ x, y] \leqslant\\
&\leqslant \frac{nm}{n + m}\cdot C\left\{B_{nm}[(t - x)^2;\ x, y] + B_{nm}[(v - y)^2;\ x, y]\right\} \leqslant \frac{C}{4},
\end{aligned}$$

т. е. в $[0,1;\ 0,1]$

$$|B_{nm}(f;\ x, y) - f(x, y)| = O\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right).$$

Лемма 1.1 доказана.

Пусть теперь $f \in C^{(1,1)}([a, b;\ a, b])$. Для доказательства справедливости теоремы 1 достаточно показать, что для каждого $\delta > 0$

$$|B_{nm}(f;\ x, y) - f(x, y)| = O\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)$$

на $[a + 3\delta,\ b - 3\delta;\ a + 3\delta,\ b - 3\delta]$.

Пусть $g(x, y)$ — бесконечно дифференцируемая на $[0, 1;\ 0,1]$ функция такая, что

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{на } [a + 2\delta,\ b - 2\delta;\ a + 2\delta,\ b - 2\delta],\\ 0 & \text{вне } [a + \delta,\ b - \delta;\ a + \delta,\ b - \delta],\\ 0 \leqslant g \leqslant 1 & \text{на } [0, 1;\ 0, 1].\end{cases}$$

(такая функция существует, см. [4]).

Тогда в $[a+2\delta, b-2\delta; a+2\delta, b-2\delta]$

$$|B_{nm}(f; x, y) - f(x, y)| \leqslant |B_{nm}(f; x, y) - B_{nm}(f \cdot g; x, y)| + |B_{nm}(f \times \times g,; x, y) - f(x, y) \cdot g(x, y)|. \tag{1.5}$$

Если $(x, y) \in [a+3\delta, b-3\delta; a+3\delta, b-3\delta]$, то

$$|B_{nm}(f; x, y) - B_{nm}(f \cdot g; x, y)| \leqslant \sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m}\left|f\left(\frac{\nu}{n}, \frac{\mu}{m}\right)\right| \times \times \left|1 - g\left(\frac{\nu}{n}, \frac{\mu}{m}\right)\right| T_{n\nu}(x) T_{m\mu}(y) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \max_{0 \leqslant x,\, y \leqslant 1} |f(x, y)| \sum_{\left(\frac{\nu}{n}, \frac{\mu}{m}\right) \overline{\in} [a+2\delta, b-2\delta; a+2\delta, b-2\delta]}\sum T_{n\nu}(x) T_{m\mu}(y) \leqslant C\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \tag{1.6}$$

(см. напр., [5]).

Очевидно, функция $f(x, y) \cdot g(x, y)$ имеет производные первого порядка по x и по y, удовлетворяющие $\mathrm{Lip}\ 1$ в $[0, 1; 0, 1]$. Тогда согласно лемме 1.1

$$|B_{nm}(f \cdot g; x, y) - f \cdot g| = O\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \tag{1.7}$$

равномерно относительно $(x, y) \in [0, 1; 0, 1]$. Из (1.5), (1.6), (1.7) следует

$$\frac{nm}{n+m}|B_{nm}(f; x, y) - f(x, y)| = O(1)$$

равномерно на $[a+3\delta, b-3\delta; a+3\delta, b-3\delta]$.

§ 2. ПОЛИНОМЫ БЕРНШТЕЙНА-КАНТОРОВИЧА

Пусть $f(x, y)$ непрерывна на $[0, 1; 0, 1]$. Полином Бернштейна — Канторовича определяется

$$A_{nm}(f; x, y) = \sum_{\nu=1}^{n-1}\sum_{\mu=1}^{m-1} f(n, \nu, m, \mu) \cdot T_{n\nu}(x) \cdot T_{m\mu}(y),$$

где

$$f(n, \nu, m, \mu) = nm \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} dt \int_{-\frac{1}{2m}}^{\frac{1}{2m}} f\left(t + \frac{\nu}{n}, v + \frac{\mu}{m}\right) dv,$$

n и m — натуральные.

Подобные полиномы были введены Л. В. Канторовичем [6] для функций одной переменной.

Разности $A_{nn}(f) - f$ и $B_{nn}(f) - f$ не одного порядка малости, но оказывается, что $B_{nn}(f) - f = O\left(\frac{1}{n}\right)$ тогда и только тогда, когда $A_{nn}(f) - f = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Нам будет нужное следующее обобщение результата Зигмунда ([7], стр. 143).

Лемма 2.1. *Пусть:* 1) $f(x, y)$ *непрерывна и* 2π — *периодическая по каждой переменной;* 2) *существует константа* $K > 0$ *и для любого натурального* n *существует некоторый тригонометрический полином* $T_{nn}(x, y)$ *степени не больше* n *по* x *и по* y *периода* 2π *по каждой переменной такой, что*

$$|f(x, y) - T_{nn}(x, y)| \leqslant \frac{K}{n} \; (-\infty < x, y < +\infty).$$

Тогда существует константа $M > 0$, *что для любых* h, x и y

$$|f(x+h, y) + f(x-h, y) - 2f(x, y)| \leqslant M|h|,$$
$$|f(x, y+h) + f(x, y-h) - 2f(x, y)| \leqslant M|h|.$$

Доказательство легко провести методом С. Н. Бернштейна выделения «редкой» подпоследовательности из последовательности $\{T_{nn}(x, y)\}$.

Из этой леммы известными методами [1] получается

Лемма 2.2. *Пусть* $f(x, y)$ *непрерывна на* $[0, 1; 0, 1]$, *существует константа* $K > 0$ *и для каждого натурального* n *алгебраический полином* P_{nn} *степени не больше* n *по* x *и по* y *такой, что*

$$|f(x, y) - P_{nn}(x, y)| \leqslant \frac{K}{n}$$

при $(x, y) \in [a, b; a, b] \subset (0, 1; 0, 1)$.
Тогда для любого $\delta > 0$ *существует константа* M_δ, *что для каждой точки* $(x, y) \in [a+\delta, b-\delta; a+\delta, b-\delta]$ *и всех допустимых* h

$$|f(x+h, y) + f(x-h, y) - 2f(x, y)| \leqslant M_\delta |h|,$$
$$|f(x, y+h) + f(x, y-h) - 2f(x, y)| \leqslant M_\delta |h|.$$

Лемма 2.3. *Пусть* $f(x, y)$ *непрерывна на* $[0, 1; 0, 1]$, *для всех* h *и всех*

$$(x, y) \in [a, b; a, b] \subset (0, 1; 0, 1)$$
$$|f(x+h, y) + f(x-h, y) - 2f(x, y)| \leqslant M|h|,$$
$$|f(x, y+h) + f(x, y-h) - 2f(x, y)| \leqslant M|h|.$$

Тогда условие

$$|A_{nn}(f; x, y) - B_{nn}(f; x, y)| = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

выполняется равномерно на каждом внутреннем квадрате квадрата $[a, b; a, b]$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\delta > 0$. Достаточно показать, что $|A_{nn}(f; x, y) - B_{nn}(f; x, y)| = O\left(\frac{1}{n}\right)$ справедливо на $[a+\delta, b-\delta; a+\delta, b-\delta]$. Пусть (x, y) принадлежит этому квадрату. Тогда

$$|A_{nn}(f; x, y) - B_{nn}(f; x, y)| \leqslant \sum_{\left(\frac{\nu}{n}, \frac{\mu}{n}\right) \in [a, b; a, b]} \sum \left| f(n, \nu, n, \mu) - f\left(\frac{\nu}{n}, \frac{\mu}{n}\right)\right| T_{n\nu}(x) \cdot T_{n\mu}(y) + 2 \sup_{0 \leqslant t, v \leqslant 1} |f(t, v)| \sum_{\left(\frac{\nu}{n}, \frac{\mu}{n}\right) \overline{\in} [a, b; a, b]} \sum T_{n\nu}(x) T_{n\mu}(y) =$$
$$= S_1 + S_2. \tag{2.1}$$

Согласно [5]

$$S_2 \leqslant \frac{C}{n}. \tag{2.2}$$

Для $\left(\frac{\nu}{n}, \frac{\mu}{n}\right) \in [a, b; a, b]$

$$\left|f(n, \nu, n, \mu) - f\left(\frac{\nu}{n}, \frac{\mu}{n}\right)\right| \leqslant n^2 \int_0^{\frac{1}{2n}} dt \int_0^{\frac{1}{2n}} \left|f\left(t + \frac{\nu}{n}, v + \frac{\mu}{n}\right) + \right.$$
$$\left. + f\left(-t + \frac{\nu}{n}, v + \frac{\mu}{n}\right) - 2f\left(\frac{\nu}{n}, v + \frac{\mu}{n}\right)\right| dv +$$
$$+ n^2 \int_0^{\frac{1}{2n}} dt \int_0^{\frac{1}{2n}} \left|f\left(t + \frac{\nu}{n}, -v + \frac{\mu}{n}\right) + f\left(-t + \frac{\nu}{n}, -v + \frac{\mu}{n}\right) - \right.$$
$$\left. - 2f\left(\frac{\nu}{n}, -v + \frac{\mu}{n}\right)\right| dv + 2n^2 \int_0^{\frac{1}{2n}} dt \int_0^{\frac{1}{2n}} \left|f\left(\frac{\nu}{n}, v + \frac{\mu}{n}\right) + f\left(\frac{\nu}{n}, -v + \frac{\mu}{n}\right) - \right.$$
$$\left. - 2f\left(\frac{\nu}{n}, \frac{\mu}{n}\right)\right| dv \leqslant \frac{M}{4} \cdot \frac{1}{n}.$$

Следовательно, так как $\sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{n} T_{n\nu}(x) T_{n\mu}(y) = 1$, для всех (x, y)

$$S_1 \leqslant \frac{M}{4} \cdot \frac{1}{n}. \qquad (2.3)$$

Из (2.1), (2.2) и (2.3) следует утверждение леммы.

Как следствие этих двух лемм получаем следующую теорему.

Теорема 2. 4. *Пусть* $f(x, y)$ *непрерывна на* $[0, 1; 0, 1]$, $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. *Тогда справедливость соотношения*

$$|B_{nn}(f; x, y) - f(x, y)| = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (2.4)$$

равномерно на каждом внутреннем квадрате квадрата $[a, b; a, b]$ *эквивалентна тому, что равномерно на каждом внутреннем квадрате квадрата* $[a, b; a, b]$

$$|A_{nn}(f; x, y) - f(x, y)| = O\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (2.5)$$

Доказательство. Докажем, что из (2.4) следует (2.5). Доказательство обратной теоремы идентично.

Выберем произвольное $\delta > 0$. Если (2.4) верно, то существует константа $K > 0$, что для всех натуральных n

$$|B_{nn}(f; x, y) - f(x, y)| \leqslant K \cdot \frac{1}{n} \text{ при } a + \delta \leqslant x, y \leqslant b - \delta.$$

Значит, согласно лемме 2.2, существует $M = M(\delta)$, что

$$|f(x+h, y) + f(x-h, y) - 2f(x, y)| \leqslant M|h|,$$
$$|f(x, y+h) + f(x, y-h) - 2f(x, y)| \leqslant M|h|$$

для всех $(x, y) \in [a + 2\delta, b - 2\delta; a + 2\delta, b - 2\delta]$ и всех допустимых h.

Согласно лемме 2. 3

$$|A_{nn}(f; x, y) - B_{nn}(f; x, y)| = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

равномерно на $[a+3\delta,\ b-3\delta;\ a+3\delta,\ b-3\delta]$. Вместе с (2.4) доказано, что

$$|A_{nn}(f;\ x,\ y)-f(x,\ y)|=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

равномерно на $[a+3\delta,\ b-3\delta;\ a+3\delta,\ b-3\delta]$, и так как δ произвольно, то доказательство завершено.

§ 3. СОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР

Обозначим через C пространство всех непрерывных на $[0,\ 1;\ 0,\ 1]$ функций с нормой

$$\|f\|_C=\max_{0\leqslant x,\ y\leqslant 1}|f(x,\ y)|,$$

через L — пространство всех действительных функций, суммируемых на $[0,\ 1;\ 0,\ 1]$ с нормой

$$\|\varphi\|_L=\int_0^1\int_0^1|\varphi(x,\ y)|\,dx\,dy.$$

Если $\varphi\in L$ и f измеримая в существенном ограниченная функция, то скалярное произведение определим так:

$$\langle\varphi,\ f\rangle=\int_0^1\int_0^1\varphi(x,\ y)\cdot f(x,\ y)\,dx\,dy.$$

Для каждого $\varphi\in L$ и целых $n>1$ и $m>1$ оператор $A^*_{nm}(\varphi;\ x,\ y)$ определяется следующими формулами:

$$A^*_{nm}(\varphi;\ x,\ y)=\begin{cases} nm\langle\varphi,\ T_{n\nu}(x)\cdot T_{m\mu}(y)\rangle \text{ для } \left|x-\frac{\nu}{n}\right|<\frac{1}{2n},\ \left|y-\frac{\mu}{m}\right|<\frac{1}{2m} \\ \qquad \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;\ \mu=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1 \\ 0 \qquad \text{для всех других } x \text{ и } y. \end{cases}$$

Легко проверить, что

$$\langle A^*_{nm}\varphi,\ f\rangle=\langle\varphi,\ A_{nm}f\rangle \tag{3.1}$$

для всех $\varphi\in L$ и $f\in C$, т. е. A^*_{nm} — сопряженный к A_{nm} оператор.

Обозначим через C_0^2 подпространство пространства C, состоящее из дважды непрерывно дифференцируемых функций, причем каждая функция из C_0^2 равна нулю в некоторой окрестности (своей для каждой функции) границы квадрата $[0,\ 1;\ 0,\ 1]$.

Лемма 3.1. *Существует константа* $K>0$, *что*

$$|A^*_{nn}(h;\ x,\ y)-h(x,\ y)|\leqslant K\cdot\frac{1}{n},$$

где $\frac{1}{2n}\leqslant x,\ y\leqslant 1-\frac{1}{2n}$ *для функций* $h(x,\ y)=1,\ x,\ x^2,\ y,\ y^2,\ xy$.

Доказательство. Легко подсчитать, что

$$A^*_{nn}(1;\ x,\ y)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2;$$

$$A^*_{nn}(t;\ x,\ y)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\cdot\frac{\nu+1}{n+2};$$

$$A^*_{nn}(t^2;\ x,\ y)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\cdot\frac{\nu+1}{n+2}\cdot\frac{\nu+2}{n+3};$$

$$A^*_{nn}(tv;\ x,\ y)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\cdot\frac{(\nu+1)(\mu+1)}{(n+2)^2}$$

(предполагая, что $\left|\frac{\nu}{n}-x\right|<\frac{1}{2n}$, $\left|\frac{\mu}{n}-y\right|<\frac{1}{2n}$; $\nu, \mu=1, 2, \ldots, n-1$).

$$|A_{nn}^*(1; x, y)-1|=\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^2-1\right|\leqslant\frac{2}{n};$$

$$|A_{nn}^*(t; x, y)-x|\leqslant\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\left|\frac{\nu+1}{n+2}-x\right|+\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^2-1\right||x|\leqslant\frac{6}{n};$$

$$|A_{nn}^*(t^2; x, y)-x^2|\leqslant\frac{12}{n}$$

и так далее. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Для каждого $M>0$ существует константа K_M такая, что для всех $h(x, y)$ вида $\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 y+\alpha_4 y^2+\alpha_5 xy$, где $|\alpha_i|<M$, $i=0, 1, 2, 3, 4, 5$,* будет

$$|A_{nn}^*(h; x, y)-h(x, y)|\leqslant K_M\cdot\frac{1}{n}$$

для $\frac{1}{2n}\leqslant x, y\leqslant 1-\frac{1}{2n}$.

Доказательство следует из линейности оператора A_{nm}^* и леммы 3.1.

Лемма 3.3. *Для $\varphi\in C_0^2$ имеет место неравенство*

$$|A_{nn}^*(\varphi; x, y)-\varphi(x, y)|\leqslant K\cdot\frac{1}{n},$$

где $K=\mathrm{const}$, для $\frac{1}{2n}\leqslant x,\ y\leqslant 1-\frac{1}{2n}$.

Доказательство. Так как $\varphi\in C_0^2$, то существует константа M, что

$$|\varphi_{x^j y^{i-j}}^{(i)}(x, y)|\leqslant M,\quad (x, y)\in[0, 1;\ 0, 1],\quad 0\leqslant j\leqslant\ \leqslant 2.$$

Пусть $(x, y)\in(0, 1;\ 0, 1)$. Так как для каждой точки $(t, v)\in(0, 1;\ 0, 1)$ существуют ξ и $\eta\in(0, 1)$ такие, что

$$\varphi(t, v)=\varphi(x, y)+\varphi_x'(x, y)\cdot(t-x)+\varphi_y'(x, y)\cdot(v-y)+$$
$$+\frac{1}{2}\varphi_{x^2}''(\xi, \eta)\cdot(t-x)^2+\varphi_{xy}''(\xi, \eta)\cdot(t-x)(v-y)+\frac{1}{2}\varphi_{y^2}''(\xi, \eta)\cdot(v-y)^2,$$

то $|\varphi(t, v)-L_{xy}(t, v)|\leqslant Q_{xy}(t, v)$ для $(t, v)\in(0, 1;\ 0, 1)$, где

$$L_{xy}(t, v)=\varphi(x, y)+\varphi_x'(x, y)\cdot(t-x)+\varphi_y'(x, y)\cdot(v-y);$$

$$Q_{xy}(t, v)=\frac{1}{2}M\,[(t-x)^2+2(t-x)(v-y)+(v-y)^2].$$

Переписывая последнее неравенство в виде

$$-Q_{xy}(t, v)\leqslant\varphi(t, v)-L_{xy}(t, v)\leqslant Q_{xy}(t, v)$$

учитывая, что A_{nm}^* — линейный положительный оператор, получим

$$-A_{nn}^*Q_{xy}\leqslant A_{nn}^*\varphi-A_{nn}^*L_{xy}\leqslant A_{nn}^*Q_{xy}.$$

Отсюда и из выражения для L_{xy} имеем

$$|A_{nn}^*(\varphi; x, y)-\varphi(x, y)|\leqslant|A_{nn}^*(\varphi; x, y)-A_{nn}^*(L_{xy}; x, y)|+|A_{nn}^*(L_{xy}; x, y)-$$
$$-L_{xy}(x, y)|\leqslant|A_{nn}^*(Q_{xy}(x, y)-Q_{xy}(x, y)|+|A_{nn}^*(L_{xy}; x, y)-L_{xy}(x, y)|.$$

Коэффициенты полиномов $L_{xy}(t, v)$ и $Q_{xy}(t, v)$ ограничены числом M. Значит, если $(x, y)\in\left[\frac{1}{2n},\ 1-\frac{1}{2n};\ \frac{1}{2n},\ 1-\frac{1}{2n}\right]$, то согласно лемме 3.2 и последнему неравенству получаем

$$|A_{nn}^*(\varphi; x, y)-\varphi(x, y)|\leqslant 2K_M\cdot\frac{1}{n},$$

что и требовалось доказать.

Из этой леммы сразу следует

Лемма 3.4. *Если* $\varphi \in C_0^2$, *то существует константа* K *такая, что*

$$\| n [A_{nn}^*(\varphi; x, y) - \varphi(x, y)] \|_L \leqslant K$$
$$n = 2, 3, 4, \ldots$$

Доказательство. A_{nn}^* равны нулю вне $\Delta = \left[\frac{1}{2n}, 1 - \frac{1}{2n}; \frac{1}{2n}, 1 - \frac{1}{2n}\right]$. Для всех достаточно больших n φ также равна нулю вне Δ. Итак, при всех достаточно больших n

$$n [A_{nn}^*(\varphi; x, y) - \varphi(x, y)] = 0$$

вне Δ, а в Δ силу леммы 3.3

$$\| n [A_{nn}^*(\varphi; x, y) - \varphi(x, y)] \|_C \leqslant K.$$

Этого достаточно для доказательства нашей леммы.

Лемма 3.5. *Пусть* $f \in C_0^2$. *Тогда*

$$\| A_{nn}(f; x, y) - B_{nn}(f; x, y) \|_C = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Доказательство. Так как $f \in C_0^2$, то

$$|A_{nn}(f; x, y) - B_{nn}(f; x, y)| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{\mu=1}^{n-1} n^2 \left| \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} dt \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \left[f\left(t + \frac{\nu}{n}, v + \frac{\mu}{n}\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - f\left(\frac{\nu}{n}, \frac{\mu}{n}\right)\right] dv \right| T_{n\nu}(x) \cdot T_{n\mu}(y) \qquad (3.2)$$

и существует константа K, что

$$\left| f\left(t + \frac{\nu}{n}, v + \frac{\mu}{n}\right) - f\left(\frac{\nu}{n}, \frac{\mu}{n}\right) - f_t'\left(\frac{\nu}{n}, \frac{\mu}{n}\right) \cdot t - f_v'\left(\frac{\nu}{n}, \frac{\mu}{n}\right) \cdot v - \right.$$
$$\left. - f_{tv}''\left(\frac{\nu}{n}, \frac{\mu}{n}\right) tv \right| \leqslant K(t^2 + v^2)$$

для всех n, t, v.

Тогда

$$\left| \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} dt \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \left[f\left(t + \frac{\nu}{n}, v + \frac{\mu}{n}\right) - f\left(\frac{\nu}{n}, \frac{\mu}{n}\right)\right] dv \right| =$$

$$= \left| \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} dt \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \left[f\left(t + \frac{\nu}{n}, v + \frac{\mu}{n}\right) - f\left(\frac{\nu}{n}, \frac{\mu}{n}\right) - f_t'\left(\frac{\nu}{n}, \frac{\mu}{n}\right) \cdot t - f_v'\left(\frac{\nu}{n}, \frac{\mu}{n}\right) \cdot v - \right.\right.$$

$$\left.\left. - f_{tv}''\left(\frac{\nu}{n}, \frac{\mu}{n}\right) tv \right] dv \right| \leqslant K \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} dt \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} (t^2 + v^2)\, dv = \frac{K}{6} \cdot \frac{1}{n^4}. \qquad (3.3)$$

Из (3.2) и (3.3)

$$|A_{nn}(f;\, x, y) - B_{nn}(f;\, x, y)| \leqslant \frac{K}{6}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{\nu=1}^{n-1}\sum_{\mu=1}^{n-1} T_{n\nu}(x)\cdot T_{n\mu}(y) \leqslant \frac{K}{6n^2},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3.6. *Пусть $f \in C_0^2$. Тогда в каждой точке квадрата* [0,1; 0,1]

$$\lim_{n\to\infty} n\,[A_{nn}(f;\, x, y) - f(x, y)] = \frac{x(1-x)}{2}\cdot f''_{x^2}(x, y) + \frac{y(1-y)}{2}\cdot f''_{y^2}(x, y).$$

Далее, существует константа K такая, что $\|n(A_{nn}f - f)\|_C \leqslant K$ для всех n.

Доказательство. Как и для операторов Бернштейна в случае одной переменной имеет место теорема Вороновской для $B_{nm}(f;\, x, y)$ [8]:

Если у ограниченной функции f в точке (x, y) существуют непрерывные производные f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2}, то

$$\lim_{n\to\infty} n\,[B_{nn}(f;\, x, y) - f(x, y)] = \frac{x(1-x)}{2}\cdot f''_{x^2}(x, y) + \frac{y(1-y)}{2}\cdot f''_{y^2}(x, y).$$

Так как по условию этой леммы $f \in C_0^2$, то в каждой точке $(x, y) \in [0, 1;\, 0, 1]$ для f имеет место теорема Вороновской. В силу этой теоремы и леммы 3.5

$$\lim_{n\to\infty} n\,[A_{nn}(f;\, x, y) - f(x, y)] = \frac{x(1-x)}{2}\cdot f''_{x^2}(x, y) + \frac{y(1-y)}{2}\cdot f''_{y^2}(x, y).$$

Равномерная ограниченность норм $\|n(B_{nn}f - f)\|_C$, если $f \in C_0^2$ следует из леммы 1.1. Соответствующий результат для $n(A_{nn}f - f)$ следует из леммы 3.5.

Лемма 3.7. Пусть $f \in C_0^2$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \langle n(A_{nn}\varphi - \varphi),\, f\rangle = \left\langle \left(\frac{x(1-x)}{2}\cdot\varphi\right)''_{x^2} + \left(\frac{y(1-y)}{2}\cdot\varphi\right)''_{y^2},\, f\right\rangle$$

для всех $\varphi \in C_0^2$.

Доказательство. Если $f \in C_0^2$, $\varphi \in C_0^2$, то согласно лемме 3.6

$$\lim_{n\to\infty} \langle \varphi,\, n(A_{nn}f - f)\rangle = \left\langle \varphi,\, \frac{x(1-x)}{2}\cdot f''_{x^2} + \frac{y(1-y)}{2}\cdot f''_{y^2}\right\rangle.$$

Интегрируя по частям в правой части и учитывая, что $\varphi \in C_0^2$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \langle \varphi,\, n(A_{nn}f - f)\rangle = \left\langle \left(\frac{x(1-x)}{2}\cdot\varphi\right)''_{x^2} + \left(\frac{y(1-y)}{2}\cdot\varphi\right)''_{y^2},\, f\right\rangle.$$

В силу (3.1)

$$\lim_{n\to\infty} \langle \varphi,\, n(A_{nn}f - f)\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle n(A^*_{nn}\varphi - \varphi),\, f\rangle.$$

Из последних двух равенств вытекает

$$\lim_{n\to\infty} \langle n(A^*_{nn}\varphi - \varphi),\, f\rangle = \left\langle \left(\frac{x(1-x)}{2}\cdot\varphi\right)''_{x^2} + \left(\frac{y(1-y)}{2}\cdot\varphi\right)''_{y^2},\, f\right\rangle,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3.8. Пусть $\varphi \in C_0^2$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \langle n(A^*_{nn}\varphi - \varphi),\, f\rangle = \left\langle \left(\frac{x(1-x)}{2}\cdot\varphi\right)''_{x^2} + \left(\frac{y(1-y)}{2}\cdot\varphi\right)''_{y^2},\, f\right\rangle$$

для всех $f \in C$, которые обращаются в нуль на границе квадрата [0, 1; 0, 1].

Доказательство. Выбираем произвольное $\varepsilon > 0$; пусть $h(x, y)$ — такая функция из C_0^2, что
$$\|f - h\|_C < \varepsilon. \tag{3.4}$$

Тогда
$$\left|\langle n(A_{nn}^*\varphi - \varphi), f\rangle - \left\langle \left(\frac{x(1-x)}{2}\cdot\varphi\right)''_{x^2} + \left(\frac{y(1-y)}{2}\cdot\varphi\right)''_{y^2}, f\right\rangle\right| \leqslant$$
$$\leqslant |\langle n(A_{nn}^*\varphi - \varphi), f - h\rangle| + \left|\langle n(A_{nn}^*\varphi - \varphi), h\rangle - \left\langle \left(\frac{x(1-x)}{2}\cdot\varphi\right)''_{x^2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{y(1-y)}{2}\cdot\varphi\right)''_{y^2}, h\right\rangle\right| + \left|\left\langle \left(\frac{x(1-x)}{2}\cdot\varphi\right)''_{x^2} + \left(\frac{y(1-y)}{2}\cdot\varphi\right)''_{y^2}, h - f\right\rangle\right| =$$
$$= D_1 + D_2 + D_3.$$

В силу леммы 3.4 и (3.4)
$$D_1 \leqslant \|n(A_{nn}^*\varphi - \varphi)\|_L \cdot \|f - h\|_C \leqslant K\cdot\varepsilon,$$
$$D_3 \leqslant \left\|\left(\frac{x(1-x)}{2}\cdot\varphi\right)''_{x^2} + \left(\frac{y(1-y)}{2}\cdot\varphi\right)''_{y^2}\right\|_L \cdot \|f - h\|_C < \left\|\left(\frac{x(1-x)}{2}\cdot\varphi\right)''_{x^2} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{y(1-y)}{2}\cdot\varphi\right)''_{y^2}\right\|_L \cdot \varepsilon.$$

Из леммы 3.7 следует, что $D_2 \to 0$ при $n \to \infty$.

Примечание. Эта теорема имеет место и для функций вида $\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy$, где α, β, γ, δ — постоянные.

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

По условию теоремы 2
$$|B_{nn}(f; x, y) - f(x, y)| = O\left(\frac{1}{n}\right)$$
равномерно в каждом внутреннем квадрате квадрата $[0, 1; 0, 1]$. Тогда согласно теореме 2.4
$$|A_{nn}(f; x, y) - f(x, y)| = O\left(\frac{1}{n}\right)$$
равномерно в каждом внутреннем квадрате $D = (a, b; a, b)$.

Функции $n[A_{nn}(f; x, y) - f(x, y)]$ измеримы и равномерно ограничены в D.

Рассмотрим линейные функционалы на $L(D)$ (на весь квадрат $[0, 1; 0, 1]$ функции из $L(D)$ продолжим нулем):
$$F_n(\varphi) = \langle\varphi, n(A_{nn}f - f)\rangle$$
(см. [9], стр. 330).

Так как L сепарабельно, то в силу теоремы о слабой компактности в сопряженном пространстве ([9], стр. 337) существует подпоследовательность $\{F_{n_j}\}$, которая слабо сходится к некоторому функционалу F_0, т. е. существует измеримая в существенном ограниченная на D функция $K(x, y)$ (на весь квадрат $[0, 1; 0, 1]$ продолжим ее нулем), что
$$\lim_{n_j\to\infty}\langle\varphi, n_j(A_{n_jn_j}f - f)\rangle = \langle\varphi, K\rangle \tag{4.1}$$
для всех $\varphi \in L(D)$ и равных нулю вне D.

Равенство (4.1) выполняется, в частности, при всех $\varphi \in C_0^2(D)$, где через $C_0^2(D)$ обозначено подпространство пространства C_0^2, состоящее из функций, равных нулю вне D.

Из формулы (3.1) и теоремы 3,8 получим

$$\lim_{n_j\to\infty}\langle\varphi, n_j(A_{n_jn_j}f-f)\rangle=\lim_{n_j\to\infty}\langle n_j(A^*_{n_jn_j}\varphi-\varphi), f\rangle=$$
$$=\left\langle\left(\frac{x(1-x)}{2}\cdot\varphi\right)''_{x^2}+\left(\frac{y(1-y)}{2}\cdot\varphi\right)''_{y^2}, f\right\rangle. \tag{4.2}$$

Из (4.1) и (4.2) вытекает

$$\left\langle\left(\frac{x(1-x)}{2}\cdot\varphi\right)''_{x^2}+\left(\frac{y(1-y)}{2}\cdot\varphi\right)''_{y^2}, f\right\rangle=\langle\varphi, K\rangle$$

для всех $\varphi\in C_0^2(D)$, в том числе для всех $\varphi\in C_0^\infty(D_1)$, $\bar D_1\subset D$, где $C_0^\infty(D_1)$ — множество бесконечно дифференцируемых равных нулю вне D_1 функций.

Обозначим

$$L^+u=\left(\frac{x(1-x)}{2}\cdot u\right)''_{x^2}+\left(\frac{y(1-y)}{2}\cdot u\right)''_{y^2}.$$

Сопряженным к этому эллиптическому оператору L^+ будет следующий эллиптический оператор (см., например, [3]):

$$Lu=\frac{x(1-x)}{2}\cdot u''_{x^2}+\frac{y(1-y)}{2}\cdot u''_{y^2}.$$

По определению (см. [10], гл. III, § 4, п. 2), если f удовлетворяет

$$\langle L^+\varphi, f\rangle=\langle\varphi, K\rangle$$

для всех $\varphi\in C_0^\infty(D_1)$, то f является обобщенным решением уравнения

$$Lu=K \tag{4.3}$$

внутри D_1.

Таким образом, нам нужно охарактеризовать степень гладкости обобщенного решения f уравнения (4.3).

В книге [10] решается задача о гладкости обобщенных решений эллиптического уравнения

$$Lu=K,$$

где $K\in C^q(D)$ $(q\geqslant 0)$.

Используя результаты Я. Б. Лопатинского о фундаментальных решениях эллиптических уравнений [11], мы покажем, что метод, примененный в [10], (гл. III, § 4) может быть распространен и на тот случай, когда L эллиптический оператор с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами в D, а правая часть измеримая в существенном ограниченная в D.

Фундаментальные решения

Применительно к нашему уравнению (4.3) сформулируем свойства фундаментальных решений, указанные Я. Б. Лопатинским в [11] (см. также [10], гл. III, § 4).

Для эллиптического в D выражения с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами при $x\neq\xi$ * в некоторой окрестности W ограниченной части диагонали $x=\xi$, $W\subseteq D\times D$, существует функция $e(x,\xi)$ — фундаментальное решение — обладающая следующими свойствами:

а) по каждому из переменных x и ξ $(x\neq\xi)$ при фиксированном другом $e(x,\xi)$ бесконечно дифференцируема и удовлетворяет уравнениям:

$$L_x[e(x,\xi)]=0;\quad L_\xi^+[e(x,\xi)]=0;$$

* Здесь и далее точку (x, y) будем обозначать через x, а (ξ, η) — через ξ.

б) если $\varphi \in C_0^2(V)$, где V — такая окрестность, что $V \times V \subset W$, то

$$\int_V e(x, \xi)\, L\varphi(\xi)\, d\xi = \varphi(x);$$

$$\int_V e(x, \xi)\, L^{+}\varphi(x)\, dx = \varphi(\xi) \quad (x, \xi \in V);$$

в) если $F \in C^q(V)$ $(V \times V \subseteq W)$, причем $q \geqslant 1$, то

$$\varphi(x) = \int_V e(x, \xi)\, F(\xi)\, d\xi \in C^{q+1}(\bar{V});$$

$$\psi(\xi) = \int_V e(x, \xi)\, F(x)\, dx \in C^{q+1}(\bar{V})$$

и $L\varphi = F$; $L^{+}\psi = F$;

г) $e(x, \xi) = A(x, \xi) \cdot \ln|x - \xi|$, где $A(x, \xi)$ бесконечно дифференцируема в W, т. е. в нашем случае $e(x, \xi)$ имеет особенность типа $\ln|x - \xi|$.

Теорема 4.1. *Обобщенное решение f внутри $D_1(\bar{D}_1 \subset D)$ уравнения*

$$Lu = K, \tag{4.3}$$

где $K \in L^{\infty}(D)$, как функционал совпадает с обычной функцией $h(x) \in C^{(1,\lambda)}(D_1)$, т. е.

$$\int_D f(x) \cdot \varphi(x)\, dx = \int_D h(x)\, \varphi(x)\, dx \tag{4.4}$$

для всех $\varphi \in C_0^{\infty}(D_1)$.

Доказательство. 1) Зафиксируем некоторую точку $x_0 \in D$. Пусть V столь малая окрестность точки x_0, что $V \times V \subset W$, где W — окрестность, в которой существует фундаментальное решение $e(x, \xi)$ для L. Положим

$$\Theta(x) = \int_V e(x, \xi)\, K(\xi)\, d\xi \quad (x \in V) \tag{4.5}$$

и продолжим $\Theta(x)$ произвольно на D. По теореме 13. I из [3] $\Theta(x) \in C^{(1,\lambda)}(V)$, где λ — любое, удовлетворяющее условию $0 < \lambda < 1$.

Далее в силу свойств б) и г) фундаментального решения имеем

$$\int_V \Theta(x)\, L^{+}\varphi(x)\, dx = \int_V \left\{\int_V e(x, \xi) \cdot K(\xi)\, d\xi\right\} L^{+}\varphi(x)\, dx =$$

$$= \int_V \left\{\int_V e(x, \xi)\, L^{+}\varphi(x)\, dx\right\} K(\xi)\, d\xi = \int_V K(x)\, \varphi(x)\, dx$$

для всех $\varphi \in C_0^{\infty}(V)$, т. е Θ является обобщенным решением уравнения $Lu = K$ внутри V. По условию f тоже обобщенное решение этого уравнения внутри V. Поэтому $f - \Theta$ удовлетворяет в обобщенном смысле уравнению $Lu = O$, т. е.

$$\int_V [f(x) - \Theta(x)]\, L^{+}\varphi(x)\, dx = O \tag{4.6}$$

для всех $\varphi \in C_0^{\infty}(V)$.

2) Покажем, что в случае достаточно малой окрестности U точки x_0 существует такая функция $\omega(x) \in C^{\infty}(U)$, что

$$\int_D [f(x) - \Theta(x)]\, \varphi(x)\, dx = \int_D \omega(x)\, \varphi(x)\, dx \tag{4.7}$$

для всех $\varphi \in C_0^{\infty}(V)$.

В качестве U возьмем круг с центром в точке x_0 радиуса R столь малого, чтобы замыкание окрестности U_{2R} с центром в точке x_0 и радиусом $2R$ входило в окрестность V п. 1).

Будем считать $e(x, \xi)$ продолженным произвольным образом вне W. Пусть $\Phi(t) \in C^\infty(-\infty, +\infty)$ равна нулю при $|t| \geqslant R$ и единице в некоторой окрестности начала координат, а $\varphi_0 \in C_0^\infty(U)$. Функция на D

$$\varphi(x) = \int_D e(\xi, x)\,\Phi(|\xi - x|)\,\varphi_0(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int_{2U} e(\xi, x)\,[\Phi(|\xi - x|) - 1]\,\varphi_0(\xi)\,d\xi + \int_{2U} e(\xi, x)\,\varphi_0(\xi)\,d\xi^{*} \tag{4.8}$$

равна нулю вне $2U$ и поэтому финитна по отношению к V. Кроме того, она бесконечно дифференцируема, и потому ее можно подставить в (4.6).

Так как согласно в)

$$L^+\left[\int_{2U} e(\xi, x)\cdot\varphi_0(\xi)\,d\xi\right] = \varphi_0(x),$$

то из (4.8) следует

$$L^+\varphi(x) = \int_{2U} L_x^+\{e(\xi, x)\,[\Phi(|\xi - x|) - 1]\}\,\varphi_0(\xi)\,d\xi + \varphi_0(x).$$

Учитывая последнее соотношение и подставляя (4.8) в (4.6), получим

$$O = \int_V [f(x) - \theta(x)]\,L^+\varphi(x)\,dx = \int_{2U} [f(x) - \theta(x)]\,L^+\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_{2U} f(x)\left\{\int_{2U} L_x^+[e(\xi, x)(\Phi(|\xi - x|) - 1)]\,\varphi_0(\xi)\,d\xi\right\}dx -$$

$$- \int_{2U} \theta(x)\left\{\int_{2U} L_x^+[e(\xi, x)(\Phi(|\xi - x|) - 1)]\,\varphi_0(\xi)\,d\xi\right\}dx +$$

$$+ \int_{2U} [f(x) - \theta(x)]\,\varphi_0(x)\,dx = -\int_{2U} \omega(\xi)\,\varphi_0(\xi)\,d\xi + \int_{2U} [f(\xi) - \theta(\xi)]\,\varphi_0(\xi)\,d\xi,$$

где

$$\omega(\xi) = \int_{2U} [\Theta(x) - f(x)]\,L_x^+\{e(\xi, x)\,[\Phi(|\xi - x|) - 1]\}\,dx.$$

Очевидно, $\omega(\xi)$ бесконечно дифференцируема, и равенство (4.7) доказано для любой

$$\varphi = \varphi_0 \in C_0^\infty(U).$$

3) Построим теперь функцию h и докажем, что она удовлетворяет (4.4).

Окружим каждую точку $x \in D$ окрестностью O_x, внутренней по отношению к $U = U_x$, построенной в 2) при $x_0 = x$. При помощи леммы Бореля — Лебега выделим из покрытия области D окрестностями O_x счетное покрытие $O_{x_1}, O_{x_2}, \ldots$ такое, чтобы каждая внутренняя подобласть пересекалась лишь с конечным числом этих окрестностей. Пусть

$$1 \equiv \sum_{i=1}^{\infty} e_i(x),$$

отвечающее покрытию O_x, разложение единицы (см. [4], стр. 182).

* $|x - \xi|$ — расстояние от точки x до точки ξ.

Согласно 1) и 2) построим функции $\theta = \theta_i$ и $\omega = \omega_i$ для окрестности $U = U_i$. Так как для любой $\varphi \in C_0^\infty (D_1)$ $\varphi \cdot e_i \in C_0^\infty (U_i)$, то (4.7) справедливо с заменой φ на φe_i. Учитывая это равенство и тот факт, что при фиксированной функции φ лишь конечное число функций $\varphi \cdot e_i$ отлично от нуля и что

$$\varphi (x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi (x) \cdot e_i(x), \text{ (см. [4] стр. 183)},$$

получим

$$\int_D f(x) \varphi (x)\, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_D f(x) \varphi (x) e_i(x)\, dx =$$

$$= \int_D [\sum_{i=1}^{\infty} (\Theta_i + \omega_i) e_i] \varphi dx = \int_D h(x) \varphi (x)\, dx$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty (D_1)$, где

$$h(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i(x) e_i(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i(x) e_i(x), \quad x \in D.$$

Так для каждой внутренней к D подобласти D_1 здесь не аннулируется лишь конечное число слагаемых и $\Theta_i \in C^{(1,\lambda)} (U_{x_i})$, $\omega_i \in C^\infty (U_{x_i})$, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i e_i \in C^{(1,\lambda)} (D_1), \quad \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i e_i \in C^\infty (D_1).$$

Поэтому

$$h \in C^{(1,\lambda)} (D_1).$$

Из доказанного равенства (4.4) следует, что $f = h$ почти всюду в D_1, но так как f и h непрерывны, то они совпадают всюду в D_1, т. е. $f \in C^{(1,\lambda)} (D_1)$.

Теорема 4.1, а вместе с ней и теорема 2, доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Leeuw. On the degree of approximation by Bernstein polynomials. J. Analyse math., 1959, 7, № 1, 89—104.

2. І. Г. Соколов. Про обернені теореми для деяких процесів наближення. Теоретична і прикладна математика, вип. 2. Вид-во Львівськ. ун-ту, 1963.

3. К. Миранда. Уравнения с частными производными эллиптического типа. Изд-во иностр. лит., М., 1957.

4. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними, вып. 1. Физматгиз, М., 1958.

5. А. Ф. Ипатов. О полиномах Бернштейна ограниченных функций двух переменных. Уч. зап. Карело-Финского ун-та, т. 3, вып. 4, физ-матем. науки, 1954.

6. Л. В. Канторович. О некоторых разложениях по полиномам в форме С. Н. Бернштейна. ДАН СССР (А), 1930.

7. И. П. Натансон. Конструктивная теория функций. Физматгиз, М.—Л., 1949.

8. А. Ф. Ипатов. Оценка погрешности и порядок приближения функции 2-х переменных полиномами Бернштейна. Уч. зап. Петрозаводск. ун-та, т. 4, вып. 4, физмат. науки, Петрозаводск, 1957.

9. А. С. Кованько, И. Г. Соколов. Теория функций действительного переменного и основы функционального анализа. Изд-во Львовск. ун-та, 1961.

10. Ю. М. Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Изд-во АН УССР «Наукова думка», К., 1965.

11. Я. Б. Лопатинский. Фундаментальные решения системы дифференциальных уравнений эллиптического гипа. Укр. матем. журнал, т. 3, № 3, 1951.