Теорема Гьоделя

Власенко Д. І. Курінний Г.Ч. Невмержицька О.М. Шугайло О.О.

Травень — 2015

Зміст

[1]Теоремами називають висловлювання, які мають доведення. Отже загловок має внутрішню суперечність. В цьому розділі під теоремою розуміємо висловлювання, яке в якійсь системі аксіом має доведення. В одній системі аксіом твердження має доведення, а в другій — ні.

1 Теорема Гьоделя про неповноту

1.1 Формулювання теореми.

Спочатку зупинимося на позначеннях та визначеннях.

Позначимо через A алфавіт арифметики — 0, 1,2,3,4,5,6,7,8,9, $+$, (,), $x, n, <, =, -, \forall, \exists, \vee, \wedge, \neg, \Rightarrow$ та т.п. Конкретний перелік нас не цікавить, але цей алфавіт містить скінченну кількість символів.

Деякі послідовності символів із A є виразами (арифметичними), а деякі - формулами. Так $x + 2y$ це вираз (терм),а $x > 2y$ є формулою з двома вільними змінними. $x^2 - 22x + 3, \sqrt{x+5}, (5+x)(5-x)$ — вирази (терми). $\forall x(\sqrt{x+5} = (5+x)(5-x)), \exists y(x^2 - 22x + 3 > y)$ — формули, формули арифметики.

Змінна в області дії квантора зв'язана (цим квантором). Не зв'язані змінні — вільні. Деякі формули не мають вільних змінних, є висловлюваннями (вони або істинні або ні). Істинні висловлювання утворюють множину T.

Є алфавіт доведень. В цьому алфавіті звичайно є знак $\vdash$, але його може і не бути. Оскільки ми розглядаємо виключно послідовності символів і багатоповерхових записів немає, то немає і дробів — двоповерхових записів. У видавничій системі Latex, для прикладу, багатоповерховий вираз

$$\int_7^{20} \frac{x^5+11}{x^7-12}\,\mathrm{d}x$$

записується рядком

```
\int_7^{20}\frac{x^5+11}{x^7-12}{\rm d}x
```

В цьому рядку крім латинських букв, цифр, знаків додавання та множення використовуються також, похилі, "шляпки", знак підкреслювання. Відповідно, в алфавіті доведень, як і в алфавіті арифметики, можуть бути такі знаки.

Є аксіоми логічні— для прикладу $A \vdash A$, та позалогічні — для прикладу x+y=y+x, є правила доведення і є саме доведення — і правила доведення, і доведення. На конкретному наборі аксіом і правил доведення ми не зупиняємося Всі вони записуються в алфавіті доведень. Разом аксіоми і правила доведення утворюють дедуктику D.

Якщо всі істинні формули (множину всіх встинних формул позначаємо через T) можна довести, то це повна дедуктика. Якщо можна довести і певну формулу і її заперечення, то це суперечлива дедуктика. Якщо для жодної формули неможливо довести ї саму формулу і її запречення, то це несуперечлива дедктика.

Ми розглядаємо лише ті дедуктики, в яких існують алгоритми перевірки того, що дана формула є аксіомою, що даний запис є доведенням, є алгоритм, що дозволяє за доведенням взнати, доведенням чого воно є. Але конкретну формалізацію алгоритма (чи машини Тьюрінга, чи частково рекурсивні функці, чи якусь іншу формалізацію) не обираємо, будемо користуватися інтуїтивним розумінням алгоритму.

Алфавіт разом з правилами правильної побудови слів називають мовою.

> Теорема Гьоделя: Для пари $< A, T >$ мови арифметики неможливо ввести повну несуперечливу дедуктику.

Можна об'явити всі істинні формули аксіомами. Тоді всі вони будуть доказовні. І ми одержимо повну несуперечливу дедуктику. Нас такі дедуктики не влаштовують — тоді не буде існувати алгоритма, який дозволив би відділити аксіоми від неаксіом. Отже нагадаємо суттєєве обмеження.

> Існує алгоритм, який дозволяє відділити аксіоми від "неаксіом" і доведення від "недоведення", який дозволяє взнати, що саме доводить доведення.

З алгоритмами та їх формалізаціями ми уже мали справу. Тут нагадаємо вимоги до алгоритмів.

1.2 Алгоритми та їх аксіоми.

Алгоритми мають справу з алфавітами, вони працюють із словами алфавіту. До деяких слів їх можна застосувати, а для деяких — ні. Таким чином, алгоритм має область визначення і область значень. Якщо області визначення різні, то алгоритми різні.

З алгоритмами можна мати справу без формального визначення, але тоді потрібно користуватися аксіомами, первинними припущеннями (кому очевидними, а кому ні), яким задовольняють усі алгоритми.

Аксіома запису Застосування алгоритму можна записати, і потім (за записом застосування алгоритму до того, до чого цей алгоритм можна застосувати) кожен однозначно може взнати — які були початкові дані, і який результат. Алгоритм має область визначення. Алгоритм має область значень.Алгоритми з різними областями визачення різні.

Для прикладу, якщо алгоритм уявляється як машина Тьюрінга, то алгоритм

- застосовується до записів на стрічці в алфавіті 0,1;
- повиннен існувати алфавіт, в якому записуються внутрішні стани машини;
- повинна бути вказана початкова конфігурація (що саме записане на стрічці, на який символ дивиться голівка, в якому стані починається робота)
- повинна бути програма.

Якщо машина Тьюрінга створена для того, що проставити одну одиничку на порожню стрічку, то область визначення

— порожня стрічка, машина знаходиться в початковому стані, голівка дивиться на якесь вічко (там записаний нуль або іншиий символ порожнього вічка), прогама каже, “якщо машина знаходиться в початковому стані і голівка бачить нуль, то машина повинна надрукувати у цьому вічку одиничку, голівку не рухати, перейти в кінцевий стан.“ Якщо голівка бачитиме одиничку, то машина, яка кажуть, “зависне“, вона припинить роботу із-за відсутності відповідної команди — але машина не створювалася для цього випадку. Також коли машина бачить нуль, а стрічка не порожня, то машина спрацює, але на стрічці буде непрогонозований запис — цей випадок не регламентується.

Аксіома програми Можна виділити множину програм (приписів), які всіма розуміються чітко, єдиним чином. При цьому все буде писатися в одному алфавіті. Кожен може відрізнити програму від непрограми. Точніше, можна створити алгоритм, який би за будь-якою послідовністю символів давав відповідь — це запис алгоритму чи це нісенітниця.

Аксіома кодування Алгритми застосовують до слів — послідовностей символів в певному алфавіті. Символи алфавіту можна перенумерувати. Тоді алгоритми будуть застосовуватися до послідовностей натуральних чисел і результатом роботи є натуральне число або нуль. Саме такий підхід здійснено при введенні частково рекурсивних функцій.

Кожне ненульове натуральне число u єдиним чином розкладається у добуток степенів простих чисел —

$$u = 2^a 3^b 5^c \dots,$$

де $a, b, c, \dots$ — скінченна послідовність чисел із розширеного натурального ряду. Тому між скінченними послідовностями $a, b, c, \dots$ чисел і натуральними числами є взаємно однозначна відповідність. Цю взаэмно однозначну выдповыдность

$$2^a 3^b 5^c \ldots \leftrightarrow (a, b, c, \ldots)$$

назвемо кодуванням (послідовностей чисел числами). Відповідність

$$n \leftrightarrow n - 1$$

є взаємно однозначною відповідністю між натуральними числами і натуральними числами з нулем.

1.3 Арифметичні вирази, обчислювані функції, перераховні множини.

Завдяки вказаному вище кодуванню ми можемо вважати, що всі алгоритми є функціями

$$f(n)$$

однієї змінної на множині натуральних чисел. Говорячи про арифметичний вираз ми будемо мати на увазі запис алгоритму обчислення функції $f(n)$. Говорячи про обчислювану функцію будемо, як і раніше, мати на увазі таку функцію, яку можна задати алгоритмом обчислення, арифметичними виразом. Множина значень обчислюваної функції називається перераховною.

Область визначення обчислюваної функції Розширений натуральний ряд є обчислюваною множиною (ми це бачили при вивченні частково рекурсивних функцій) і він може бути областю визначення обчислюваної функції. також областю визначення обчислюваної функції може бути перераховна множина — множина значень обчислюваної функції. Вважаємо, що інших областей визначення у обчислюваної функції немає. Отже нижче ми можемо спиратися на те,що

> область визначення і область значень обчислюваної функції є перераховна множина.

1.4 Формули арифметики та арифметичні множини.

В арифметиці можна обійтися одним предикатним симовлом $=$. Формули визначаються індуктивно.

База індукції: Якщо два вирази з'єднати знаком $=$, то одержимо формулу.

Індуктивний перехід. Якщо на формулу навісити квантор, або дві формули з'єднати знаком логічної операції, то одержимо формулу.

Розглядаємо формули із однією вільною змінною.

Формули мають область істиності - це так звані арифметичні множини. Область визначення і область значень обчислюваної функції f це арифметична множина:

$$D_f = \{x | \exists y f(x) = y\} \qquad Im_f = \{y | \exists x f(x) = y\}$$

Якщо у формулу з однією вільною змінною замість зщмінної підставити конкретне значення, то одержимо висловлювання. Якщо висловлювання істинне, то назвемо його теоремою. Ми повинні довести, що існує така теорема, яку неможливо довести.

1.5 Гьоделівські номери

Арифметичний вираз — це послідовність певних символів. Завдяки введеному кодуванню цій послідовності відповідає певне число із розширеного натурального ряду. Оце число називається гьоделівським номером арифметичного виразу.

Кожне доведення (в заданій дедуктиці) є послідовністю символів. Ця послідовність також при кодуванні отримує свій номер — гьоделівський номер доведення.

Взагалі, кожен алгоритм разом з початковими даними є послідовністю символів, яка при кодуванні отримує свій номер, гьоделівський номер алгоритма.

Формула є послідовністю символів. Отже і вона при кодуванні отримує свій гьоделівський номер.

1.6 Універсальний прокурор

Множина гьоделівських номерів тих теорем, які можна довести, є перераховною. Це означає, що є алгоритм, результатом роботи якого є множина гьоделівських номерів тих теорем, які можна довести. Назвемо такий алгоритм універсальним прокурором.

Алгоритм такий.

1. Породжуємо слова в алфавіті дедуктики — спочатку породжуємо слова довжини 1, потім довжини 2, потім довжини 3 і т.д Всі ці слова р озташовуємо в алфавітному порядку.

2. Перевіряємо кожне із виписаних слів на те, ци є це слово доведенням чогось, чи ні. Якщо ні, то слово більше не розглядається і переходимо до наступного слова.

3. Якщо слово є доведенням, то застосовуємо алгоритм, який дозволяє взнати, доведенням чого саме, якої теореми, є це слово.

4. Кодуємо теорему і одержуємо гьоделівський номер доведеної теореми.

5. Переходимо до наступного слова.

Породжуємо слова в алфавіті дедуктики, і превіряємо їх на те, чи є вони доведенням. А потім відділяємо формулу, яку доведення доводить. Таким чином, ми всі вивідні формули записуємо у послідовність. Таким чином, всі вивідні формули є перераховною множиною.

1.7 Обчислення арифметичного виразу від свого гьоделівського номеру

Вводимо обчислювану функцію $V(n)$ наступним чином. Якщо n — гьоделівський номер якогось арифметичного виразу $f_n(x)$

від однієї змінної x, то $V(n) = f_n(n)$. Тут мється на увазі, що $V(n) = f_n(n)$ коли n належить області визначення $f_n(x)$. А коли n не належить області визначення $f_n(x)$ то n не належить також області визначення $V(x)$.

Теорема. Доповнення до області визначення функції $V(x)$ не є перераховною множиною.

Доведення. Доводимо методом від протилежного. Нехай D_1 — область визначення обчислюваної функції $V(x)$, а $D_2 = overline(\mathbb{N}) \setminus D_1$. Нехай далі D_1 перераховується обчислюваною функцією $u(x)$, D_2 перераховується обчислюваною функцією $v(x)$. Тоді наступна функція

$$U(k) = \begin{cases} V(k), & \text{якщо } k \in D_1 1; \\ 0, & \text{якщо } k \in D_2. \end{cases}$$

Для обчислення функції $U(x)$ використовуємо такий алгоритм. Послідовно обчислюємо функції $u(x), v(x)$ на своїх областях визначення і одержані числа записуємо у послідовність — на непарних місцях виписуємо значення $u(x)$ а на парних — значення $v(x)$. Оскільки об'єднання областей значень функцій $u(x), v(x)$ є $D_1 \cup D_2$ — весь розширений натуральний ряд, то через скінченну кількість кроків ми одержимо задане число k. Якщо k з'явилося на непарному місці, то $U(k) = V(k)$. Якщо ж k з'явилося на парному місці, то $U(k) = 0$.

Підкреслимо, що функція $U(k)$ визначена при всіх значеннях k.

Далі будуємо всюди визначену обчислювану функцію $W(k) = U(k) + 1$. Оскільки це обчислювана функція, тобто задається арифметичним виразом, то вона має гьоделівський номер — позначимо його через m. Оскільки функція $W(k)$ всюди визначена, то вона визначена і при $k = m$. За визначенням функції $V(x)$ (вона обчислює функції від своїх гьоделівських номерів) маємо

$$W(m) = V(m). \tag{1}$$

Оскільки m входить в область визначення функції $V(x)$, то

$$U(m) = V(m). \tag{2}$$

За визначенням $W(k) = U(k) + 1$ при будь-якому значенні k, в тому числі і при $k = m$. Отже

$$W(m) = V(m) + 1. \tag{3}$$

Рівності (1),(3) суперечать одна одній. Одержана суперечність доводить неможливість того, щоб доповнення до області визначення $V(x)$ було перераховною множиною.

1.8 Доведення теореми Гьоделя.

Доведення теореми Гьоделя проводимо також методом від протилежного.

Припустимо, що існує повна несуперечлива дедуктика. Будемо розглядати функцію $V(n)$ і множини D_1, D_2, що введені в попередньому розілі. Ми вже довели, що множина D_2 неперераховна. Доведемо тепер, що при нашому припущенні (припущення про те, що всі теореми — істинні висловлюання доказовні), множина D_2 ерераховна.

Ми відмічали, що область значень обчислюваної функції (тобто перераховна множина) є областю істиности певного предиката (формули) $P(x)$. Розглянемо предикат (формулу) $Q(x) = \neg P(x)$. Його область істиності, тобто множина тих $n \in \overline{\mathbb{N}}$, Q(n) істинна, є D_2.

Згадаємо універсального прокурора і те, що множина доказовних формул (точніше, їх годелівських номерівн) є перераховною. Нехай вона (ця множина) перераховується обчислюваною функцією $g(x)$. Послідовно обчилюючи функцію $g(x)$ а своїй області визначення, ми за скінченну кількість кроків одержимо або формулу $P(n)$ або формулу $Q(n)$ для кожного n із розширеного натурального ряду. Функція $g(x)$ дозволяє ввести нову функцію — $h(n)$: $h(n) = n$, коли $g(n)$ дорівнює гьоделівському номеру формули $\neg P(n)$ і $h(n)$ не визначено, коли $g(n)$ чи то невизначено, чи то дорівнює гьоделівському номеру іншої доказовної формули. Функція $h(n)$ перераховує область істиности предиката $\neg P$

2 Теореми[2], які неможливо довести

2.1 Аксіома паралельності і теорема Дезарга

Візьмемо висловлювання

> Через кожну точку площини можна провести пряму, що паралельна даній, і така пряма єдина.

Вказане висловлювання є аксіомою паралельності в шкільній планіметрії. Кожна аксіома є теоремою. Але є так звана геометрія Лобачевського, в якій аксіома паралельності замінена іншою —"будь-які дві прямі перетинаються". Побудова площини Лобачевського, тобто площини, в якій виконується нова аксіома, доводить, що аксіому параленьності неможливо довести, використовуючи лише решту аксіом площини.

Візьммо наступне висловлювання

> Нехай на площині є два трикутники. Встановимо взаємно однозначну відповідність між вершинами цих трикутників і одержимо відповідні вершини і відповідні сторони. Припустимо, що відповідні сторони не паралельні. Якщо прямі, які з'єднують відповідні

[2]Теоремами називають висловлювання, які мають доведення. Отже загловок має внутрішню суперечність. В цьому розділі під теоремою розуміємо висловлювання, яке в якійсь системі аксіом має доведення. В одній системі аксіом твердження має доведення, а в другій — ні.

> вершини перетинаються в одній точці, то точки перетину прямих, на яких лежать відповідні сторони, лежать на одній прямій.

Це так звана теорема Дезарга. Водна доводиться наступним чином. Будується потрібне креслення. І це креслення розглядається як проекція зрізаної трикутної піраміди. Площини основ не паралельні, вони перетинаються по якійсь прямій. От на цій прямій і лежать потрібні точки перетину.

Є площина, так звана недезаргова площина, в якій це твердження хибне. Отже його довести неможливо. Оскільки теорему можна довести використовуючи тривимірний простір, то недезаргова площина не занурюється в тривимірний простір. На такій недезарговій площині неможливо ввсети систем координат. Таким чином недезаргова площина вводиться дещо іншою (ніж шкільна) системою аксіом.

2.2 Континуум-гіпотеза і функція вибору

Континуум гіпотеза формулюється так.

> Існує множина, потужність якої строго більше, ніж потужність мнжини натуральних чисел, і строго менше, ніє потужність множини дійсних чисел.

Функція вибору ставить у відповідність кожній непорожній множині якийсь елемент цієї множини.

Ні існування функції вибору, ні континуум гіпотезу неможливо довести, використовуючи систему аксіом Цермело — Френкеля.

2.3 Недоказовна теорема в арифметиці

Недоказовною в аксіоматиці Пеано так звана теорема Гудстейна[3]

Перед тим, як ввести деякі нові слова.

Ми знаємо, що будь-яке натуральне число n має десятковий запис

$$n = \sum_{i/geq0} a_i 10^i, \qquad 0 \leq a_i \leq 9.$$

Це ж число має двійковий запис

$$n = \sum_{i/geq0} a_i 2^i, \qquad 0 \leq a_i \leq 1.$$

Це число можна подібним чином розкласти за степенями будь-якої основи $m > 1$.

$$n = \sum_{i/geq0} a_i m^i, \qquad 0 \leq a_i \leq m - 1. \tag{4}$$

В записі (4) число a_i можна записати як суму a_i одиниць, а саме число i знову можна розкласти за степенями основи m. Для прикладу, $m = 3$

$$n = 2 + 3^5 + 2 \cdot 3^{11} = (1 + 1) + 3^{3^1+2} + (1 + 1)3^{3^2+2}.$$

Останній запис використовує число 2. Але і тут можна замінити 2 на 1+1.

Подібним чином ми для будь-якої основи m можемо одержати для будь-якого натурального числа n запис, який використоує лише число m і 1. Такий запис називається спадковим записом за заданою основою m.

[3]Теорему сформулював і довів з використанням ординальних чисел, що виходять за межі аксіоматики Пеано, математик, чиє ім'я латинськими буквами пишеться Goodstein. Слово stein імецькою мовою означає камінь і читається як штайн. Тому читання цього імені українською мовою не очевидне. Краще всього було б взнати, як сам Гудстейн читає своє прізвище.

Тепер введемо послідовність Гудстейна. Першим елементом a_1 послідовності гудстейна є будь-яке натуральне число в спадковому записі за основою 2.

Другий елемент a_2 послідовності Гудстейна обчислюється так. Спочатку в спадковому записі a_1 за основою 2 число 2 замінюється на число 3, потім із одержаного числа віднімається один, потім оержане число записується в спадковому записі за основою 3.

Третій елемент послідовності Гудстейна обчислюється так. Спочатку в спадковому записі числа a_2 за основою 3 число 2 замінюється на число 4, потім із одержаного числа віднімається один, потім оержане число записується в спадковому записі за основою 4.

$k+1-$ий елемент a_{k+1} послідовності Гудстейна має спадковий запис за основою $k+2$ і одержується із спадкового запису числа a_k послідовним виконанням трьох дій

1. заміна основи $k+1$ в спадковому записі числа a_k за основою $k+1$ на $k+2$;

2. віднімання із одержаного числа 1;

3. переведення одержаного числа в спадковий запис за основою $k+2$.

Теорема Гудстейна стверджує наступне.

> Який би не був перший елемент послідовності Гудстейна, послідовність Гудстейна обірветься нулем (наступний елемент в послідовності Гудстейна можна будувати лише для ненульовогоелемента).

Покажчик