О ЦЕЛЫХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

*Ф. И. Гече**

Вопросами существования целых трансцендентных решений обыкновенных дифференциальных уравнений, а также оценками роста этих решений занимались многие математики. Ж. Валирон [1, гл. IX], Г. Виттих [2, гл. V] вывели ряд необходимых условий для существования целых решений дифференциального уравнения

$$P(z,\ w,\ w',\ \ldots,\ w^{(p)}) = f(w),\ p \geqslant 1, \tag{1}$$

где P — многочлен по всем переменным; $f(w)$ — целая функция от w. Некоторые из этих условий были перенесены А. А. Гольдбергом [3] на дифференциальное уравнение в частных производных

$$P\left(z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\ w,\ \frac{\partial w}{\partial z_1},\ \ldots,\ \frac{\partial w}{\partial z_n},\ \ldots,\ \frac{\partial^q w}{\partial z_1^{\alpha_1}\ \ldots\ \partial z_n^{\alpha_n}},\ \ldots,\ \frac{\partial^q w}{\partial z_n^q}\right) = \\ = f(w), \tag{2}$$

где P — многочлен по всем переменным, а $f(w)$ — целая функция от w.

Обобщению некоторых результатов Ж. Валирона, связанных с оценкой роста целых трансцендентных решений дифференциального уравнения (1) с нулевой правой частью, были посвящены работы Ш. И. Стрелица [4—5].

Переходя к системам обыкновенных дифференциальных уравнений, а также к системам уравнений в частных производных, мы наталкиваемся на существенные отличия. Из результатов А. А. Гольдберга [3] следует, например, что если левая часть уравнения (2) линейна относительно w и частных производных от w, то для существования целого трансцендентного решения $w = w(z_1,\ \ldots,\ z_n)$ необходимо, чтобы функция $f(w)$ имела вид $f(w) = aw + b$, где a и b — произвольные комплексные числа. Это не имеет места для систем уравнений. Например, система

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial z_1} + \dfrac{\partial w_1}{\partial z_2} + \dfrac{\partial w_2}{\partial z_1} = -w_1^2 - w_1 w_2 + 2w_2^2 \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial z_2} + 2\dfrac{\partial w_1}{\partial z_1} = 2w_1 w_2 - 2w_2^2 \end{cases}$$

имеет целое трансцендентное решение

$$\begin{cases} w_1 = \exp(z_1 - 2z_2) \\ w_2 = \exp(z_1 - 2z_2), \end{cases}$$

* Выражаю глубокую признательность А. А. Гольдбергу за научное руководство работой.

хотя многочлены, стоящие в левых частях, линейны относительно $\frac{\partial w_i}{\partial z_j}$, $i, j = 1, 2$, а правые части не линейны по w_1 и w_2.

В первой части настоящей работы мы сформулируем некоторые известные определения и утверждения и докажем ряд теорем, с помощью которых во второй части статьи удается получить некоторые необходимые условия существования целых трансцендентных решений систем дифференциальных уравнений в частных производных, а также оценки для роста этих решений.

§ 1. Сформулируем некоторые известные определения (см. [6], где имеются ссылки на оригинальную литературу).

Систему целых функций $w_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, w_m(z_1, \ldots, z_n)$ нескольких комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$ обозначаем как вектор

$$W(Z) = \begin{pmatrix} w_1(z_1, \ldots, z_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_m(z_1, \ldots, z_n) \end{pmatrix} \qquad \left(Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{pmatrix} \right)$$

и называем целой вектор-функцией. Целую вектор-функцию называем трансцендентной, если хотя бы одна компонента ее — целая трансцендентная функция.

Кроме обычных операций сложения и умножения на число в векторном пространстве, вводим операции возведения в степень

$$Z^{[k]} = \begin{pmatrix} z_1^k \\ \vdots \\ \sqrt{\dfrac{k!}{i_1! \ldots i_n!}}\, z_1^{i_1} \ldots, z_n^{i_n} \\ \vdots \\ z_n^k \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

$(i_1 + \ldots + i_n = k,\ k$ — натуральное число) и дифференцирования

$$\frac{\partial^k W(Z)}{\partial z_1^{i_1} \ldots \partial z_n^{i_n}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^k w_1(z_1, \ldots, z_n)}{\partial z_1^{i_1} \ldots \partial z_n^{i_n}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^k w_m(z_1, \ldots, z_n)}{\partial z_1^{i_1} \ldots \partial z_n^{i_n}} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Вектор $Z^{[k]}$ мы назовем согласно Хуа Ло-кену [7] k-ой симметризованной кронекеровской степенью вектора Z.

Под произведением A на вектор Z понимаем обычное произведение, принятое в алгебре. Нормы векторов Z и W и матрицы A определяются равенствами

$$\|Z\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2}, \quad \|W\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |w_i|^2}, \quad \|A\| = \max_{\|X\|=1} \|AX\|,$$

где размерность вектора X совпадает с количеством столбцов матрицы A. Справедливы соотношения

$$\|Z^{[k]}\| = \|Z\|^k, \quad \|AX\| \leqslant \|A\|\,\|X\|, \quad \|Z_1 + Z_2\| \leqslant \|Z_1\| + \|Z_2\|.$$

Для произвольной целой вектор-функции $W(Z)$ при любом конечном Z справедливо разложение

$$W(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k Z^{[k]}, \tag{1.3}$$

где A_k — прямоугольная матрица с постоянными элементами.

Величина

$$m(R) = m(R,\ W(Z)) = \max_{\|Z\|=R} \| A_\nu Z^{[\nu]} \| = \max_{0 \leqslant k < \infty} \{ \max_{\|Z\|=R} \| A_k Z^{[k]} \| \}$$

называется максимальным членом, а $\nu = \nu(R)$ — центральным индексом ряда (1.3).

Если обозначим

$$M(R) = M(R,\ W(Z)) = \max_{\|Z\|=R} \| W(Z) \|,$$

то справедливо неравенство Коши [6]

$$m(R) \leqslant M(R). \tag{1.4}$$

Порядок ρ и тип σ целой вектор-функции $W(Z)$ определяем как обычно [6]:

$$\rho = \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{\ln \ln M(R)}{\ln R}, \quad \sigma = \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{\ln M(R)}{R^\rho}$$

(тип определяется при конечном положительном ρ).

Справедлива теорема [6].

Теорема 1.1. *Функция $\ln M(R)$ является непрерывной, возрастающей и логарифмически выпуклой функцией от R.*

Обозначим через

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad (|\xi_i| = r_i,\ i = 1,\ \ldots,\ n,\ R^2 = \sum_{i=1}^{n} r_i^2)$$

точку, в которой достигается $\max_{\|Z\|=R} \| W(Z) \| : M(R,\ W(Z)) = \| W(\Xi) \|$.

Наконец, под E всегда будем понимать множество интервалов оси R конечной логарифмической меры. Мы часто будем пользоваться оценками и соотношениями, справедливыми вне E. Там, где это не вызывает недоразумения, не будем это обстоятельство оговаривать особо.

Справедлива теорема, обобщающая теорему Вимана — Валирона [1].

Теорема 1.2. *Для любой целой трансцендентной вектор-функции $W(Z)$ имеет место равенство*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\left\| \frac{1}{\nu^{i_1+\cdots+i_n}(R)} \xi_1^{i_1} \cdots \xi_n^{i_n} \frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n} W(\Xi)}{\partial z_1^{i_1} \cdots \partial z_n^{i_n}} - \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{r_j}{R}\right)^{2i_j} W(\Xi) \right\|}{\| W(\Xi) \|} = 0, \tag{1.5}$$

где при переходе к пределу следует, быть может, опустить множество E.

Доказательство проводим методом Вимана — Валирона, следуя Ш. И. Стрелицу [8]. При этом используем оценки, полученные Ш. И. Стрелицом [8] при доказательстве такой же теоремы для одной функции нескольких переменных. Для простоты изложения ограничиваемся рассмотрением случая целой вектор-функции двух комплексных переменных u и v:

$$W(u;\ v) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{jk} u^j v^k, \quad A_{jk} = \begin{pmatrix} a_{jk}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{jk}^{(m)} \end{pmatrix}.$$

Если $u_0 \neq 0,\ v_0 \neq 0$, то

$$W(u,\ v) = \left(\frac{u}{u_0}\right)^\lambda \left(\frac{v}{v_0}\right)^\mu \sum_{j=-\lambda}^{\infty} \sum_{k=-\mu}^{\infty} A_{j+\lambda\, k+\mu} u_0^{j+\lambda} v_0^{k+\mu} \left(\frac{u}{u_0}\right)^{j+\lambda} \left(\frac{v}{v_0}\right)^{k+\mu} \tag{1.6}$$

Положим $\frac{u-u_0}{u_0} = s,\ \frac{v-v_0}{v_0} = t$ и напишем:

$$\left(\frac{u}{u_0}\right)^j = 1 + js + \binom{j}{2}s^2 + \cdots + \binom{j}{j}s^j,$$

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^k = 1 + kt + \binom{k}{2}t^2 + \cdots + \binom{k}{k}t^k.$$

Подставляя эти выражения в (1.6), найдем:

$$W(u, v) = (1+s)^\lambda (1+t)^\mu [W + sW_{10} + tW_{01} + s^2W_{20} + stW_{11} + t^2W_{02} + \cdots + s^qW_{q0} + s^{q-1}tW_{q-11} + \cdots + t^qW_{0q} + \Psi_q(u_0, v_0, s, t)] = \left[1 + \binom{\lambda}{1}s + \cdots + \binom{\lambda}{\lambda}s^\lambda\right]\left[1 + \binom{\mu}{1}t + \cdots + \binom{\mu}{\mu}t^\mu\right][W + sW_{10} + tW_{01} + s^2W_{20} + stW_{11} + t^2W_{02} + \cdots + s^qW_{q0} + s^{q-1}tW_{q-11} + \cdots + t^qW_{0q} + \Psi_q(u_0, v_0, s, t)],$$

где

$$W_{jk} = W_{jk}(u_0, v_0) \quad (j + k = 1, 2, \ldots, q), \; W = W_{00}(u_0, v_0) = W(u_0, v_0). \tag{1.7}$$

С другой стороны, разложив в окрестности точки (u_0, v_0) вектор-функцию $W(u, v)$ в ряд Тейлора, будем иметь:

$$W(u, v) = W(u_0, v_0) + (u - u_0)\frac{\partial W(u_0, v_0)}{\partial u} + (v - v_0)\frac{\partial W(u_0, v_0)}{\partial v} + \cdots + \frac{1}{p!}\left[(u - u_0)\frac{\partial}{\partial u} + (v - v_0)\frac{\partial}{\partial v}\right]^p W(u_0, v_0) + \cdots = W(u_0, v_0) + u_0 s\frac{\partial W(u_0, v_0)}{\partial u} + v_0 t\frac{\partial W(u_0, v_0)}{\partial v} + \cdots + \frac{1}{p!}\left[u_0 s\frac{\partial}{\partial u} + v_0 t\frac{\partial}{\partial v}\right]^p W(u_0, v_0) + \cdots \tag{1.8}$$

Из (1.7) и (1.8) имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\binom{\lambda}{1}W + W_{10} = u_0\frac{\partial W}{\partial u}, \\ &\binom{\mu}{1}W + W_{01} = v_0\frac{\partial W}{\partial v}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\binom{\lambda}{j}\binom{\mu}{k}W + \binom{\lambda}{j-1}\binom{\mu}{k}W_{10} + \binom{\lambda}{j}\binom{\mu}{k-1}W_{01} + \cdots + \binom{\mu}{k}W_{j0} + \\ &+ \binom{\mu}{k-1}W_{j1} + \cdots + \binom{\lambda}{j}W_{0k} = \\ &= \frac{1}{j!}\frac{1}{k!}u_0^j v_0^k\frac{\partial^{j+k}W(u_0, v_0)}{\partial u^j \partial v^k}, \; W_{\alpha\beta} = W_{\alpha\beta}(u_0, v_0) \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

Сравнивая (1.6) и (1.7), находим:

$$\Psi_q(u_0, v_0, s, t) = \sum_{j=-\lambda}^{\infty}\sum_{k=-\mu}^{\infty} A_{j+\lambda\, k+\mu}u_0^{j+\lambda}v_0^{k+\mu}R_{jk}(s, t), \tag{1.10}$$

где $R_{jk}(s, t)$ — остаток ряда Тейлора функции $(1+s)^j(1+t)^k = \sum\limits_{h,\, l=0}^{\infty}\alpha_{hl}s^h t^l$, начиная с членов степени $q+1$ по совокупности переменных s и t, причем $|s| < \frac{1}{2}$, $|t| < \frac{1}{2}$.

Используя (1.10), можем записать:

$$\| \Psi_q (u_0, v_0, s, t) \| \leqslant \Big(\sum_{j=-\lambda}^{0} \sum_{k=-\mu}^{0} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-\mu}^{0} + \sum_{j=-\lambda}^{0} \sum_{k=1}^{\infty} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \Big) \| A_{j+\lambda\, k+\mu} \| \, | u_0 |^{j+\lambda} | v_0 |^{k+\mu} | R_{jk} (s, t) | = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4.$$

Воспользовавшись неравенствами (см. лемму 2.3 из [6])

$$\max_{|u|^2+|v|^2=1} \| A_{jk} \| \, |u|^j |v|^k \leqslant \sqrt{m} \max_{|u|^2+|v|^2=1} \Big\| \sum_{j+k=h} A_{jk} u^j v^k \Big\| =$$
$$= \sqrt{m} B_{jk}, \ j + k = h, \ h = 0, 1, 2, \ldots,$$

как и в [8], найдем оценки для σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 и, окончательно, для $\| \Psi_q (u_0, v_0, s, t) \|$ вне множества E получим оценку:

$$\| \Psi_q (u_0, v_0, s, t) \| <$$
$$< C (\alpha, q) (|s| + |t|)^{q+1} \left| \frac{u_0}{u} \right|^{\lambda} \left| \frac{v_0}{v} \right|^{\mu} m (R, W (u, v)) \, \nu^{(q+4)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} (R),$$
$$\frac{\lambda+\theta}{\nu} = \left(\frac{|u_0|}{R} \right)^2, \ \frac{\mu-\theta}{\nu} = \left(\frac{|v_0|}{R} \right)^2, \ 0 < \theta < 1, \ 0 < \alpha < 2 - \sqrt{2},$$
$$\mu \leqslant \nu, \ \lambda \leqslant \nu. \tag{1.11}$$

Выберем теперь q настолько большим, чтобы положительное число $\beta = \frac{q+4}{q+1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)$ было меньше единицы. Пусть (u_0, v_0) $(|u_0|^2 + |v_0|^2 = R^2$, $u_0 \neq 0$, $v_0 \neq 0)$ — точка, в которой достигается $\max\limits_{|u|^2+|v|^2=R^2} \| W (u, v) \|$, причем R не принадлежит исключительному множеству E.

Выберем точки (u_p, v_p) $(|u_p| = |u_0|, \ |v_p| = |v_0|)$ так, чтобы выполнялись условия

$$|s_p| = \left| \frac{u_p - u_0}{u_0} \right| = D a_p \nu^{-\beta} (R), \ |t_p| = \left| \frac{v_p - v_0}{v_0} \right| = D b_p \nu^{-\beta} (R). \tag{1.12}$$
$$\left(p = 1, 2, \ldots, \frac{(q+1)(q+2)}{2} = l \right),$$

где D — некоторая постоянная, a_p и b_p подобраны так, чтобы определитель $|(a_p^j b_p^k)|$ был отличен от нуля и $0 < |a_p|, \ |b_p| < 1$.

Подставляя в (1.7) вместо u и v соответственно пары (u_p, v_p), получим систему уравнений

$$\sum_{j+k=0}^{q} W_{jk} (u_0, v_0) s^j t^k = \left(\frac{u_0}{u_p} \right)^{\lambda} \left(\frac{v_0}{v_p} \right)^{\mu} W (u_p, v_p) - \Psi_q (u_0\, v_0, s_p, t_p),$$
$$p = 1, 2, \ldots, l. \tag{1.13}$$

Введя обозначения

$$W_{jk} (u_0, v_0) \frac{s_p^j t_p^k}{a_p^j b_p^k} = F_{jk},$$

из (1.13) найдем систему уравнений, которой удовлетворяют векторы F_{jk}. Так как $|(a_p^j b_p^k)| \neq 0$, то эта система имеет единственное решение. Учитывая (1.11), (1.12) и (1.13), получаем:

$$\| F_{jk} \| \leqslant D_0 \Big\{ \sum_{p=1}^{l} [\| W (u_p, v_p) \| + \| \Psi_q (u_0, v_0, s_p, t_p) \| \Big\} \leqslant$$
$$\leqslant D_0 \Big\{ \sum_{p=1}^{l} [M (R, W (u, v)) + (2D)^{q+1} C (\alpha, q) \, \nu^{(q+4)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) - (q+1)\beta} (R) \times$$
$$\times m (R, W (u, v))] \Big\} \leqslant H_0 M (R, W (u, v)).$$

Для $\| W_{jk} \|$ имеем, следовательно, оценку

$$\| W_{jk}(u_0, v_0) \| \leqslant HM(R, W(u, v))\, \nu^{(j+k)\beta}(R), \tag{1.14}$$

где H — некоторая постоянная, зависящая от q и α.

Из (1.9) мы находим

$$u_0^j v_0^k \frac{\partial^{j+k} W(u_0, v_0)}{\partial u^j \partial v^k} - \lambda(\lambda - 1)\cdots(\lambda - j + 1)\mu(\mu - 1)\cdots(\mu - k + 1) W(u_0, v_0) =$$
$$= j\lambda(\lambda - 1)\cdots(\lambda - j + 2)\mu(\mu - 1)\cdots(\mu - k + 1) W_{10} + \cdots +$$
$$+ j(j-1)\cdots(j-h+1)k(k-1)\cdots(k-l+1)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda+h-$$
$$-j+1)\mu(\mu-1)\cdots(\mu+l-k+1)W_{hl} + \cdots +$$
$$+ k!\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-j+1)W_{0k}.$$

Из последнего соотношения, учитывая (1.14) и соотношения (1.11), связывающие λ, μ и ν, получаем неравенство

$$\left\| u_0^j v_0^k \frac{\partial^{j+k} W(u_0, v_0)}{\partial u^j \partial v^k} \frac{1}{\nu^{j+k}(R)} - \left(\frac{|u_0|}{R}\right)^{2j} \left(\frac{|v_0|}{R}\right)^{2k} W(u_0, v_0) \right\| \leqslant$$
$$\leqslant C(\alpha, q) M(R, W(u, v)) (\nu^{-1} + \nu^{-1+\beta} + \cdots + \nu^{-(h+l)+(h+l)\beta}),$$

где $C(\alpha, q) > 0$ — достаточное большое число, зависящее от q и α, но не зависящее от R. Переходя к пределу в последнем соотношении при $R \to \infty$, получим требуемое равенство. В случае $|u_0| = 0$ или $|v_0| = 0$ при $j \geqslant 1$ или, соответственно, $k \geqslant 1$ теорема очевидна. Этим и завершается доказательство теоремы.

Замечание. Теорема 2.3 работы [6] является простым следствием этой теоремы, но непосредственное ее доказательство значительно проще.

Следствие. Справедливо равенство

$$\lim_{R \to \infty} M^{-1-\beta}(R) \left\| \xi_1^{i_1} \cdots \xi_n^{i_n} \frac{\partial^{i_1 + \cdots + i_n} W(\Xi)}{\partial z_1^{i_1} \cdots \partial z_n^{i_n}} \right\| = 0, \tag{1.15}$$

$\beta > 0$ — постоянное число, где при переходе к пределу следует, быть может, исключать множество E.

Действительно, это непосредственно следует из доказанной теоремы и известной оценки [6]

$$\nu(R) < [\ln m(R)]^{1+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0 \text{ — произвольная постоянная},$$

которая справедлива также вне множества E.

Установим теперь некоторые аналитические свойства функции $M(R)$. Обозначим

$$H = H(Z) = H(r_1, \zeta_1, \ldots, r_n, \zeta_n) = \| W(Z) \|^2, \quad z_j = r_j e^{i\zeta_j}.$$

Очевидно, H является бесконечно дифференцируемой функцией переменных $r_1, \ldots, r_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Для исследования функции H на максимум на гиперсфере $r_1^2 + \cdots + r_n^2 = R^2$ составим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial \zeta_j} = 0 \quad (j = 1, \ldots, n) \\ &\frac{\partial H}{\partial r_j} = 2\lambda r_j \quad (j = 1, \ldots, n) \\ &r_1^2 + \cdots + r_n^2 = R^2. \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

Точки Z, координаты которых удовлетворяют системе (1.16), называются стационарными точками вектор-функции $W(Z)$. Нас интересуют только те стационарные точки, которые являются точками максимума функции H. Легко доказать (ср. лемму 2 из работы [9]), что у функции H не существует изолированных точек максимума. Характер точек максимума H в случае одной функции детально изучается в работах Ш. И. Стрелица [9], [10]. Для построения и изучения аналитического характера функции $M(R)$ нет необходимости рассматривать все многообразие стационарных точек функции H, достаточно рассматривать только так называемые алгеброидные дуги стационарных точек.

Алгеброидной дугой называется действительная кривая, заданная функцией, аналитической в середине промежутка, имеющей, возможно, только алгебраические особенности на концах данного промежутка. Кривая, состоящая из конечного числа алгеброидных дуг, называется кусочно-алгеброидной.

Построение функции $M(R)$ и кривой максимумов $r_j = r_j(R)$, $\zeta_j = \zeta_j(R)$ $(j = 1, \ldots, n)$ (т. е. кривой, в точках которой достигается $\max \| W(Z) \|$ на гиперсфере $\| Z \| = R$) проводится так же, как в работе [10]. Справедлива также (ср. [9]) следующая

Теорема 1.3. *Функции $M(R)$ и $\zeta_j(R)$, $r_j(R)$ $(j = 1, \ldots, n)$ состоят на каждом отрезке $0 < R < R_0$ из конечного числа алгеброидных дуг переменного R.*

Докажем следующее предложение.

Теорема 1.4. *Справедливы равенства*

$$\xi_j W^*(\Xi) \frac{\partial W(\Xi)}{\partial z_j} = \frac{r_j^2}{R} M(R) M'(R) \quad (j = 1, \ldots, n),$$

$$\lim_{R \to \infty} \frac{RM'(R)}{\nu(R) M(R)} = 1, \tag{1.17}$$

где $W^*(\Xi)$ — комплексно сопряженный и транспонированный вектор с $W(\Xi)$, Ξ — точка, где достигается $\max\limits_{\| Z \| = R} \| W(Z) \|$. При переходе к пределу в (1.17) следует, возможно, исключать множество E.

Доказательство. Пусть $r_j = r_j(R)$, $\zeta_j = \zeta_j(R)$ $(j = 1, \ldots, n)$ — аналитическая дуга кривой максимумов. Тогда имеет место тождество

$$H(r_1(R), \zeta_1(R), \ldots, r_n(R), \zeta_n(R)) \equiv M^2(R).$$

Продифференцировав последнее тождество по R, получим

$$\frac{\partial H}{\partial r_1} r_1'(R) + \ldots + \frac{\partial H}{\partial r_n} r_n'(R) + \frac{\partial H}{\partial \zeta_1} \zeta_1'(R) + \ldots + \frac{\partial H}{\partial \zeta_n} \zeta_n'(R) = 2M(R) M'(R).$$

Но в точках максимумов имеют место равенства (1.16). Поэтому

$$\frac{\partial H}{\partial r_1} r_1'(R) + \ldots \frac{\partial H}{\partial r_n} r_n'(R) = 2M(R) M'(R)$$

$$\lambda [r_1(R) r_1'(R) + r_2(R) r_2'(R) + \ldots + r_n(R) r_n'(R)] = M(R) M'(R).$$

Учитывая, что $r_1(R) r_1'(R) + \ldots + r_n(R) r_n'(R) = R$, из последнего равенства найдем $\lambda = \frac{1}{R} M(R) M'(R)$ и, подставляя в (1.16), получим

$$\frac{\partial H}{\partial r_j} = 2r_j \frac{M(R) M'(R)}{R} \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{1.18}$$

Если введем обозначение

$$W(Z) = \begin{pmatrix} u_1 + iv_1 \\ \vdots \\ u_n + iv_n \end{pmatrix}, \quad W^*(Z) = (u_1 - iv_1, \ldots, u_n - iv_n),$$

то легко получить соотношения $(z_j = r_j e^{i\zeta_j})$;

$$z_j W^*(Z)\frac{\partial W(Z)}{\partial z_j} = r_j\left(u_1\frac{\partial u_1}{\partial r_j} + \ldots + u_n\frac{\partial u_n}{\partial r_j}\right) - i\left(u_1\frac{\partial u_1}{\partial \zeta_j} + \ldots + \right.$$
$$\left. + u_n\frac{\partial u_n}{\partial \zeta_j}\right) = \frac{r_j}{2}\frac{\partial H}{\partial r_j} - \frac{i}{2}\frac{\partial H}{\partial \zeta_j} \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Отсюда, учитывая (1.16) и (1.18) и обозначая рассматриваемые точки максимумов через Ξ, получаем

$$\xi_j W^*(\Xi)\frac{\partial W(\Xi)}{\partial z_j} = \frac{r_j^2}{R} M(R) M'(R) \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{1.19}$$

Заметим, что в точках неаналитичности $M(R)$ всегда существуют односторонние производные функции $M(R)$ вследствие логарифмической выпуклости $\ln M(R)$.

Из теоремы 1.2 следует, что

$$\frac{\xi_j}{\nu(R)}\frac{\partial W(\Xi)}{\partial z_j} = \left(\frac{z_j}{R}\right)^2 W(\Xi) + U_j(\Xi) \quad (j = 1, \ldots, n),$$

где $M^{-1}(R)\,\| U_j(\Xi)\| \underset{R\to\infty}{\to} 0$ вне множества E.

Подставляя это в (1.19), получаем

$$\nu(R) W^*(\Xi) W(\Xi) + \nu(R) W^*(\Xi)[U_1(\Xi) + \ldots + U_n(\Xi)] =$$
$$= \frac{r_j^2}{R} M(R) M'(R) \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Суммируя последние равенства по $j = 1, \ldots, n$, получаем

$$\nu(R) W^*(\Xi) W(\Xi) + \nu(R) W^*(\Xi)[U_1(\Xi) + \ldots + U_n(\Xi)] =$$
$$= R M(R) M'(R). \tag{1.20}$$

Учитывая соотношения

$$W^*(\Xi) W(\Xi) = \| W(\Xi)\|^2 = M^2(R), \quad | W^*(\Xi)[U_1(\Xi) + \ldots + U_n(\Xi)] \leqslant$$
$$\leqslant \| W(\Xi)\| [\| U_1(\Xi)\| + \ldots + \| U_n(\Xi)\|],$$

из (1.20) предельным переходом получим требуемое равенство (1.17). Теорема доказана.

§ 2. Перед тем как перейти к рассмотрению систем дифференциальных уравнений, остановимся на одном понятии, играющем важную роль в дальнейшем.

Наряду с симметризованной кронекеровской степенью вектора W — $W^{[k]}$, будем рассматривать кронекеровскую несимметризованную степень W^k, определяемую как k-кратное кронекеровское произведение вектора W на себя.

Определение. Говорим, что матрица $A^{(k)}$ с постоянными элементами, имеющая $m^k \left(\frac{1}{k!} m(m+1) \ldots (m+k-1) = C^k_{m+k-1}\right)$ столбцов, обладает Г-свойством, если выполняется неравенство

$$\min_{\|W\|=1} \| A^{(k)} W^k \| > 0 \quad \left(\min_{\|W\|=1} \| A^{(k)} W^{[k]} \| > 0\right). \tag{2.1}$$

Когда элементами матрицы $A^{(k)}$ являются многочлены от одной комплексной переменной z, матрица $A^{(k)} = A^{(k)}(z)$ обладает Г-свойством, если для всех z, таких, что при $|z| \geqslant r_0$, r_0 — некоторое постоянное число, выполняется

$$\min_{\|W\|=1} \| A^{(k)}(z) W^k \| = C(z) \geqslant C > 0 \quad (\min_{\|W\|=1} \| A^{(k)}(z) W^{[k]} \| = C(z) \geqslant C > 0), \tag{2.2}$$

где C — некоторая положительная постоянная.

В случае $m = 1$ вместо матрицы $A^{(k)}$ имеем комплексное число a_k и, следовательно, если $a_k \neq 0$, то при $|w| = 1$ справедливо $|a_k w^k| = |a_k| > 0$, т. е. Г-свойство эквивалентно соотношению $a_k \neq 0$.

В работе [6] мы указали некоторые классы матриц, обладающих Г-свойством. Приведем одно очевидное предложение.

Для того чтобы матрица $A^{(k)}$ обладала Г-свойством, достаточно, чтобы она имела вид

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{1p_1} & 0 \ldots 0 & a_{1p_2} & 0 \ldots 0 & a_{1p_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{mp_1} & 0 \ldots 0 & a_{mp_2} & 0 \ldots 0 & a_{mp_m} \end{pmatrix},$$

где a_{ip_j} — коэффициенты, стоящие в произведении $A^{(k)}W^k$ $(A^{(k)}W^{[k]})$ перед членами w_j^k $(j = 1, \ldots, m)$, такие, что $\det(a_{ip_j}) \neq 0$.

Следующая теорема показывает, что существуют матрицы и с переменными элементами, обладающие Г-свойством.

Теорема 2.1. *Пусть дана матрица $A^{(k)}(z)$, элементами которой являются многочлены от переменной z, причем элементы i-ой строки — многочлены степени не выше q_i. Для того чтобы $A^{(k)}(z)$ обладала Г-свойством, достаточно, чтобы этим свойством обладала матрица $\bar{A}^{(k)}$, составленная из коэффициентов при членах степени q_i соответствующей i-ой строки, $i = 1, \ldots, m$.*

Доказательство. Запишем матрицу $A^{(k)}(z)$ в виде

$$A^{(k)}(z) = \begin{pmatrix} a_{11}z^{q_1} + p_{11}(z) & a_{12}z^{q_1} + p_{12}(z) & \ldots & a_{1l}z^{q_1} + p_{1l}(z) \\ a_{21}z^{q_2} + p_{21}(z) & a_{22}z^{q_2} + p_{22}(z) & \ldots & a_{2l}z^{q_2} + p_{2l}(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}z^{q_m} + p_{m1}(z) & a_{m2}z^{q_m} + p_{m2}(z) & \ldots & a_{ml}z^{q_m} + p_{ml}(z) \end{pmatrix},$$

где a_{ij} — постоянные числа, $p_{ij}(z)$ — многочлены степени не выше $q_i - 1$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, l$, где для определенности считаем $l = m^k$. Тогда $\bar{A}^{(k)}$ имеет вид

$$\bar{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & \ldots & a_{1l} \\ a_{21}a_{22} & \ldots & a_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}a_{m2} & \ldots & a_{ml} \end{pmatrix}.$$

Если $\|W\| = 1$, то при $|z| > 1$

$$\| A^{(k)}(z) W^k \|^2 = \sum_{i=1}^{m} |(a_{i1}z^{q_i} + p_{i1}(z)) w_1^k + (a_{i2}z^{q_i} + p_{i2}(z)) w_1^{k-1}w_2 +$$

$$+ \ldots + (a_{il}z^{q_i} + p_{il}(z)) w_m^k|^2 = \sum_{i=1}^{m} |z|^{2q_i} \left| \left(a_{i1} + O\left(\frac{1}{z}\right)\right) w_1^k + \right.$$

$$\left. + \left(a_{i2} + O\left(\frac{1}{z}\right)\right) w_1^{k-1} w_2 + \ldots + \left(a_{il} + O\left(\frac{1}{z}\right)\right) w_m^k \right|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{m} |z|^{2q_i} \left(|a_{i1}w_1^k + a_{i2}w_1^{k-1}w_2 + \ldots + a_{il}w_m^k|^2 + O\left(\frac{1}{|z|}\right)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{m} |a_{i1}w_1^k + a_{i2}w_1^{k-1}w_2 + \ldots a_{il}w_m^k|^2 + O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

Если $\overline{A}^{(k)}$ обладает Г-свойством, то из последних неравенств следует, что $A^{(k)}(z)$ также обладает этим свойством. Теорема доказана.

Пусть теперь дана система дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} P_1\left(z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_m, \frac{\partial w_1}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial^p w_j}{\partial z_1^{i_1} \ldots \partial z_n^{i_n}}, \ldots, \frac{\partial^p w_m}{\partial z_n^p}\right) &= \\ = Q_1(w_1, \ldots, w_m)& \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ P_m\left(z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_m, \frac{\partial w_1}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial^p w_j}{\partial z_1^{i_1} \ldots \partial z_n^{i_n}}, \ldots, \frac{\partial^p w_m}{\partial z_n^p}\right) &= \\ = Q_m(w_1, \ldots, w_m)& \end{aligned}\right\}, \quad (2.3)$$

где $P_1, \ldots, P_m$ — многочлены от всех независимых переменных $z_1, \ldots, z_n$, неизвестных функций $w_1, \ldots, w_m$ и частных производных от этих функций до r-го порядка включительно с комплексными коэффициентами; $Q_1, \ldots, Q_m$ — целые функции от неизвестных функций (не обязательно трансцендентные).

Используя векторные обозначения § 1, систему (2.3) можно переписать в виде

$$P\left(Z, W, \frac{\partial W}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial^p W}{\partial z_1^{i_1} \ldots \partial z_n^{i_n}}, \ldots, \frac{\partial^p W}{\partial z_n^p}\right) = Q(W), \quad (2.4)$$

где P — многочлен от всех переменных векторов с постоянными матричными коэффициентами, где под произведением векторов следует понимать кронекеровское (не симметризованное) произведение; матричные коэффициенты имеют m строк и столько столбцов, сколько компонент у соответствующего вектора; $Q(W)$ — целая вектор-функция от W, которую можно представить в виде

$$Q(W) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k W^{[k]}. \quad (2.5)$$

Сначала сформулируем одно необходимое условие для существования целого трансцендентного решения системы (2.4), которое было доказано в работе [6].

Теорема 2.2. *Для того, чтобы система уравнений* (2.4) *не имела целого трансцендентного решения, достаточно, чтобы в разложении* (2.5) *вектор-функции* $Q(W)$ *существовал коэффициент* $A_{\varkappa_0}$, *обладающий* Г-*свойством, где* $\varkappa_0 > q$, q — *степень многочлена* P *по совокупности переменных* W *и частных производных от* W.

Замечание 1. Здесь и в дальнейшем нам удобнее сформулировать достаточные условия несуществования решения вместо необходимых условий существования решения, что, очевидно, эквивалентно.

Замечание 2. Легко видеть, что в общем случае в условии теоремы 2.2 нельзя ослабить ограничения на $Q(W)$ (см. примеры в [6]).

В дальнейшем будем рассматривать систему (2.3) в предположении, что $Q_1, \ldots, Q_m$ — многочлены от $w_1, \ldots, w_m$. Умножив обе части системы (2.3) на соответствующие степени $z_1, \ldots, z_n$ и введя векторные обозначения, мы получим систему

$$\sum\nolimits^{(q)} A_k^{(q)}(Z)\prod_{i_1+\ldots+i_n=0}^{p}\left(z_1^{i_1}\ldots z_n^{i_n}\frac{\partial^{i_1+\ldots+i_n}W(Z)}{\partial z_1^{i_1}\ldots\partial z_n^{i_n}}\right)^{k_{i_1\ldots i_n}}+$$

$$+P_{q-1}\left(Z,\ W,\ \frac{\partial W}{\partial z_1},\ \ldots,\ \frac{\partial^i W}{\partial z_1^{i_1}\ldots\partial z_n^{i_n}},\ \ldots\ \frac{\partial^p W}{\partial z_n^p}\right)=0, \tag{2.6}$$

Здесь сумма в левой части равенства берется по всем таким индексам, для которых

$$\sum_{0\leqslant i_1+\ldots+i_n\leqslant p} k_{i_1\ldots i_n}=q,$$

через k обозначена система индексов $k_{0\ldots 0},\ \ldots,\ k_{i_1\ldots i_n},\ \ldots,\ k_{0\ldots 0p}$, где $k_{i_1\ldots i_n}$ принимают значения $0,\ 1,\ \ldots,\ q$ для всех $i_1\ldots i_n$, таких, что $0\leqslant i_1+\ldots+i_n\leqslant p\ (i_1,\ \ldots,\ i_n$ — целые неотрицательные числа); $A_k^q(Z)$ — матрицы размерности $m\times m^q$ — имеют элементами многочлены по $z_1,\ \ldots,\ z_n$; p_{q-1} многочлен по переменному W и частным производным от W степени не выше q^{-1}, где под произведением векторов всюду понимается кронекеровское произведение.

Замечание 3. Очевидно, после такого умножения обеих частей системы (2.3) множество целых трансцендентных решений может только расшириться, но необходимые условия существования целых трансцендентных решений системы (2.6) остаются верными и для указанных решений системы (2.3). Далее, оценки роста целых трансцендентных решений системы (2.6) также остаются верными и для указанных решений системы (2.3).

Докажем одно необходимое условие существования целого трансцендентного решения системы уравнений (2.6), обобщающее известное необходимое условие существования целого трансцендентного решения для обыкновенного дифференциального уравнения [1, стр. 117].

Число $q=\sum\limits_{0\leqslant i_1+\ldots+i_n\leqslant p} k_{i_1\ldots i_n}$ назовем показателем степени, а число $\varkappa=\sum\limits_{1\leqslant i_1+\ldots+i_n\leqslant p}(i_1+\ldots+i_n)k_{i_1\ldots i_n}$ — весом вектора

$$A_k^{(q)}(Z)\prod_{i_1+\ldots+i_n=0}^{p}\left(z_1^{i_1}\ldots z_n^{i_n}\frac{\partial^{i_1+\ldots+i_n}W(Z)}{\partial z_1^{i_1}\ldots\partial z_n^{i_n}}\right)^{k_{i_1\ldots i_n}}.$$

Справедлива следующая

Теорема 2.3. *Пусть в системе уравнений (2.6) коэффициенты при членах с показателем степени q являются матрицами с постоянными элементами, причем матрица*

$$A^{(q,\varkappa)}=\sum\nolimits^{(q,\varkappa)} A_k^{(q,\varkappa)}\prod_{i_1+\ldots i_n=1}^{p}(\eta_1^{i_1}\cdot\eta_2^{i_2}\ \ldots\ \eta_n^{i_n})^{k_{i_1\ldots i_n}} \tag{2.7}$$

($A_k^{(q,\varkappa)}$ — коэффициенты при членах с показателем степени q и наибольшим весом $\varkappa$, $\sum^{(q,\varkappa)}$ означает суммирование всех членов с такими коэффициентами) обладает Γ — свойством при всех $\eta_1+\ldots+\eta_n=1\ (\eta_i\geqslant 0)$. Тогда система (2.6) не имеет целого трансцендентного решения.

Для упрощения записей и большей наглядности идеи доказательства мы ограничимся доказательством аналогичной теоремы для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Все наши рассуждения проходят и для системы (2.6).

Итак, пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{k_0+\ldots+k_p=q} A^{(q)}_{k_0k_1\ldots k_p}[W^{k_0}\times(zW_1)^{k_1}\times\ \ldots\ \times(z^pW_p)^{k_p}]+$$
$$+P_{q-1}(z,\ W,\ W_1,\ \ldots,\ W_p)=0, \tag{2.8}$$

где $A^{(q)}_{k_0k_1\ldots k_p}$ — постоянные матрицы размерности $m\times m^q$, $k_0,\ k_1,\ \ldots,\ k_p$ — неотрицательные целые числа, P_{q-1} — многочлен относительно

$$W=\begin{pmatrix} w_1\\ \cdot\\ \cdot\\ w_m\end{pmatrix},\quad W_1=\frac{dW}{dz}=\begin{pmatrix} w_1'\\ \cdot\\ \cdot\\ w_m'\end{pmatrix},\ \ldots,\ W_p=\frac{d^pW}{dz^p}=\begin{pmatrix} w_1^{(p)}\\ \cdot\\ \cdot\\ w_m^{(p)}\end{pmatrix}$$

степени не выше $q-1$, $\times$ — знак кронекеровского произведения.

Показатель степени q и вес $\varkappa$ определяются теперь равенствами $q=k_0+k_1+\ \ldots\ +k_p$, $\varkappa=k_1+2k_2+\ \ldots\ +pk_p$. В этом частном случае теорема 2.3 формулируется следующим образом.

Теорема 2.3′. *Если система* (2.8) *такова, что матрица*

$$A^{(q,\varkappa)}=\sum_{k_0+k_1+\ldots+k_p=q} A^{(q,\varkappa)}_{k_0k_1\ldots k_p}$$

обладает Г*-свойством, то система* (2.8) *не имеет целого трансцендентного решения.*

Доказательство. Пусть, вопреки нашему предположению, система (2.8) имеет целое трансцендентное решение $W(z)$. На основе теоремы 1.2 имеем:

$$\xi^iW_i(\xi)=\xi^iW^{(i)}(\xi)=W(\xi)\,\nu^i(r)+U_i(\xi),\quad |\xi|=r,\ i=1,\ 2,\ \ldots,$$

где

$$\|U_i(\xi)\|\,[\,\|W(\xi)\|\,\nu^i(r)]^{-1}\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

где при переходе к пределу, возможно, следует опустить множество E. Тогда

$$W^{k_0}(\xi)\,(\xi W_1(\xi))^{k_1}\times\ \ldots\ \times(\xi^pW(\xi))^{k_p}=$$
$$=W^{k_0}(\xi)\times[W(\xi)\,\nu(r)+U_1(\xi)]^{k_1}\times\ \ldots\ \times[W(\xi)\,\nu^p(r)+U_p(\xi)]^{k_p}=$$
$$=W^{k_0+k_1+\ldots+k_p}(\xi)\,\nu^{k_1+2k_2+\ldots+pk_p}(r)+$$
$$+k_1W^{k_0+k_1+\ldots+k_p-1}(\xi)\,\nu^{k_1-1+2k_2+\ldots+pk_p}(r)\times U_1(\xi)+\ \ldots\ +$$
$$+W^{k_0}(\xi)\times U_1^{k_1}(\xi)\times\ \ldots\ \times U_p^{k_p}(\xi)=W^q(\xi)\,\nu^\varkappa(r)+U_{k_0k_1\ldots k_p}(\xi).$$

Очевидно,

$$\|U_{k_0k_1\ldots k_p}(\xi)\|\,[\|W(\xi)\|^q\,\nu^\varkappa(r)]^{-1}\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}0, \tag{2.9}$$

исключая, возможно, множество E при переходе к пределу.

Далее имеем:

$$\sum_{k_0+k_1+\ldots+k_p=q} A^{(q)}_{k_0k_1\ldots k_p}[W^{k_0}(\xi)\times(\xi W_1(\xi))^{k_1}\times\ \ldots\ \times(\xi^pW_p(\xi))^{k_p}]=$$
$$=\sum_{k_0+k_1+\ldots+k_p=q} A^{(q,\varkappa)}_{k_0k_1\ldots k_p}[W^{k_0}(\xi)\times(\xi W_1(\xi))^{k_1}\times\ \ldots\ \times(\xi^pW_p(\xi))^{k_p}]+$$
$$+\sum_{i=1}^{\varkappa}\left\{\sum{}^{(i)}A^{(q,\varkappa-i)}_{k_0k_1\ldots k_p}[W^{k_0}(\xi)\times(\xi W_1(\xi))^{k_1}\times\ \ldots\ \times(\xi^pW_p(\xi))^{k_p}]\right\}=$$

$$= \sum_{k_0+k_1+\ldots+k_p=q} A^{(q,\varkappa)}_{k_0k_1\ldots k_p} W^q(\xi)\,\nu^\varkappa(r) + \sum_{i=1}^{\varkappa}\left\{\sum\nolimits^{(i)} A^{(q,\varkappa-i)}_{k_0k_1\ldots k_p} W^q(\xi)\times\right.$$
$$\left.\times\,\nu^{\varkappa-i}(r)\right\} + \sum_{k_0+k_1+\ldots+k_p=q} A^{(q)}_{k_0k_1\ldots k_p} U_{k_0k_1\ldots k_p}(\xi),$$

где $\sum^{(i)}$ означает суммирование по всем индексам, для которых соответствующие слагаемые степени q имеют вес $\varkappa - i$.

Из последнего соотношения и из (2.8) получаем

$$\| A^{(q,\varkappa)} W^q(\xi)\,\nu^\varkappa(r)\| - \sum_{i=1}^{\varkappa}\left\{\sum\nolimits^{(i)} \| A^{(q,\varkappa-i)}_{k_0k_1\ldots k_p}\|\,\|W(\xi)\|^q\,\nu^{\varkappa-i}(r)\right\} -$$
$$- \sum_{k_0+k_1+\ldots+k_p=q} \| A^{(q)}_{k_0k_1\ldots k_p}\|\,\|U_{k_0k_1\ldots k_p}(\xi)\| - \|P_{q-1}\| \leqslant 0.$$

Но так как $A^{(q,\varkappa)}$ обладает Г-свойством, то, деля обе части последнего неравенства на $\|W(\xi)\|^q\,\nu^\varkappa(r)$, получаем

$$C - \sum_{i=1}^{\varkappa}\left\{\sum\nolimits^{(i)} \| A^{(q,\varkappa-i)}_{k_0k_1\ldots k_p}\|\,\nu^{-i}(r)\right\} -$$
$$- \sum_{k_0+k_1+\ldots+k_p=q} \| A^{(q)}_{k_0k_1\ldots k_p}\| \frac{\|U_{k_0k_1\ldots k_p}\|}{\|W(\xi)\|^q\nu^\varkappa(r)} - \frac{\|P_{q-1}\|}{\|W(\xi)\|^q\nu^\varkappa(r)} \leqslant 0, \tag{2.10}$$

где $C > 0$ — некоторое постоянное число.

Так как $r^l = o(M(r, W(z)))$ при любом конечном l (см. [6]), учитывая (1.15), получаем вне множества E

$$\frac{\|P_{q-1}\|}{\|W(\xi)\|^q\nu^\varkappa(r)} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.11}$$

Переходя в равенстве (2.10) к пределу при $r \to \infty$ и учитывая условие теоремы, а также (2.9) и (2.11), получаем неравенство $C \leqslant 0$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает теорему.

Требование, чтобы матрица $A^{(q,\varkappa)}$ обладала Г-свойством, существенно для справедливости теоремы. Действительно, рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Система уравнений

$$\begin{cases} z^4(w_1'')^2 + z^4(w_2'')^2 + zw_1w_2' - zw_1'w_2 - z^4 + z = 0 \\ z^3w_1'w_2'' - z^3w_1''w_2' + zw_1w_1' + zw_2w_2' + z^3 = 0 \end{cases}$$

имеет целое трансцендентное решение

$$\begin{cases} w_1 = \sin z \\ w_2 = \cos z. \end{cases}$$

Данную систему уравнений можно записать в виде (2.8) следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}(z^2W'')^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}(z^2W'')\times(zW') +$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}(zW')\times W + P(z) = 0.$$

Здесь все коэффициенты при членах второй степени матрицы с постоянными элементами, но коэффициент при члене второй степени с максимальным весом 4

$$A^{(2,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

не обладает Г-свойством, так как при

$$W=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\quad \| A^{(2,4)}W\|=0.$$

Следующий пример показывает, что если матричные коэффициенты при членах с максимальным показателем степени q не постоянны, система уравнений может иметь целое трансцендентное решение даже тогда, когда все матричные коэффициенты обладают Г-свойством.

Пример 2. Система

$$\begin{cases}4z^4w_1^2-(zw_2')^2=0\\ (zw_1')^2+z^2w_1^2-(4z^4+z^2)\,w_2^2=0\end{cases}$$

имеет целые трансцендентные решения

$$\begin{cases}w_1=c_1\exp(z^2)+c_2\exp(-z^2)\\ w_2=c_1\exp(z^2)+c_2\exp(-z^2),\end{cases}$$

c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Но данную систему можно записать в виде

$$A_{02}(W'z)^2+A_{20}W^2=0,$$

где

$$A_{02}=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\ 1&0&0&0\end{pmatrix},\quad A_{20}=\begin{pmatrix}4z^4&0&0&0\\ z^2&0&0&-4z^4-1\end{pmatrix}$$

обладают Г-свойством (см. предложение в начале этого параграфа и теорему 2.1).

Переходим к исследованию целых трансцендентных решений $W(Z)$ системы (2.6). На основе теоремы (1.2) имеем

$$\xi_1^{i_1}\ldots\xi_n^{i_n}\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}W(\Xi)}{\partial z_1^{i_1}\ldots\partial z_n^{i_n}}=\nu^{i_1+\cdots+i_n}(R)\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{r_j}{R}\right)^{2i_j}W(\Xi)+$$
$$+\nu^{i_1+\cdots+i_n}(R)\,\dot U_{i_1\ldots i_n}(\Xi),$$

причем вне множества E выполняется $\|U_{i_1\ldots i_n}(\Xi)\|\,\|W(\Xi)\|^{-1}\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0.$

Подставляя эти значения в (2.6), получаем в точке Ξ:

$$\sum\nolimits^{(q)}A_k^{(q)}(\Xi)\prod_{i_1+\cdots+i_n=0}^{p}\Bigg[W(\Xi)\,\nu^{i_1+\cdots+i_n}(R)\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{r_j}{R}\right)^{2i_j}+$$
$$+o(W(\Xi))\,\nu^{i_1+\cdots+i_n}(R)\Bigg]^{k_{i_1\ldots i_n}}+P_{q-1}=0, \tag{2.12}$$

где суммирование ведется по индексам, для которых

$$\sum_{0\leqslant i_1+\cdots+i_n\leqslant q}k_{i_1\ldots i_n}=q,$$

а выражение $o(W(\Xi))$ означает, что $\frac{\|o(W(\Xi))\|}{\|W(\Xi)\|}\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0$, исключая, возможно, при переходе к пределу множество E. Величины $o(W(\Xi))$ в равенстве (2.12) зависят от $i_1,\ldots,i_n$, но, как видно будет из дальнейших выкладок, ими можно пренебрегать, поэтому обозначим их одним символом.

Разложим выражение

$$L=\sum\nolimits^{(q)} A_k^{(q)}(\Xi) \prod_{i_1+\cdots+i_n=0}^{p} \left[\nu^{i_1+\cdots+i_n}(R) \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{r_j}{R}\right)^{2i_j}\right]^{k_{i_1}\ldots i_n}$$

по степеням $\nu(R)$. Тогда получим:

$$L=\sum_{s=0}^{\varkappa} C_s\left(\xi_1, \ldots, \xi_n, \frac{r_1}{R}, \ldots, \frac{r_n}{R}\right) \nu^{\varkappa-s}(R), \tag{2.13}$$

причем можно написать:

$$\begin{aligned} C_s &= \sum\nolimits^{(s)} A_k^{(q)}(\Xi) \prod\nolimits^{(s)} \left[\left(\frac{r_1}{R}\right)^{2i_1} \cdots \left(\frac{r_n}{R}\right)^{2i_n}\right]^{k_{i_1\ldots i_n}} = \\ &= \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\varkappa-s} B_{\alpha_1\ldots\alpha_n}^{(q,\,s)}(\Xi)\left(\frac{r_1}{R}\right)^{2\alpha_1} \cdots \left(\frac{r_n}{R}\right)^{2\alpha_n}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

где $\sum^{(s)}$ и $\prod^{(s)}$ означают сумму и соответственно произведение по всем тем индексам, для которых выполняются соотношения

$$(i_1+\ldots+i_n)\,k_{i_1\ldots i_n}=\varkappa-s, \quad \sum_{0\leq i_1+\cdots+i_n\leq p} k_{i_1\ldots i_n}=q.$$

Элементы матриц $B_{\alpha_1\ldots\alpha_n}^{(q,\,s)}(\Xi)$ — многочлены по $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Обозначим через $\sigma_s\,(s=1, \ldots, \varkappa)$ наибольшую из степеней элементов матриц $B_{\alpha_1\ldots\alpha_n}^{(q,\,s)}(\Xi)$.

Приведем теперь каждую из матриц $B_{\alpha_1\ldots\alpha_n}^{(q,\,0)}(\Xi)$ к виду

$$B_{\alpha_1\ldots\alpha_n}^{(q,\,0)}(\Xi)=\sum_{t=0}^{t_{\alpha_1\ldots\alpha_n}} Q_{\alpha_1\ldots\alpha_n}^{(t)}(\Xi), \tag{2.15}$$

где $Q_{\alpha_1\ldots\alpha_n}^{(t)}(\Xi)$ — матрицы той же размерности, что и $B_{\alpha_1\ldots\alpha_n}^{(q,\,0)}(\Xi)$, а элементами ее являются либо однородные многочлены степени t, либо нули.

Тогда

$$\begin{aligned} C_0 &= \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\varkappa} \sum_{t=0}^{t_{\alpha_1\ldots\alpha_n}} Q_{\alpha_1\ldots\alpha_n}^{(t)}(\Xi)\left(\frac{r_1}{R}\right)^{2\alpha_1} \cdots \left(\frac{r_n}{R}\right)^{2\alpha_n} = \\ &= \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\varkappa} \sum_{t=0}^{t_{\alpha_1\ldots\alpha_n}} R^t Q_{\alpha_1\ldots\alpha_n}^{(t)}\left(\frac{\Xi}{R}\right)\left(\frac{r_1}{R}\right)^{2\alpha_1} \cdots \left(\frac{r_n}{R}\right)^{2\alpha_n}. \end{aligned}$$

Пусть $\max\limits_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\varkappa} t_{\alpha_1\ldots\alpha_n}=\sigma$. Тогда из последнего равенства вытекает, что

$$R^{-\sigma}C_0=\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\varkappa} Q_{\alpha_1\ldots\alpha_n}^{(\sigma)}\left(\frac{\Xi}{R}\right)\left(\frac{r_1}{R}\right)^{2\alpha_1} \cdots \left(\frac{r_n}{R}\right)^{2\alpha_n}+T, \tag{2.16}$$

где T — матрица, элементы которой бесконечно малые порядка не ниже R^{-1}. Обозначив

$$S=S(\Xi)=\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\varkappa} Q_{\alpha_1\ldots\alpha_n}^{(\sigma)}\left(\frac{\Xi}{R}\right)\left(\frac{r_1}{R}\right)^{2\alpha_1} \cdots \left(\frac{r_n}{R}\right)^{2\alpha_n}, \tag{2.17}$$

можем доказать теорему (ср. [5]).

Теорема 2.4. *Целые трансцендентные решения* $W(Z)$ *системы* (2.6), *для которых*

$$\gamma = \varliminf_{R\to\infty} \frac{\| S(\Xi)\, W^q(\Xi) \|}{M^q(R)} > 0\,^*, \tag{2.18}$$

имеют рост не выше нормального типа конечного порядка h, *общего для всех целых решений с* $\gamma > 0$.

Доказательство. Пусть имеется целое трансцендентное решение $W(Z)$, для которого выполняется условие (2.18). Тогда, полагая $0 < \alpha < \gamma$, при достаточно больших R имеем $\| S(\Xi)\, W^q(\Xi) \| > \alpha M^q(R)$. Из неравенства (2.12) с относящимся к нему замечанием, учитывая (2.13) — (2.16), получаем

$$S(\Xi)\, W^q(\Xi)\, \nu^\varkappa(R) = -T(\Xi)\, W^q(\Xi) - R^{-\sigma} \sum_{s=1}^{\varkappa} \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\varkappa-s} B^{(q,\,s)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\Xi) \times$$
$$\times \left(\frac{r_1}{R}\right)^{2\alpha_1} \cdots \left(\frac{r_n}{R}\right)^{2\alpha_n} \nu^{\varkappa-s}(R)\, W^q(\Xi) +$$
$$+ \sum_{s=0}^{\varkappa} o\left(W^q(\Xi)\right) R^{\sigma_s-\sigma} \nu^{\varkappa-s}(R) + R^{-\sigma} P_{q-1}.$$

Взяв нормы от обеих сторон последнего равенства и разделив их на $M^q(R)$, а также учитывая (1.15) и соотношение $R^l = o(M(R))$ при любом конечном l (см. [6]), получим

$$\alpha \nu^\varkappa(R) \leqslant R^{-\sigma} \sum_{s=1}^{\varkappa} \left[\| C_s \| + o(R^{\sigma_s}) \right] \nu^{\varkappa-s}(R) + o(1). \tag{2.19}$$

Но из определения σ_s следует, что

$$\| C_s \| < N R^{\sigma_s} \quad (s = 1, \ldots, \varkappa), \quad N = \mathrm{const}.$$

Поэтому из (2.19) получаем неравенство

$$\nu^\varkappa(R) < D \sum_{s=1}^{\varkappa} R^{\sigma_s-\sigma} \nu^{\varkappa-s}(R), \tag{2.20}$$

справедливое вне множества E, $D > 0$ — постоянная, не зависящая от R.

Пусть

$$\max_{1\leqq s\leqq\varkappa} R^{\sigma_s-\sigma} \nu^{\varkappa-s}(R) = R^{\sigma_{s(R)}-\sigma} \nu^{\varkappa-s(R)}(R).$$

Из (2.20) тогда следует

$$\nu^\varkappa(R) < D\varkappa\, R^{\sigma_{s(R)}-\sigma} \nu^{\varkappa-s(R)}(R),$$
$$\nu(R) < (D\varkappa)^{1/s(R)} \cdot R^{(\sigma_{s(R)}-\sigma)s^{-1}(R)} \leqslant K_0 R^h, \tag{2.21}$$

где

$$h = \max_{1\leqq s\leqq\varkappa} \frac{\sigma_s - \sigma}{s}, \quad K_0 = \begin{cases} D\varkappa, & \text{если } D\varkappa \geqslant 1 \\ (D\varkappa)^{1/\varkappa}, & \text{если } D\varkappa < 1. \end{cases}$$

На основе теоремы 1.4 из (2.21) получаем неравенство

$$\frac{RM'(R)}{M(R)} < KR^h, \quad K = \mathrm{const}, \tag{2.22}$$

---

* Если на $\| Z \| = R$ максимум $\| W(Z) \|$ достигается на некотором множестве значений Ξ (обязательно замкнутом), состоящем более чем из одной точки, то под $\| S(\Xi)\, W^q(\Xi) \|$ понимаем наибольшее из всех возможных значений этой величины.

справедливое при всех R, $R \geqslant R_0$, за исключением, быть может, интервалов $J = \{(R_k, R'_k)\}$ оси R конечной логарифмической меры.

Функция $\ln M(R)$ логарифмически выпукла, поэтому $R\frac{M'(R)}{M(R)}$ неубывающая функция от R. Следовательно, из (2.22) получим при $R_k < R \leqslant R'_k$:

$$\ln M(R) - \ln M(R_0) < \frac{K}{h} R^h + \sum_{j=1}^{k-1} \int_{R_j}^{R'_j} \frac{RM'(R)}{M(R)} \frac{dR}{R} + \int_{R_k}^{R} \frac{RM'(R)}{M(R)} \frac{dR}{R} < \frac{K}{h} R^h +$$

$$+ KR^h \left[\sum_{j=1}^{k-1} \int_{R_j}^{R'_j} \frac{dR}{R} + \left(\frac{R'_k}{R_k}\right)^h \int_{R_k}^{R} \frac{dR}{R} \right] \leqslant KR^h \left\{ \frac{1}{h} + \sum_{j=1}^{\infty} \ln \frac{R'_j}{R_j} + \left(\frac{R'_k}{R_k}\right)^h \ln \frac{R'_k}{R_k} \right\}.$$

Так как ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \ln \frac{R'_j}{R_j}$ сходится, при $R_k > R'$ выполняется $\frac{R'_k}{R_k} < 2$ и выражение в фигурных скобках ограничено постоянным числом C.

Если $R'_{k-1} < R \leqslant R_k$, то в предыдущих соотношениях будет отсутствовать слагаемое $\int_{R_k}^{R} \frac{RM'(R)}{M(R)} \frac{dR}{R}$, а следовательно, и слагаемое $\left(\frac{R_k}{R_k}\right)^h \ln \frac{R'_k}{R_k}$.

Поэтому при $R_0 > R'$ для всех $R > R_0$ имеем

$$\ln M(R) < \ln M(R_0) + CR^h.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

В случае, когда система (2.6) вырождается в одно уравнение, вместо матрицы S, определенной формулой (2.16), имеем обыкновенную однородную форму степени $\varkappa$ относительно $\left(\frac{r_1}{R}\right)^{2\alpha_1}, \ldots, \left(\frac{r_n}{R}\right)^{2\alpha_n}$, и условие (2.18) записывается следующим образом: $\gamma = \varliminf_{R\to\infty} |S| > 0$. Этот случай рассматривается в работе [5].

Заметим, что число h, найденное при доказательстве теоремы (2.4), вообще говоря, не может быть заменено меньшим. Действительно, рассмотрим

Пример 3. Вектор-функция

$$W(Z) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(z_1 - z_2) \\ \exp(z_2 - z_1) \end{pmatrix} \qquad (2.23)$$

является решением системы уравнений

$$\begin{cases} z_1^2 \dfrac{\partial^2 w_1}{\partial z_1^2} + z_2^2 \dfrac{\partial^2 w_2}{\partial z_2^2} - z_1^2 \dfrac{\partial w_1}{\partial z_1} - z_2^2 w_2 = 0 \\ - z_1^2 \dfrac{\partial^2 w_2}{\partial z_1^2} + z_1 z_2 \dfrac{\partial^2 w_1}{\partial z_1 \partial z_2} - z_1^2 \dfrac{\partial w_2}{\partial z_1} + z_1 z_2 w_1 = 0. \end{cases}$$

Матрица S имеет вид

$$S = \left(\frac{r_1}{R}\right)^4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \left(\frac{r_1 r_2}{R^2}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{r_2}{R}\right)^4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для решения (2.23) при больших R имеем $\frac{r_1}{R} = \frac{r_2}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, поэтому

$$S = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } \lim_{R\to\infty} \frac{\|SW\|}{M(R)} > 0.$$

В нашем примере $\sigma = 0$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$, следовательно, $h = 1$. По теореме (2.4) все решения, для которых $\gamma > 0$, имеют рост не выше нормального типа первого порядка. Как легко видеть, решение (2.23) имеет порядок 1 и тип 1.

Следующий пример показывает, что если не выполняется неравенство (2.18), то могут существовать целые решения системы (2.6) как угодно быстрого роста. Следовательно, выполнение неравенства $\gamma > 0$ существенно для того, чтобы целое решение имело конечный порядок.

Пример 4. Общее решение системы

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial z_1} + \frac{\partial w_2}{\partial z_1} + w_1 + w_2 = 0 \\ \frac{\partial w_1}{\partial z_2} + \frac{\partial w_2}{\partial z_2} - w_1 - w_2 = 0 \end{cases}$$

записывается в виде

$$W = \begin{pmatrix} f(z_1, z_2) + C_1 e^{-z_1+z_2} \\ -f(z_1, z_2) + C_2 e^{-z_1+z_2} \end{pmatrix},$$

где $f(z_1, z_2)$ — регулярная в некоторой области функция, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Общее решение в классе целых функций получим, если предположим $f(z_1, z_2)$ целой функцией. Матрица S в этом случае равна

$$S = \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} r_1^2 & r_1^2 \\ r_2^2 & r_2^2 \end{pmatrix}.$$

Неравенство $\overline{\lim\limits_{R\to\infty}} \| SW \| [M(R)]^{-1} > 0$ возможно только в том случае, если $M(R, f(z_1, z_2))$ растет не быстрее $M(R, e^{-z_1+z_2})$.

Очевидно, в этом случае $W(Z)$ имеет самое большее первый порядок и тип, равный единице, что и допускается теоремой. Но если допускать равенство $\overline{\lim\limits_{R\to\infty}} \| SW \| [M(R)]^{-1} = 0$, то $W(Z)$ вместе с $f(z_1, z_2)$ может быть сколь угодно быстрого роста.

Выделим некоторые классы систем дифференциальных уравнений типа (2.6), для которых все целые трансцендентные решения, если они существуют, имеют ограниченный порядок.

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\sum_{i_1+\cdots+i_n=p} A_{i_1\ldots i_n} z_1^{i_1} \ldots z_n^{i_n} \frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n} W}{\partial z_1^{i_1} \ldots \partial z_n^{i_n}} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{p} \sum_{i_1+\cdots+i_n=j} z_1^{i_1} \ldots z_n^{i_n} P_{i_1\ldots i_n}(z_1, \ldots, z_n) \frac{\partial^j W}{\partial z_1^{i_1} \ldots \partial z_n^{i_n}} = 0, \quad (2.24)$$

где $A_{i_1\ldots i_n}$ — матрицы с постоянными элементами, $P_{i_1\ldots i_n}(z_1, \ldots, z_n)$ — матрицы, элементы которых — многочлены по $z_1, \ldots, z_n$.

Из теорем 2.3 и 2.4 следует

Теорема 2.5. *Если матрица*

$$A = \sum_{i_1+\cdots+i_n=p} A_{i_1\ldots i_n} \eta_1^{i_1} \ldots \eta_n^{i_n} \quad (2.25)$$

обладает Г-свойством при любых неотрицательных $\eta_1, \ldots, \eta_n$ $(\eta_1 + \ldots + \eta_n = 1)$, *то любое целое трансцендентное решение системы* (2.24) *имеет конечный порядок, не превосходящий некоторого постоянного* *числа h, общего для всех целых решений данной системы. Если, кроме того, $P_{i_1 \dots i_n}(i_1 + \dots + i_n = j,\ j = 0, 1, \dots, p-1)$ — матрицы с постоянными элементами, то система* (2.24) *не имеет целого трансцендентного решения.*

Отметим, что наличие Г-свойства у матрицы A, представленной формулой (2.25), эквивалентно условию

$$\det\Big(\sum_{i_1+\dots+i_n=p} A_{i_1\dots i_n}\eta_1^{i_1}\dots,\ \eta_n^{i_n}\Big) \neq 0. \tag{2.26}$$

Замечание. В случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений не обязательно требовать, чтобы элементы матриц $A_{i_1\dots i_n}$ были постоянными числами.

Справедливость теоремы 2.5 очевидна. Требование, чтобы матрица A обладала Г-свойством, в общем случае существенно.

Пример 5. Система

$$\begin{cases} z_1 \dfrac{\partial w_1}{\partial z_1} - z_2 \dfrac{\partial w_2}{\partial z_2} + w_1 - w_2 = 0 \\ z_1 \dfrac{\partial w_1}{\partial z_1} - z_2 \dfrac{\partial w_2}{\partial z_2} - w_1 + w_2 = 0 \end{cases}$$

имеет целое трансцендентное решение $w_1 = w_2 = f(z_1 \cdot z_2)$. Ясно, что при $\eta_1 = \eta_2 = \frac{1}{2}$ матрица A, определенная формулой (2.25), не обладает Г-свойством (определитель ее равен нулю), поэтому решение может иметь сколь угодно большой рост.

Для системы (2.6) имеет место следующая

Теорема 2.6. *Пусть матричные коэффициенты $B^{(q,\,0)}_{\alpha_1\dots\alpha_n}(\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \varkappa)$, определенные равенствами* (2.15), *имеют постоянные элементы и матрица*

$$B = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=\varkappa} B^{(q,\,0)}_{\alpha_1\dots\alpha_n}\eta_1^{i_1}\dots\eta_n^{i_n}$$

обладает Г-свойством при любых неотрицательных $\eta_1, \dots, \eta_n (\eta_1 + \dots + \eta_n = 1)$. Тогда любое целое решение системы (2.6) *не более чем нормального типа конечного порядка, не превосходящего некоторого постоянного числа h, общего для всех целых решений данной системы.*

Доказательство немедленно следует из теоремы 2.4, если учтем соотношения (2.15)—(2.17).

Все наши выводы остаются в силе и для более общего класса решений, а именно, решений вида

$$W = z_1^{\lambda_1}\dots z_n^{\lambda_n}U(Z), \tag{2.27}$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — комплексные числа, $U(Z)$ — целая вектор-функция. При этом рост решений вида (2.27) отождествляем с ростом целой вектор-функции $U(Z)$. Для справедливости нашего утверждения, очевидно, достаточно показать, что теорема 1.2 остается верной после замены в ней целой вектор-функции $W(Z)$ вектор функцией вида (2.27), а Ξ — точками максимума функции $\|U(Z)\|$. Для этого заметим, что

$$\frac{\partial^k(z_1^{\lambda_1}\dots z_n^{\lambda_n}U(Z))}{\partial z_1^{i_1}\dots\partial z_n^{i_n}} = z_1^{\lambda_1}\dots z_n^{\lambda_n}\frac{\partial^k U(Z)}{\partial z_1^{i_1}\dots\partial z_n^{i_n}} + \Psi,$$

где $i_1 + \dots + i_n = k$, Ψ — линейная форма относительно частных производных от $U(Z)$ меньшего порядка, чем k, с коэффициентами вида

$\alpha z_1^{\lambda_1-j_1}\ \ldots\ z_n^{\lambda_n-j_n}$, где α — постоянная, $j_1,\ \ldots,\ j_n$ — целые числа. Поэтому

$$\frac{z_1^{i_1}\ \ldots\ z_n^{i_n}\,\dfrac{\partial^k\left(z_1^{\lambda_1}\ \ldots\ z_n^{\lambda_n}U\left(Z\right)\right)}{\partial z_1^{i_1}\ \ldots\ \partial z_n^{i_n}}}{z_1^{\lambda_1}\ \ldots\ z_n^{\lambda_n}U\left(Z\right)} = \frac{z_1^{i_1}\ \ldots\ z_n^{i_n}\,\dfrac{\partial^k U\left(Z\right)}{\partial z_1^{i_1}\ \ldots\ \partial z_n^{i_n}}}{U\left(Z\right)} + \Phi_0\left(Z\right)U^{-1}\left(Z\right), \qquad (2.28)$$

где

$$\Phi_0\left(Z\right) = \sum_{i_1+\ldots+i_n=0}^{k-1}\alpha_{i_1\ldots i_n}z_1^{i_1}\ \ldots\ z_n^{i_n}\,\frac{\partial^{i_1+\ldots+i_n}U\left(Z\right)}{\partial z_1^{i_1}\ \ldots\ \partial z_n^{i_n}},$$

$\alpha_{i_1\ldots i_n}$ — постоянные числа. Учитывая, что в точках Ξ максимума функции $\|U\left(Z\right)\|$ вследствие теоремы 1.2 выражение $\Phi_0\left(\Xi\right)\left[U\left(\Xi\right)\nu^k\right]^{-1}$ стремится к нулю при $\|\Xi\|\to\infty$ (исключая, конечно, множество E) из (2.28) легко получить теорему 1.2 для вектор-функции вида (2.27) в точках максимума нормы вектор-функции $U\left(Z\right)$.

В качестве примера сформулируем теорему 2.4 для решений вида (2.27).

Теорема 2.4′. *Все решения вида* (2.27), *для которых*

$$\gamma = \varlimsup_{R\to\infty}\frac{\|S\left(\Xi\right)U^q\left(\Xi\right)\|}{M^q\left(R,\ U\left(Z\right)\right)} > 0,$$

имеют рост не выше нормального типа конечного порядка h, общего для всех решений вида (2.27).

В заключение отметим, что система (2.24) при условии (2.26) необходимо имеет решения вида (2.27). Доказательство этого утверждения *мы приведем в другом месте.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. Валирон. Аналитические функции. Гостехиздат, М., 1957.

2. Г. Виттих. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. Физматгиз, М., 1960.

3. А. А. Гольдберг. О целых решениях уравнений с частными производными. «Изв. высш. учеб. завед. Математика». (1958) № 3(4), 62—66.

4. Ш. И. Стрелиц. Теорема Вимана—Валирона для целых функций многих переменных. ДАН СССР, 134, № 2 (1960), 286—288.

5. Ш. И. Стрелиц. О росте целых решений дифференциальных уравнений в частных производных. «Матем. сб.», 61 (103): 3 (1963), 257—271.

6. Ф. И. Гече. Системы целых функций нескольких переменных и их приложения в теории дифференциальных уравнений, «Изв. АН Арм. ССР, серия математика», т. 17, № 2 (1964), 17—46.

7. Хуа Ло-кен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях, Изд-во иностр. лит., М., 1959.

8. Ш. И. Стрелиц. Теорема Вимана — Валирона для целых функций многих комплексных переменных, «Матем. сб.», 58 (100):1 (1962), 47—64.

9. Ш. И. Стрелиц. О максимуме модуля аналитической функции многих переменных, «Матем. сб.», 57 (99):3 (1962), 281—296.

10. Ш. И. Стрелиц. О максимальных модулях аналитических функций, «Усп. *матем. наук», 10, вып. 4 (66) (1955), 153—160.*