НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ СКАЧКООБРАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ С ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМ СНОСОМ

И. С. Житомирский

В настоящей работе рассматриваются вероятностные процессы, траектории которых имеют скачки случайной величины в случайные моменты времени, а в промежутках между скачками совпадают с одной из линий некоторого заданного семейства (линии детерминированного сноса, или, сокращенно, ЛДС). Процессы такого типа естественно назвать скачкообразными процессами с детерминированным сносом (СПДС) *.

В частном случае, когда семейство ЛДС совпадает с семейством прямых, параллельных временной оси, СПДС являются скачкообразными или чисто разрывными процессами, подробно изученными в предположении о наличии марковского семейства в работах Поспишила, Феллера, Деблина, Дуба, Колмогорова, Кендалла и некоторых других авторов. Достаточно полное изложение соответствующих результатов можно найти в книгах Дуба [1] и Лоэва [2].

Произведя замену переменных, преобразующую ЛДС в семейство прямых, параллельных временной оси, можно свести СПДС к чисто разрывному процессу. Однако в некоторых случаях и, в частности, при исследовании вопросов, связанных с моментом первого выхода траектории процесса из некоторой области в фазовом пространстве, указанное выше преобразование отнюдь не упрощает рассмотрение. Поэтому, имея главным образом в виду задачу о первом выходе из области, мы не будем прибегать к такой замене.

В качестве фазового пространства для СПДС в настоящей работе рассматривается банахово пространство. В § 1 даются определения ЛДС, пространства элементарных событий и траектории СПДС. Кроме того, устанавливаются некоторые свойства группы операторов сдвига, связанных с ЛДС, а также измеримость определенных типов событий.

В § 2 вводится семейство $P_{t,x}$ вероятностных мер в пространстве Ω, обладающее несколько ослабленным марковским свойством, дается определение СПДС и показывается, что он является необрывающимся непрерывным справа марковским процессом. Заметим, что принятая нами схема определения процесса существенно отличается от изложенной в книгах [1, 2], где предполагается наличие марковского свойства и некоторого свойства непрерывности у семейства вероятностных мер $P_{t,x}$, а затем делается заключение об определенном характере траекторий процесса.

Далее в § 2 вводится понятие регулярного скачкообразного процесса с детерминированным сносом (РСПДС), у которого меры $P_{t,x}$ удовлетворяют дополнительным условиям дифференцируемости.

---

* Строгое определение СПДС дается в § 2.

Главные результаты работы изложены в § 3. Основным объектом рассмотрения здесь является функция $q(t, x; t', \Gamma; \Delta)$, совпадающая со значением меры $P_{t,x}$ на событии, связанном с невыходом траектории процесса из множества Δ фазового пространства в течение промежутка времени $[t, t']$ и прохождением через множество Γ в момент t'. Выясняются условия, достаточные для того, чтобы функция $q(t, x; t', \Gamma; \Delta)$ удовлетворяла двум интегро-дифференциальным уравнениям, частным случаем которых являются уравнения Колмогорова — Феллера. Кроме того, показывается, что функция $q(t, x; t', \Gamma; \Delta)$ при тех же условиях удовлетворяет двум линейным интегральным уравнениям вольтерровского типа II рода. Эти уравнения могут быть решены методом итераций, причем члены итерационных рядов $q_n(t, x; t', \Gamma; \Delta)$ имеют простой вероятностный смысл.

Знание функции $q(t, x; t', \Gamma; \Delta)$ позволяет, в частности, найти функцию распределения момента первого после t выхода траектории процесса из множества Δ, играющую важную роль при решении многих прикладных задач [3—5]. Если множество Δ совпадает со всем фазовым пространством, то функция $q(t, x; t', \Gamma; \Delta)$ является обычной переходной функцией процесса.

§ 1. ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО И ПРОСТРАНСТВО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СОБЫТИЙ

1.1. Пусть E — сепарабельное банахово пространство и S — оператор, отображающий пространство E в себя и удовлетворяющий условию Липшица

$$\| Sx_1 - Sx_2 \| \leqslant L \| x_1 - x_2 \| \quad (x_1, x_2 \in E),$$

где L — некоторая фиксированная постоянная. Пространство E будет играть роль фазового пространства для определяемого в дальнейшем процесса.

Линиями детерминированного сноса (ЛДС) мы будем называть кривые в декартовом произведении $E \times [0, \infty)$, совпадающие с интегральными кривыми для дифференциального уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = Sx(t), \tag{1.1}$$

где t — вещественный параметр.

В уравнении (1.1) под $\frac{dx}{dt}$ подразумевается сильная производная. Используя метод Пикара, можно показать, что уравнение (1.1) имеет при любом начальном условии

$$x(t_0) = x_0 \quad (x_0 \in E, \ -\infty < t_0 < \infty)$$

единственное решение $x(t)$ для всех вещественных t. ЛДС порождают однопараметрическую группу операторов сдвига Φ_h, отображающих пространство E на себя и определяемых следующим образом: $\Phi_h(x_0) = x(t_0 + h)$, если $x(t_0) = x_0$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра в пространстве E, порожденная открытыми множествами. Используя условие Липшица для оператора S, можно показать, что справедлива

Лемма 1.1. *Если множество $\Gamma \subseteq E$ открыто или замкнуто, или принадлежит $\mathfrak{B}$, то при любом вещественном h его образ $\Phi_h(\Gamma)$ соответственно открыт или замкнут, или принадлежит $\mathfrak{B}$.*

Рассмотрим теперь систему $\mathfrak{U}$ множеств Γ пространства E такую, что $\Gamma \in \mathfrak{U}$ в том и только в том случае, когда выполнены условия:

1. 1.А. Если $x \in \Gamma$, то найдется такое $\delta > 0$, что $\Phi_h(x) \in \Gamma$ при в... $h \in [0, \delta]$.

1. 1.Б. Если $h_n \downarrow 0$ и при всех n $\Phi_{h_n}(x) \in \Gamma$, то $x \in \Gamma$.

Как легко убедиться, система множеств $\mathfrak{U}$ есть алгебра. Система

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{U}$$

также есть алгебра, причем можно показать, что $\mathfrak{B} = \sigma[\mathfrak{W}]$.

Будем называть в дальнейшем множество $\Delta \subseteq E$ Φ-выпуклым, ес... при любых $h_1 < h_2$ и $x \in E$ из соотношений $\Phi_{h_1}(x) \in \Delta$ и $\Phi_{h_2}(x) \in \Delta$ следу... что $\Phi_h(x) \in \Delta$ при всех $h \in [h_1, h_2]$.

Пусть $\Delta \subseteq E$. Если при $x \in E$ множество $T = \{t : \Phi_t(x) \in \Delta\}$ не пус... то обозначим

$$t_{x,\Delta} = \inf\{T\}.$$

Можно легко удостовериться в справедливости следующих предложени...

Лемма 1.2. *Если множество* $\Delta \subseteq E$ *удовлетворяет условию 1.1.*... *и при некоторых* $x \in E$, $-\infty < h < \infty$, $\Phi_h(x) \in \Delta$, *то*

$$\Phi_{t_{x,\Delta}}(x) \in \Delta.$$

Лемма 1.3. *Если* $b > 0$, *множество* $\Delta \subseteq E$ *Φ-выпукло и* $\Gamma \subseteq \Phi_b(\Delta$... то при $t' \leqslant t'' \leqslant b$

$$\Delta \cap \Phi_{t'}(\Gamma) \subseteq \Phi_{t'-t''}(\Delta).$$

Всюду в дальнейшем индикатором $\chi_\Delta(x) = \chi[\Delta, x]$ множества Δ наз...вается функционал, определенный при $x \in E$ следующим образом:

$$\chi_\Delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Delta \\ 0 & \text{при } x \in \bar{\Delta}. \end{cases}$$

При этом $\bar{\Delta} = E \setminus \Delta$.

Имеет место

Лемма 1.4. *При* $\Delta \in \mathfrak{U}$ и $h_n \uparrow 0$

$$\chi[\bar{\Delta} \cap \Phi_{h_n}(\Delta);\ x] \to 0,$$
$$\chi[\Delta \cap \Phi_{h_n}(\bar{\Delta});\ x] \to 0.$$

1.2. Пространством Ω элементарных событий ω мы будем называ... множество, элементами которого являются последовательности пар

$$\omega = \{t_n, x_n\}_{n=1}^{\infty} \quad (t_n \geqslant 0,\ x_n \in E),$$

удовлетворяющие условиям

1.2.А. Множество

$$\omega^* = \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$$

содержит элемент, равный нулю.

1.2.Б. Множество ω^* замкнуто.

1.2.В. При $i \neq j$ $t_i \neq t_j$.

1.2.Г. Для любого номера k можно указать соответствующий е... номер j, такой, что $t_j > t_k$ и интервал (t_k, t_j) не содержит ни одно... из элементов множества ω^*. При этом $x_j \neq \Phi_{t_j - t_k}(x_k)$.

Положим при $\omega \in \Omega$ и $t \geqslant 0$

$$x_t(\omega) = x(t, \omega) = \Phi_{t-t_k}(x_k),$$

где

$$t_k = \max_n \{t_n : t_n \in \omega^*,\ t_n \leqslant t\}.$$

Траекторией процесса, соответствующей элементарному событию ω, мы будем называть кривую в пространстве $E \times [0, \infty)$, определяемую уравнением

$$x = x(t, \omega).$$

Как нетрудно убедиться, при любом $\omega \in \Omega$ функция $x(t, \omega)$ определена равенством (1.2) и непрерывна справа для всех $t \geqslant 0$.

При этом в точках $t_i \in \omega^*$, не являющихся точками сгущения этого множества, функция $x(t, \omega)$ имеет, в силу 1.2.Г, разрывы I рода. Что касается точек сгущения ω^*, то они могут быть как точками непрерывности, так и точками разрыва I и II рода.

Пространство Ω можно сделать измеримым, вводя, как это обычно делается [6], σ-алгебры событий, связанных с поведением траекторий на заданном интервале значений t. Обозначим при $u \geqslant 0$ и $\Gamma \subseteq E$

$$A_u(\Gamma) = \{\omega: x(u, \omega) \in \Gamma\}.$$

Тогда при любых $0 \leqslant t \leqslant t'$ $\mathfrak{N}_t^{t'}$ есть σ-алгебра в пространстве Ω, порожденная множествами $A_u(\Gamma)$ при $\Gamma \in \mathfrak{B}$ и $u \in [t, t']$.

В связи с задачами о первом выходе из множества Δ приходится также рассматривать ω-множества, определяемые следующим образом. При $0 \leqslant t \leqslant t'$ и $\Delta \subseteq E$

$$B_t^{t'}(\Delta) = \bigcap_{u \in [t, t']} A_u(\Delta).$$

Легко доказывается

Лемма 1.5. Если множество $\Delta \in \mathfrak{B}$ удовлетворяет условию 1.1.Б, то при $0 \leqslant t \leqslant t'$

$$B_t^{t'}(\Delta) \in \mathfrak{N}_t^{t'}.$$

Условие леммы 1.5 выполняется, в частности, когда множество Δ замкнуто или принадлежит $\mathfrak{W}$.

1.3. Определим теперь множества $R_j(a, b)$ и $R_\infty(a, b)$. При $0 \leqslant a < b$ и $j = 0, 1, 2, \ldots$ $R_j(a, b)$ есть множество тех $\omega \in \Omega$, для которых на полусегмент $(a, b]$ попадает в точности j элементов ω^*. $R_\infty(a, b)$ есть множество тех $\omega \in \Omega$, для которых на $(a, b]$ попадает бесконечное число элементов множества ω^*. Наконец, при $a = b$

$$R_0(a, b) = \Omega; \quad R_j(a, b) = \varnothing \ (j = 1, 2, \ldots); \quad R_\infty(a, b) = \varnothing.$$

Имеет место

Теорема 1.1. *При $0 \leqslant a \leqslant b$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$*

$$R_n(a, b) \in \mathfrak{N}_a^b.$$

Доказательство теоремы 1.1. основано на следующих леммах.

Лемма 1.6. При $0 \leqslant a \leqslant b$ $R_0(a, b) \in \mathfrak{N}_a^b$.

Лемма 1.7. При $0 \leqslant a \leqslant b$ $R_1(a, b) \in \mathfrak{N}_a^b$.

Лемма 1.8. Если при $0 \leqslant a \leqslant b$ и некотором натуральном n справедливо соотношение $R_n(a, b) \in \mathfrak{N}_a^b$, то тогда и $R_{n+1}(a, b) \in \mathfrak{N}_a^b$.

Справедливость леммы 1.6 вытекает из возможности при $a < b$ представления

$$R_0(a, b) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{r_n}[\Phi_{r_n - a}(E_i^{(m)})],$$

где $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ — всюду плотная в пространстве E последовательность, $E_i^{(m)}$ — шар радиуса $\frac{1}{m}$ с центром в точке x_i, а $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ — всюду плотная на сегменте $[a, b]$ последовательность, причем $r_1 = a$ и $r_2 = b$.

Точно так же доказательство леммы 1.7 основано на представлении

$$R_1(a, b) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^m} A_a(E_j^{(i)}) \cdot R_0(a, u_{k-1}^{(m)}) \cdot A_{u_k^{(m)}}[\Phi_{u_{k-a}^{(m)}} \overline{(E_j^{(i)})}]\, R_0(u_k^{(m)}, b)$$

где

$$u_k^{(m)} = a + k \cdot 2^{-m} \cdot (b - a),$$

а леммы 1.8 — на равенстве

$$R_{n+1}(a, b) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=2}^{2^m} R_n(a, u_{k-1}^{(m)}) \cdot R_1(u_{k-1}^{(m)}, u_k^{(m)}) \cdot R_0(u_k^{(m)}, b). \quad (1.3$$

Из теоремы 1.1 непосредственно вытекает, что

$$R_\infty(a, b) = \Omega \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} R_n(a, b) \in \mathfrak{N}_a^b.$$

Можно убедиться также в том, что справедлива

Теорема 1.2. *Если* $0 \leqslant t \leqslant t'$ *и* C *— открытое множество пространства* E, *то*

$$\left\{B_t^{t'}(C) \bigcap \left[\bigcup_{n=0}^{\infty} R_n(t, t')\right]\right\} \in \mathfrak{N}_t^{t'},$$

причем существует последовательность множеств $D^{(n)} (\in) \mathfrak{B}$, *такая, что* $D^{(n)} \uparrow C$ *и*

$$\left\{B_t^{t'}(D^{(n)}) \bigcap \left[\bigcup_{n=0}^{\infty} R_n(t, t')\right]\right\} \uparrow \left\{B_t^{t'}(C) \bigcap \left[\bigcup_{n=0}^{\infty} R_n(t, t')\right]\right\}.$$

Множества $D^{(n)}$, обладающие нужными свойствами, можно взять в виде

$$D^{(n)} = \left\{x : h_C(x) \leqslant -\frac{1}{n}\right\},$$

где функционал $h_C(x)$ определяется равенством

$$h_C(x) = \sup\{h : \Phi_h(x) \in \bar{C},\ h \leqslant 0\}.$$

§ 2. Вероятностные меры. Марковское свойство и регулярность

2.1. Пусть на каждой из σ-алгебр $\mathfrak{N}_t = \mathfrak{N}_t^\infty$ для всех $t \geqslant 0$ и всех $x \in E$ задана вероятностная мера $P_{t,x}(A)$, удовлетворяющая следующим условиям.

2.1.А. Для всех $x \in E$ и $t \geqslant 0$

$$P_{t,x}[A_t(\overline{\{x\}})]^* = 0.$$

2.1.Б. Для всех $t \geqslant 0$ и $A \in \mathfrak{N}_t$ $P_{t,x}(A)$ есть $\mathfrak{B}$-измеримая функция x.

2.1.В. Если $0 \leqslant t \leqslant u \leqslant t'$ $x \in E$ и $\Gamma \in \mathfrak{B}$, то при $n = 0$ и $n = 1$ п. н. Ω, $P_{t,x}$

$$P_{t,x}\{R_n(u, t') \cdot A_{t'}(\Gamma) \mid \mathfrak{N}_t^u\} = P_{u, x(u,\omega)}\{R_n(u, t') \cdot A_{t'}(\Gamma)\}. \quad (2.1)$$

Заметим, что обычно при построении марковских процессов [6] измеримость функции $P_{t,x}(A)$ требуется только для множеств вида $A = A_{t'}(\Gamma)$, где $\Gamma \in \mathfrak{B}$ и $t' \geqslant t$. Используя марковское свойство, показывают, что условие 2.1.Б выполняется в постулированной нами форме.

* Символ $\{x\}$ означает множество, состоящее из одного элемента x.

Что касается условия 2.1.В, то оно является несколько ослабленным марковским свойством.

С помощью метода, аналогичного тому, которым в [6] доказывается теорема 2.1, можно доказать справедливость следующего предложения.

Лемма 2.1. *Если* $0 \leqslant t \leqslant u \leqslant t'$, $x \in E$ *и* $\Gamma \in \mathfrak{B}$, *то* п. н. Ω, $P_{t,x}$

$$P_{t,x}\{R_n(u,t')A_{t'}(\Gamma)\,|\,\mathfrak{N}_t^u\} = P_{u,x(u,\omega)}\{R_n(u,t')A_{t'}(\Gamma)\}$$

при $n = 0, 1, 2, \ldots$, *а также*

$$P_{t,x}\left\{\bigcup_{n=0}^{\infty} R_n(u,t')A_{t'}(\Gamma)\,|\,\mathfrak{N}_t^u\right\} = P_{u,x(u,\omega)}\left\{\bigcup_{n=0}^{\infty} R_n(u,t')\cdot A_{t'}(\Gamma)\right\}.$$

Потребуем теперь, чтобы, кроме условий 2.1.А — 2.1.В, было выполнено также условие

2.1.Г. Существует непрерывная и монотонно неубывающая при $u \geqslant 0$ функция $\lambda(u)$, такая, что для всех $0 \leqslant t \leqslant t'$ и $x \in E$ имеет место оценка

$$P_{t,x}\{R_1(t,t')\} \leqslant \lambda(t') - \lambda(t).$$

Используя это условие и равенство (1.3), можно методом полной индукции показать, что справедлива

Лемма 2.2. *При всех* $0 \leqslant t \leqslant t'$, $x \in E$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$P_{t,x}\{R_n(t,t')\} \leqslant \frac{1}{n!}[\lambda(t') - \lambda(t)]^n.$$

Кроме того, нетрудно показать, что имеет место

Лемма 2.3. *При всех* $0 \leqslant t \leqslant t'$ *и* $x \in E$

$$P_{t,x}\{R_\infty(t,t')\} = 0.$$

Если выполнены условия 2.1.А — 2.1.Г, то вероятностный процесс $\{x(t,\omega);\ \mathfrak{N}_t^{t'};\ P_{t,x}\}$ мы будем называть *скачкообразным процессом с детерминированным сносом* (СПДС).

При использовании лемм 2.1 — 2.3 может быть легко доказана

Теорема 2.1. *СПДС является необрывающимся непрерывным справа марковским процессом.*

2.2. Предположим теперь, что условие 2.1.Г заменено следующей совокупностью более сильных условий.

2.2.А. При всех $x \in E$ и $\Gamma \in \mathfrak{B}$ существует конечный предел

$$\lim_{t' \downarrow t} \frac{1}{t'-t} P_{t,x}\{R_1(t,t')A_{t'}[\Phi_{t'-t}(\Gamma)]\} = \zeta_{t,x}(\Gamma). \tag{2.2}$$

2.2.Б. При всех $0 \leqslant t \leqslant t'$ и $x \in E$

$$P_{t,x}\{R_1(t,t')\} \leqslant \int_t^{t'} \vartheta(u)\,du,$$

где $\vartheta(u)$ — непрерывная справа и монотонно-неубывающая на полуоси $[0,\infty)$ функция.

2.2.В. Для произвольных $y \in E$, $t \geqslant 0$ и любой последовательности множеств $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, такой что $\Gamma_n \in \mathfrak{B}$ и при всех $x \in E$

$$\lim_{n\to\infty} \chi[\Gamma_n; x] = 0,$$

равномерно по t' в некотором полусегменте $(t, t+\delta]$ выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{t'-t}P_{t,y}\{R_1(t, t')A_{t'}[\Phi_{t'-t}(\Gamma_n)]\}=0.$$

2.2.Г. При всех $t\geqslant 0$ и $x\in E$ функция $\nu_{t,x}=\zeta_{t,x}(E)$ непрерывна справа на ЛДС, т. е.

$$\lim_{t'\downarrow t}\nu_{t',\Phi_{t'-t}(x)}=\nu_{t,x}.$$

Используя условие 2.2.Г, можно показать, что при любых $t\geqslant$ и $x\in E$ функция

$$\varphi(t')=\nu_{t',\Phi_{t'-t}(x)}\quad(t'\geqslant t)$$

имеет не более чем счетное число точек разрыва. Из условий 2.2.А и 2.2.Б вытекает очевидным образом, что

$$\nu_{t,x}\leqslant\vartheta(t).$$

Нетрудно убедиться также в том, что функция $\zeta_{t,x}(\Gamma)$, определяемая соотношением (2.2), при фиксированных $t\geqslant 0$ и $\Gamma\in\mathfrak{B}$ $\mathfrak{B}$-измерима по переменной x, а при фиксированных $t\geqslant 0$ и $x\in E$ представляет собой меру на σ-алгебре $\mathfrak{B}$.

СПДС, удовлетворяющий условиям 2.2.А — 2.2.Г, мы будем называть регулярным (РСПДС).

Можно показать, что справедлива

Лемма 2.4. *Для РСПДС при всех $t\geqslant 0$ и $x\in E$*

$$\lim_{t'\downarrow t}\frac{1}{t'-t}\{1-P_{t,x}[R_0(t, t')]\}=\nu_{t,x},$$

$$\lim_{t'\downarrow t}\frac{1}{t'-t}P_{t,x}\left[\bigcup_{n=2}^{\infty}R_n(t, t')\right]=0.$$

§ 3. ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЙ, СВЯЗАННЫХ С НЕВЫХОДОМ ИЗ ДАННОГО МНОЖЕСТВА В ТЕЧЕНИЕ НЕКОТОРОГО ИНТЕРВАЛА ВРЕМЕНИ

3.1. В этом параграфе мы рассмотрим функции вида

$$q(t, x; t', \Gamma; \Delta)=P_{t,x}\{B_t^{t'}(\Delta)A_{t'}(\Gamma)\},$$
$$q_n(t, x; t', \Gamma; \Delta)=P_{t,x}\{B_t^{t'}(\Delta)R_n(t, t')A_{t'}(\Gamma)\}.$$

Может быть легко доказана

Лемма 3.1. *Пусть множество $\Delta\in\mathfrak{B}$ Φ-выпукло, $0\leqslant t<u$, $B_t^u(\Delta)\in\mathfrak{N}_t^u$ и $g(y)$ — вещественная $\mathfrak{B}$-измеримая функция в пространстве E, обращающаяся в нуль на $\bar{\Delta}$. Тогда для СПДС*

$$\int_E q_0(t, x; u, dy; \Delta)g(y)=\begin{cases}P_{t,x}\{R_0(t, t')\}g[\Phi_{u-t}(x)] & \text{при } x\in\Delta,\\ 0 & \text{при } x\in\bar{\Delta}.\end{cases}$$

Основываясь на леммах 1.2, 1.3, 2.2—2.4 и 3.1, а также на соотношениях

$$q(t, x; t', \Gamma; \Delta)=\sum_{i=0}^{\infty}\int_E q_i(t, x; u, dy; \Delta)q(u, y; t', \Gamma; \Delta)\quad(3.1)$$

$$q_n(t, x; t', \Gamma; \Delta)=\sum_{i=0}^{n}\int_E q_i(t, x; u, dy; \Delta)q_{n-i}(u, y; t', \Gamma; \Delta)\quad(3.2)$$

при $0 \leqslant t \leqslant u \leqslant t'$, $x \in E$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$ и $\Delta \in \mathfrak{W}$, можно удостовериться также в справедливости следующих предложений.

Лемма 3.2. *При $t' > 0$, $z \in E$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$, если множество $\Delta \in \mathfrak{W}$ Φ-выпукло и выполнено условие*

$$a = \max\{t_{z,\Delta},\ 0\} < t',$$

то для РСПДС функции переменной t

$$q(t,\ \Phi_t(z);\ t',\ \Gamma;\ \Delta),\ q_n(t,\ \Phi_t(z);\ t',\ \Gamma;\ \Delta)\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

удовлетворяют на сегменте $[a, t']$ условию Липшица с константой, не зависящей от z.

Лемма 3.3. *Если множество $\Delta \in \mathfrak{W}$ Φ-выпукло, то при $t \geqslant 0$, $x \in \Delta$, $b > 0$ и $\Gamma \in \mathfrak{B}_b = \mathfrak{B}[\Phi_{-b}(\Delta)]$* * *функции переменной t'*

$$q(t,\ x;\ t',\ \Phi_{t'}(\Gamma);\ \Delta),\ q_n(t,\ x;\ t',\ \Phi_{t'}(\Gamma);\ \Delta)\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

для РСПДС удовлетворяют на сегменте $[t, b]$ условию Липшица с константой, не зависящей от Γ.

С помощью лемм 1.2—1.5 и 2.2—2.4 доказываются также

Лемма 3.4. *Пусть Φ-выпуклое множество $\Delta \in \mathfrak{W}$, $0 \leqslant t \leqslant t' < b$ и $\Gamma \in \mathfrak{B}_b$. Тогда для любой меры $\psi(A)\,(A \in \mathfrak{B})$ и РСПДС*

$$\lim_{t'' \downarrow t'} \frac{1}{t'' - t'} \int_\Delta \psi(dy)\, q_1(t',\ y;\ t'',\ \Phi_{t''}(\Gamma);\ \Delta) = \int_\Delta \psi(dy)\, \zeta_{t', y}[\Delta \cap \Phi_{t'}(\Gamma)].$$

Лемма 3.5. *Пусть множество $\Delta \in \mathfrak{W}$ Φ-выпукло $0 \leqslant t < u \leqslant b$, $x \in E$, а неотрицательная функция $f(u,\ y)$ $(u \geqslant t,\ y \in \Delta)$ не превосходит единицы, при каждом фиксированном u $\mathfrak{B}[\Delta]$-измерима и при каждом $z \in \Delta$ равномерно по z существует*

$$\lim_{u \downarrow t} f(u,\ \Phi_{u-t}(z)) = f(t, z).$$

Тогда существует

$$\lim_{u \downarrow t} \frac{1}{u - t} \int_\Delta q_1(t,\ x;\ u,\ dy;\ \Delta) f(u,\ y) = \chi_\Delta(x) \int_\Delta \zeta_{t, x}(dz) f(t,\ z).$$

Используя представления (3.1), (3.2) и леммы 3.1—3.5, уже нетрудно доказать следующие теоремы.

Теорема 3.1. *Если множество $\Delta \in \mathfrak{W}$ и Φ-выпукло, то для РСПДС при всех $z \in E$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$ и*

$$t' > a = \max\{t_{z,\Delta};\ 0\}$$

функции переменной t

$$q(t,\ \Phi_t(z);\ t',\ \Gamma;\ \Delta),\ q_n(t,\ \Phi_t(z);\ t',\ \Gamma;\ \Delta)\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

обладают на полусегменте $[a,\ t')$ правой производной $\frac{d+}{dt}$ и удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d+}{dt} q(t,\ \Phi_t(z);\ t',\ \Gamma;\ \Delta) - \nu_{t,\Phi_t(z)}\, q(t,\ \Phi_t(z);\ t',\ \Gamma;\ \Delta) =$$

$$= -\chi[\Delta;\ \Phi_t(z)] \int_\Delta \zeta_{t, \Phi_t(z)}(dy)\, q(t,\ y;\ t',\ \Gamma;\ \Delta), \qquad (3.3)$$

* При $A \in \mathfrak{B}$ $\mathfrak{B}[A]$ есть σ-алгебра в пространстве A множеств $\Gamma \in \mathfrak{B}$, содержащихся в A.

$$\frac{d+}{dt} q_n(t,\ \Phi_t(z);\ t',\ \Gamma;\ \Delta) - \nu_{t,\ \Phi_t(z)}\, q_n(t,\ \Phi_t(z);\ t',\ \Gamma;\ \Delta) =$$
$$= -\chi[\Delta;\ \Phi_t(z)] \int\limits_{\Delta} \zeta_{t,\ \Phi_t(z)}(dy)\, q_{n-1}(t,\ y;\ t',\ \Gamma;\ \Delta).$$

Кроме того, удовлетворяются начальные условия

$$\lim_{t \uparrow t'} q(t,\ \Phi_t(z);\ t',\ \Gamma;\ \Delta) = \lim_{t \uparrow t'} q_0(t,\ \Phi_t(z);\ t',\ \Gamma;\ \Delta) = \chi[\Gamma \cap \Delta;\ \Phi_{t'}(z)],$$
$$\lim_{t \uparrow t'} q_n(t,\ \Phi_t(z);\ t',\ \Gamma;\ \Delta) = 0 \text{ при } n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Теорема 3.2. *Если множество $\Delta \in \mathfrak{B}$ Ф-выпукло, то для РСПДС при всех $0 \leqslant t < b$, $x \in \Delta$ и $\Gamma \in \mathfrak{B}_b$ функции переменной t'*

$$q(t,\ x;\ t',\ \Phi_{t'}(\Gamma);\ \Delta),\quad q_n(t,\ x;\ t',\ \Phi_{t'}(\Gamma);\ \Delta)\quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

обладают на полусегменте $[t,\ b)$ правой производной $\frac{d+}{dt'}$ и удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d+}{dt'} q(t,\ x;\ t',\ \Phi_{t'}(\Gamma);\ \Delta) + \int\limits_{\Delta \cap \Phi_{t'}(\Gamma)} \nu_{t',\ y}\, q(t,\ x;\ t',\ dy;\ \Delta) =$$
$$= \int\limits_{\Delta} \zeta_{t',\ y}[\Delta \cap \Phi_{t'}(\Gamma)]\, q(t,\ x;\ t',\ dy;\ \Delta), \tag{3.4}$$

$$\frac{d+}{dt'} q_n(t,\ x;\ t',\ \Phi_{t'}(\Gamma);\ \Delta) + \int\limits_{\Delta \cap \Phi_{t'}(\Gamma)} \nu_{t',\ y}\, q_n(t,\ x;\ t',\ dy;\ \Delta) =$$
$$= \int\limits_{\Delta} \zeta_{t',\ y}[\Delta \cap \Phi_{t'}(\Gamma)]\, q_{n-1}(t,\ x;\ t',\ dy;\ \Delta).$$

Кроме того, удовлетворяются начальные условия

$$\lim_{t' \downarrow t} q(t,\ x;\ t',\ \Phi_{t'}(\Gamma);\ \Delta) = \lim_{t' \downarrow t} q_0(t,\ x;\ t',\ \Phi_{t'}(\Gamma);\ \Delta) = \chi[\Phi_t(\Gamma) \cap \Delta;\ x],$$
$$\lim_{t' \downarrow t} q_n(t,\ x;\ t',\ \Phi_{t'}(\Gamma);\ \Delta) = 0 \text{ при } n = 1,\ 2,\ \ldots$$

В формулировках теорем 3.1 и 3.2 положено по определению

$$q_{-1}(t,\ x;\ t',\ \Gamma;\ \Delta) \equiv 0.$$

Заметим, что при $\Delta = E$ функция $q(t,\ x;\ t',\ \Gamma;\ \Delta)$ является переходной функцией процесса. Уравнения (3.3), (3.4) являются в этом случае некоторым обобщением уравнений Колмогорова—Феллера для переходных функций чисто разрывных процессов. При $\Phi_h(x) \equiv x$ уравнение (3.3) совпадает с обратным, а (3.4) — с прямым уравнением Колмогорова—Феллера.

3.2. Для вывода чисто интегральных соотношений предварительно доказываются некоторые леммы.

Лемма 3.6. *При всех $z \in E$ и $0 \leqslant t \leqslant t' \leqslant b$ функция*

$$g_z(t,\ t') = \exp\left[\int\limits_t^{t'} \nu_{v,\ \Phi_v(z)}\, dv\right]$$

при фиксированных t и t' $\mathfrak{B}$-измерима по z, а при фиксированном z удовлетворяет по переменной t на сегменте $[0,\ t']$ и по переменной t' на *сегменте* $[t, b]$ *условию Липшица с константой, не зависящей от* z. *При всех* $t \in [0, t')$ *и всех* $t' \geqslant t$ *существуют правые производные*

$$\frac{\partial +}{\partial t} g_z(t, t') = -\nu_{t, \Phi_t(z)} g_z(t, t'),$$

$$\frac{\partial +}{\partial t'} g_z(t, t') = \nu_{t', \Phi_{t'}(z)} g_z(t, t').$$

Лемма 3.7. *Пусть* $0 \leqslant a < t'$, $z \in E$ *и функция* $f(t)$ *удовлетворяет на сегменте* $[a, t']$ *условию Липшица, обладает при* $t \in [a, t')$ *правой производной* $\frac{d+f}{dt}$ *и удовлетворяет уравнению*

$$\frac{d+f}{dt} = \nu_{t, \Phi_t(z)} f(t) - h(t),$$

где $h(t)$ — *некоторая вещественная функция.*
Пусть, кроме того, выполняется начальное условие

$$\lim_{t \uparrow t'} f(t) = f_0.$$

Тогда

$$f(t) = \int_t^{t'} \exp\left[-\int_t^u \nu_{v, \Phi_v(z)} dv\right] h(u)\, du + f_0 \exp\left[-\int_t^{t'} \nu_{v, \Phi_v(z)} dv\right].$$

Лемма 3.8. *Пусть множество* $\Delta \in \mathfrak{B}$, $t \geqslant 0$ *и неотрицательная функция* $w(t', \Gamma)(t' \geqslant t, \Gamma \in \mathfrak{B})$ *удовлетворяет условиям*

3.2.А. *При каждом* $t' \geqslant t$ $w(t', \Gamma)$ *есть мера на* $\mathfrak{B}$.

3.2.Б. *При всех* $t' \geqslant t$ $w(t', E) \leqslant c$, *где* c — *некоторая положительная постоянная.*

3.2.В. *При всех* $b > t$, $\Gamma \in \mathfrak{B}_b$ *и* $t \leqslant t' \leqslant t'' \leqslant b$

$$|w(t'', \Gamma) - w(t', \Gamma)| \leqslant K(t'' - t'),$$

где K *не зависит от* Γ.

3.2.Г. *При всех* $\Gamma \in \mathfrak{B}_b$ *и* $t' \in [t, b)$ *существует правая производная*

$$\frac{d+}{dt'} w(t', \Gamma) = \eta(t', \Gamma).$$

3.2.Д. *При каждом* $t' \in [t, b)$ $\eta(t', \Gamma)$ *есть обобщенная мера на* σ-*алгебре* $\mathfrak{B}_b$ *в пространстве* $\Phi_{-b}(\Delta)$.

Тогда функция

$$G(t', \Gamma) = \int_\Gamma w(t', dx)\, g_x(t, t')$$

при $\Gamma \in \mathfrak{B}_b$ *удовлетворяет по переменной* t' *на сегменте* $[t, b]$ *условию Липшица, а при* $t' \in [t, b)$ *обладает правой производной* $\frac{d+}{dt'}$, *причем*

$$\frac{d+}{dt'} G(t', \Gamma) = \int_\Gamma \eta(t', dx)\, g_x(t, t') + \int_\Gamma w(t', dx)\, \nu_{t' \Phi_{t'}(x)} g_x(t, t').$$

Лемма 3.9. *Пусть множество* $\Delta \in \mathfrak{B}$, $t \geqslant 0$ *и неотрицательные функции* $\psi(t', \Gamma)$, $w(t', \Gamma)$ $(t' \geqslant t, \Gamma \in \mathfrak{B})$ *таковы, что для* $\psi(t', \Gamma)$ *выполняются условия, аналогичные* 3.2.А, 3.2.Б, *а функция* $w(t', \Gamma)$ *удовлетворяет условиям* 3.2.А — 3.2.Г, *причем при* $\Gamma \in \mathfrak{B}_b$ и $t' \in [t, b)$

$$\frac{d+}{dt'} w(t', \Gamma) = -\int_\Gamma \nu_{t', \Phi_{t'}(z)} w(t', dz) + \psi(t', \Gamma)$$

и

$$\lim_{t' \downarrow t} w(t', \Gamma) = w_0(\Gamma),$$

где $w_0(\Gamma)$ — *мера на* $\mathfrak{B}_b$.

Тогда при всех $\Gamma \in \mathfrak{B}_b$ *и* $t' \in [t, b]$

$$w(t', \Gamma) = \int_t^{t'} du \int_\Gamma \psi(u, dx) \exp\left[-\int_u^{t'} \nu_{v, \Phi_v(x)} dv\right] + \int_\Gamma w_0(dx) \exp\left[-\int_t^{t'} \nu_{v, \Phi_v(x)} dv\right].$$

Лемма 3.6 доказывается очень просто с использованием условия 2.2.Г. Доказательство лемм 3.7 и 3.9 основано на том факте, что абсолютно непрерывная функция обладает почти всюду производной и равна интегралу от своей производной, который в условиях этих лемм можно заменить интегралом от правой производной.

С помощью лемм 3.6—3.9, а также теорем 3.1, 3.2 может быть легко доказана следующая теорема.

Теорема 3.3. *Если множество* $\Delta \in \mathfrak{W}$ *и* Φ*-выпукло, то для РСПДС при всех* $x \in E$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$ *и* $0 \leqslant t \leqslant t'$ *выполнены соотношения*

$$q(t, x; t', \Gamma; \Delta) - q_0(t, x; t', \Gamma; \Delta) =$$
$$= \int_t^{t'} \exp\left[-\int_t^u \nu_{v, \Phi_{v-t}(x)} dv\right] \chi[\Delta \cap \Phi_{t-u}(\Delta); x]\, du \int_\Delta \zeta_{u, \Phi_{u-t}(x)}(dy)\, q(u, y; t', \Gamma; \Delta), \tag{3.5}$$

$$q(t, x; t', \Gamma; \Delta) - q_0(t, x; t', \Gamma; \Delta) =$$
$$= \int_t^{t'} du \int_\Delta q(t, x; u, dy; \Delta) \int_{\Delta \cap \Phi_{u-t'}(\Gamma \cap \Delta)} \zeta_{u, y}(dz) \exp\left[-\int_u^{t'} \nu_{v, \Phi_{v-u}(z)} dv\right], \tag{3.6}$$

$$q_n(t, x; t', \Gamma; \Delta) = \int_t^{t'} \exp\left[-\int_t^u \nu_{v, \Phi_{v-t}(x)} dv\right] \chi[\Delta \cap \Phi_{t-u}(\Delta); x]\, du \times$$
$$\times \int_\Delta \zeta_{u, \Phi_{u-t}(x)}(dy)\, q_{n-1}(u, y; t', \Gamma; \Delta), \tag{3.7}$$

$$q_n(t, x; t', \Gamma; \Delta) =$$
$$= \int_t^{t'} du \int_\Delta q_{n-1}(t, x; u, dy; \Delta) \int_{\Delta \cap \Phi_{u-t'}(\Gamma \cap \Delta)} \zeta_{u, y}(dz) \exp\left[-\int_u^{t'} \nu_{v, \Phi_{v-u}(z)} dv\right], \tag{3.8}$$

$$q_0(t, x; t', \Gamma; \Delta) = \chi\left[\Phi_{t-t'}(\Gamma \cap \Delta) \cap \Delta; x\right] \exp\left[-\int_t^{t'} \nu_{v, \Phi_{v-t}(x)} dv\right]. \tag{3.9}$$

Тот факт, что функция $q(t, x; t, \Gamma; \Delta)$ удовлетворяет интегральному уравнению (3.5), следует из выполнения интегро-дифференциального соотношения (3.2) и соответствующего начального условия. То же самое относится к интегральному уравнению (3.6) и интегро-дифференциальному уравнению (3.4).

Рекуррентные формулы (3.7) и (3.8) могут служить для последовательного определения величин $q_n(t, x; t', \Gamma; \Delta)$ для всех натуральных n. Равенство

$$q(t, x; t', \Gamma; \Delta) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(t, x; t', \Gamma; \Delta) \tag{3.10}$$

дает тогда возможность определить также функцию $q(t, x; t', \Gamma; \Delta)$. Можно заметить, что при использовании рекуррентных формул (3.7) правая часть (3. 10) совпадает с итерационным рядом Неймана для уравнения (3.5), а при использовании формул (3.8) — для уравнения (3.6). Используя лемму 2.2, нетрудно установить сходимость соответствующих рядов.

Имея функцию $q(t, x; t', \Gamma; \Delta)$, можно легко получить многие важные характеристики процесса.

Так, если $\mu(\Gamma)$ — вероятностная мера на σ-алгебре $\mathfrak{B}$, сосредоточенная на Δ, то величина

$$Q(t, t') = \int_{\Delta} \mu(dx)\, q(t, x; t', \Delta; \Delta)$$

представляет собой вероятность невыхода траектории процесса из множества Δ в течение промежутка времени $[t, t']$, если случайная величина $x_t(\omega)$ имеет закон распределения $\mu(\Gamma)$. Величина $P_t(t') = 1 - Q(t, t')$ представляет собой функцию распределения момента первого после t выхода траектории процесса из множества Δ при том же условии.

Заметим также, что в силу теорем 1.2 и леммы 2.3 вероятности невыхода из открытых множеств могут быть аппроксимированы вероятностями невыхода из множеств $\Delta \in \mathfrak{B}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Л. Дуб. Вероятностные процессы. Изд-во иностр. лит., М., 1956.
2. М. Лоэв. Теория вероятностей. Изд-во иностр. лит., М., 1962.
3. И. С. Житомирский, А. Г. Васильев, К. С. Клемпнер. Статистическая надежность релейных устройств в стационарных состояниях и переходных процессах. Сб. «Радиоизотопные методы автоматического контроля», т. 1, Изд-во АН Кирг. ССР, Фрунзе, 1963.
4. Л. К. Таточенко. Статистические характеристики переходных режимов радиоактивных реле. Сб. «Радиоизотопные методы автоматического контроля», т. 1, Изд-во АН Кирг. ССР, Фрунзе, 1963.
5. И. С. Житомирский. О функции распределения момента первого выхода. «Теория вероятностей и ее применения», 8, вып. 2, 156—166, 1963.
6. Е. Б. Дынкин. Основания теории марковских процессов. Физматгиз, М., 1959.